Sadržaj

1 Slučajna varijabla

Definicija 1.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Realna funkcija X definirana na Ω, tj. funkcija

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

za koju vrijedi

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

je slučajna varijabla na Ω.

Napomena 1.

Slika slučajne varijable X, označimo ju s $\mathcal{R}(X)$, je skup onih realnih brojeva koje ta slučajna varijabla može primiti kao svoje vrijednosti. Ako je $\mathcal{R}(X)$ konačan ili prebrojiv skup govorimo o diskretnoj slučajnoj varijabli. U suprotnom govorimo o drugim klasama slučajnih varijabli od kojih izdvajamo neprekidne slučajne varijable.

2 Diskretna slučajna varijabla

Sljedeći primjer pokazuje na koji način zadajemo diskretne slučajne varijable.

Primjer 1.

- Pretpostavimo da je student izašao na ispit iz UVIS-a. Mogući ishodi ovog slučajnog pokusa (tj. studentovog izlaska na ispit) su:
  - ω_1 - student je dobio 1, tj. nije položio ispit,
  - ω_2 - student je dobio 2,
  - ω_3 - student je dobio 3,
  - ω_4 - student je dobio 4,
  - ω_5 - student je dobio 5.
- Jednočlani skupovi $\{\omega_i\}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, su elementarni događaji, a skup

  $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$$

  je prostor elementarnih događaja ovog slučajnog pokusa.

- Pretpostavimo da su nam, na temelju informacije koju imamo o vremenu koje je student utrošio na pripremu ispita, zadani sljedeći brojevi:

$$p_1 = P(\omega_1),\ p_2 = P(\omega_2), p_3 = P(\omega_3), p_4 = P(\omega_4), p_5 = P(\omega_5)$$

  takvi da je

  - $p_i \geq 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
  - $\sum\limits_{i=1}^{5} p_i = 1$.

- Na ovaj način definirana je vjerojatnost na $\mathcal{P}(\Omega)$. Za svaki $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ vrijedi:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i).$$

- Pretpostavimo da si je student prije izlaska na ispit obećao da će pojesti jednu kuglu sladoleda manje od ocjene koju bude dobio.

- Broj kugli sladoleda kojima će se student počastiti je slučajnog karaktera, tj. ne može se odrediti prije nego ispit završi nekim od mogućih ishoda.

- Ako X označimo broj kugli sladoleda koje će student zaslužiti, tada se očito radi o funkciji $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, tj. diskretnoj slučajnoj varijabli čije su moguće realizacije (vrijednosti)

$$X(\omega_1) = x_1 = 0, X(\omega_2) = x_2 = 1, X(\omega_3) = x_3 = 2,$$

$$X(\omega_4) = x_4 = 3, X(\omega_5) = x_5 = 4.$$

- Slika slučajne varijable X je skup $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

- Iz prethodnog zaključivanja znamo da će svaki student koji pristupi ispitu pojesti najviše četiri kugle sladoleda. Intuitivno zaključujemo da su vjerojatnosti da se X realizira s x_i različite za različite $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i da ovise o pripremljenosti studenta za ispit. Navedimo dva moguća slučaja:

  - Nepripremljen student:

$$p_1 = 0.8,\ p_2 = 0.15,\ p_3 = 0.05,\ p_4 = 0,\ p_5 = 0.$$

  - Odlično pripremljen student:

$$p_1 = 0,\ p_2 = 0.05,\ p_3 = 0.05,\ p_4 = 0.1,\ p_5 = 0.8.$$

- Što npr. za odlično pripremljenog studenta znači da je $p_3 = 0.05$? Prema definiciji broja $p_3 = P(\omega_3)$, broj 0.05 je vjerojatnost da odlično pripremljen student iz ispita dobije ocjenu 3. Ako je X broj kugli sladoleda kojima će se student počastiti, iz definicije slučajne varijable X slijedi: $X = 2 \Longleftrightarrow$ dogodio se ω_3, tj. odlično pripremljen student iz ispita je dobio trojku. Zaključujemo:

$$P(X = 2) = P(\omega_3) = p_3 = 0.05.$$

- Na temelju prethodnog primjera zaključujemo da je za zadavanje diskretne slučajne varijable X potrebno poznavati:

  1. skup vrijednosti $\mathcal{R}(X)$ slučajne varijable X,
  2. vjerojatnost da X poprimi svaku od tih vrijednosti.

Definicija 2.

Diskretne slučajne varijable zadajemo tako da zadamo skup vrijednosti koje ta slučajna varijabla može primiti, tj. skup

$$\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, ...\}$$

i njima pridružene vjerojatnosti $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$. To pregledno zapisujemo u obliku tablice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n & \ldots \end{pmatrix}.$$

Ovu tablicu nazivamo tablica distribucije, distribucija ili zakon razdiobe slučajne varijable X. Distribucija ima sljedeća svojstva:

1. $x_i \neq x_j$ čim je $i \neq j$;
2. $p_i \geq 0$, $\forall i$;
3. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

Definicija 3.

Gustoća[1] diskretne slučajne varijable X je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana na sljedeći način:

$$f_X(x) = \begin{cases} p_i & , \quad x = x_i \\ 0 & , \quad x \neq x_i \end{cases},$$

gdje je $p_i = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}) = P(X = x_i)$.

3 Zadaci

Zadatak 1.

Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja pravilno izrađenog novčića dva puta za redom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj realiziranih pisama. Odredite distribuciju i gustoću diskretne slučajne varijable X, te grafički prikažite gustoću.

Zadatak 2.

Strijelac na raspolaganju ima tri metka i gađa metu dok ju ne pogodi ili dok ne potroši sva tri metka. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost broj potrošenih metaka. Uz pretpostavku o nezavisnosti gađanja odredite distribuciju i gustoću od X ako je vjerojatnost pogotka mete pri svakom gađanju jednaka 0.8.

Zadatak 3.

Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od bacanja pravilne igraće kockice dva puta za redom. Neka je X slučajna varijabla čija je vrijednost suma realiziranih brojeva u oba bacanja. Odredite distribuciju i gustoću diskretne slučajne varijable X, te grafički prikažite gustoću.

[1] engl. probability mass function, PMF

4 Funkcije diskretnih slučajnih varijabli

- Neka je $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla zadana tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

  i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana funkcija.

- Sa $Y = Y(\omega) = g(X(\omega)) = (g \circ X)(\omega)$, $\omega \in \Omega$, označavamo kompoziciju diskretne slučajne varijable X i funkcije g.

- Tako dobivenu slučajnu varijablu $Y = g(X)$ nazivamo transformacijom diskretne slučajne varijable X.

- Slučajna varijabla $Y = g(X)$ je diskretna.

- Ako je $\mathcal{R}(X) = \{x_1, x_2, \dots\}$ slika slučajne varijable X, tada je $\mathcal{R}(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$ slika slučajne varijable Y gdje su y_i, $i = 1, 2, \dots$, sve različite vrijednosti $g(x_i)$.

- Ako je slika slučajne varijable Y skup $\mathcal{R}(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$, tada su pripadne vjerojatnosti da Y poprimi pojedinu realizaciju y_j, $j = 1, 2, \dots$, dane sljedećom formulom:

$$P(Y = y_j) = \sum_{\{x_i : g(x_i) = y_j\}} P(X = x_i).$$

5 Zadaci

Zadatak 4.

Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Odredite distribuciju slučajne varijable $Y = 3X^2 - 3$.

Zadatak 5.

Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} & \frac{2\pi}{3} & \frac{5\pi}{6} \\ 0.25 & 0.2 & 0.3 & 0.15 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

Odredite distribuciju slučajne varijable $Y = 3 - 2\cos^2 X$.