Uvod u vjerojatnost i statistiku

Vježbe 7.

1. Neprekidne slučajne varijable
2. Zadaci
3. Funkcija distribucija diskretne slučajne varijable
4. Zadaci
5. Funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable
6. Zadaci

Definicija 1.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkciju $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$,
- postoji nenegativna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je

$$P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\right) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

zovemo apsolutno neprekidna slučajna varijabla na Ω ili samo neprekidna slučajna varijabla. Funkciju f zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X ili samo funkcija gustoće slučajne varijable X.

Napomena 1.

Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable ima dva bitna svojstva:

1. nenegativnost: $f(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$,
2. normiranost: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

- Sljedeći primjer pokazuje na koji način zadajemo neprekidne slučajne varijable.

Primjer 1.

Točka se bira na slučajan način unutar intervala $[a, b]$. Neka je X slučajna varijabla koja se realizira realnim brojem pridruženim izabranoj točki iz intervala $[a, b]$. Tada je vjerojatnost da točka bude izabrana unutar nekog podintervala $[a, x]$ intervala $[a, b]$

$$P(a \leq X \leq x) = \int_a^x f_X(t)dt.$$

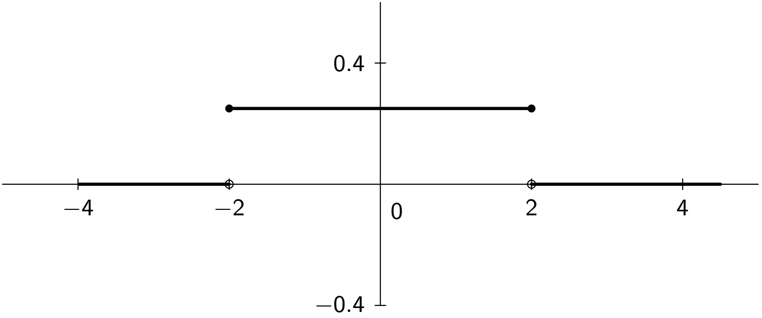
Vidimo da je $\mathcal{R}(X) = [a, b]$. Kako $\mathcal{R}(X)$ nije diskretan (konačan ili prebrojiv) skup, X je neprekidna slučajna varijabla. Zadajmo sada funkciju gustoće slučajne varijable X: kako se točka na slučajan način bira unutar intervala $[a, b]$ logično je definirati $f_X(x) = 0$ za $x \notin [a, b]$, dok za $x \in [a, b]$ funkciju gustoće f_X možemo zadati na različite načine:

a) jedan od pristupa temelji se na pretpostavci da je vjerojatnost proporcionalna duljini podintervala (uniformni pristup), pri čemu normalizacijsku konstantu možemo odrediti iz uvjeta normiranosti od f_X - neka je $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ zadana s

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \quad x \in [a, b] \\ 0 & , \quad x \notin [a, b] \end{cases} .$$

Primjerice, za $a = -2$ i $b = 2$ je

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4 & , \quad x \in [-2, 2] \\ 0 & , \quad x \notin [-2, 2] \end{cases}$$



Slika: Funkcija gustoće vjerojatnosti f_X slučajne varijable X za $a = -2$ i $b = 2$.

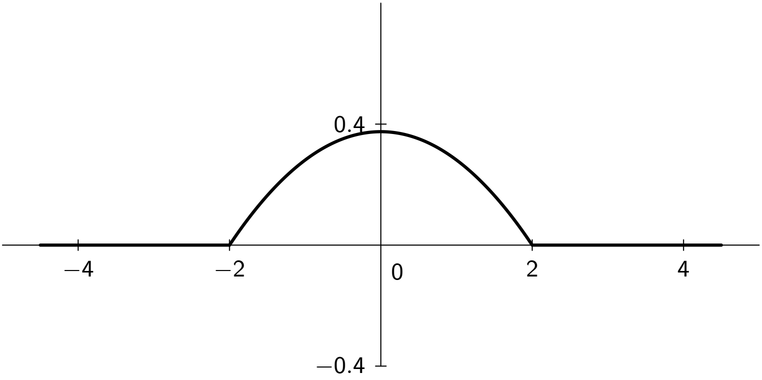
b) pokazali smo da se funkcijom $g_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ definiranom formulom

$$g_X(x) = \begin{cases} K(4 - x^2) & x \in [-2, 2] \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

može zadati vjerojatnost, a iz uvjeta normiranosti slijedi da je $K = 3/32$. Tada je i funkcijom

$$g_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - x^2) & x \in [-2, 2] \\ 0 & , \text{inače} \end{cases}$$

zadana funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X.



Slika: Funkcija gustoće vjerojatnosti g_X slučajne varijable X.

Primjerice, koristeći funkciju f_X vidimo da je

$$P(-2 \leq X \leq 1) = \int_{-2}^{1} f_X(t)dt = 3/4.$$

Ako za računanje vjerojatnosti koristimo funkciju gustoće g_X dobivamo da je

$$P(-2 \leq X \leq 1) = \int_{-2}^{1} g_X(t)dt = 27/32.$$

Zadatak 1.

Za zadane realne funkcije realne varijable odredite vrijednost nepoznate konstante k tako da svaka od njih bude funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable:

a) $f(x) = \begin{cases} kx & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} k\cos 2x & , \quad -\pi/4 \leq x < \pi/4 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$

b) $h(x) = \begin{cases} ke^{-3x} & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$

d) skicirajte grafove funkcija f, g i h.

Definicija 2.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla zadana tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}.$$

Funkciju $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ koja realnom broju x pridružuje vjerojatnost da realizacija dane slučajne varijable bude manja ili jednaka tom broju, tj.

$$F(x) = P\left(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}\right) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i),$$

nazivamo funkcija distribucije diskretne slučajne varijable X.

Napomena 2.

Uočimo da je funkcija distribucije diskretne slučajne varijable stepenasta funkcija, tj. funkcija sa skokovima vrijednosti u točkama x_i, dok na intervalu $[x_i, x_{i+1})$ prima stalno istu vrijednost koja je jednaka $F(x_i)$.

Zadatak 2.

Pretpostavimo da provodimo slučajan pokus koji se sastoji od istovremenog bacanja dvaju pravilno izrađenih novčića: jedne kovanice od 2 kn i jedne kovanice od 5 kn. Slučajna varijabla $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definirana je kao funkcija koja svakom ishodu slučajnog pokusa pridružuje sumu vrijednosti kovanica na kojima se nakon bacanja realiziralo pismo. Odredite distribuciju ove slučajne varijable te izračunajte sljedeće vjerojatnosti: $P(X < x)$, $P(X \leq x)$, $P(X > x)$ i $P(X \geq x)$ za neki po volji odabran $x \in \mathbb{R}$?

Zadatak 3.

Odredite gustoću i funkciju distribucije slučajne varijable X iz prethodnog zadatka, te ih grafički prikažite.

Zadatak 4.

Iz kutije u kojoj se nalazi 7 kuglica numeriranih brojevima od 1 do 7 na slučajan se način izvlače istovremeno tri kuglice (koje su numerirane brojevima $i, j, k \in \{1, \ldots, 7\}$). Odredite distribuciju, gustoću i funkciju distribucije slučajne varijable X definirane pravilom

$$X(\{i, j, k\}) = \max\{i, j, k\}, \quad i, j, k \in \{1, \ldots, 7\}.$$

Zadatak 5.

U smjeru kretanja automobila nalaze se redom tri semafora koji rade nezavisno jedan od drugog. Na svakom se s vjerojatnošću $p = 0.5$ pojavljuje crveno i s vjerojatnošću $q = 0.5$ zeleno svjetlo. Slučajnom varijablom X modeliramo broj semafora pored kojih prolazi automobil do prvog zaustavljanja. Odredite distribuciju, gustoću i funkciju distribucije diskretne slučajne varijable X.

Zadatak 6.

Grafove funkcija gustoće i funkcija distribucije za slučajne varijable u **Zadacima 3** i **4** nacrtati za domaću zadaću te proanalizirati neprekidnost tih funkcija.

Definicija 3.

Neka je $X \colon \Omega \to \mathbb{R}$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Funkciju distribucije $F \colon \mathbb{R} \to [0,1]$ slučajne varijable X definiramo na sljedeći način:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Napomena 3.

Sljedeću formulu, koja se temelji na razlici vrijednosti funkcije distribucije neprekidne slučajne varijable u rubnim točkama intervala, koristimo za izračunavanje vjerojatnosti pripadnosti realizacije neprekidne slučajne varijable X nekom intervalu $I \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \in \langle a, b]) = P(X \in \langle -\infty, b] \setminus \langle -\infty, a]) \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) \\ &= \int_a^b f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Zadatak 7.

Zadana je funkcija gustoće slučajne varijable X:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{2}{3} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$

Izračunajte funkciju distribucije slučajne varijable X, te skicirajte grafove funkcije gustoće i funkcije distribucije.

Zadatak 8.

Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$

a) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf,

b) Izračunajte $P(0.25 < X \leq 2)$.

Zadatak 9.

Neka je X neprekidna slučajna varijabla zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \cos 2x & , \quad x \in [-\pi/4, \pi/4\rangle \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases} .$$

a) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X i skicirajte njezin graf,

b) Izračunajte $P(0 < X \leq \pi/8)$.

Zadatak 10.

Unutar kruga radijusa R na slučajan način biramo točku. Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable koja se realizira udaljenošću te slučajno odabrane točke od središta kruga.

Napomena: promatrajte krug radijusa R sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava.

Zadatak 11.

Svakog radnog dana osoba autobusom odlazi na posao. Autobusi na stanicu dolaze redovito svakih pet minuta. Trenutak dolaska osobe na stanicu smatramo slučajnim trenutkom između dolaska dvaju uzastopnih autobusa. Vrijeme koje protekne od dolaska osobe na stanicu do dolaska prvog sljedećeg autobusa (vrijeme čekanja) modeliramo slučajnom varijablom X za koju je poznato da je vjerojatnost da osoba autobus čeka najviše x vremena proporcionalna tom vremenu čekanja x.

a) Odredite funkciju distribucije i funkciju gustoće slučajne varijable X.

b) Odredite vjerojatnost da osoba autobus čeka

- manje od dvije minute,
- više od tri minute,
- manje od dvije minute ili barem tri minute,
- barem dvije, ali manje od tri minute.

Zadatak 12.

Na stroju koji proizvodi bakrenu žicu povremeno dolazi do smetnji koje uzrokuju nepravilnost na dijelu žice proizvedenom u trenutku smetnje. Duljinu žice (u metrima) između dviju uzastopnih nepravilnosti možemo modelirati slučajnom varijablom s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \begin{cases} k(1+x)^{-3} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

a) Odredite vrijednost konstante k.

b) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X.

c) Kolika je vjerojatnost da se nepravilnost na žici pojavi između 0.4 i 0.45 metara?