Uvod u vjerojatnost i statistiku

Vježbe 8.

Matematičko očekivanje diskretne slučajne varijable

Definicija 1.

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Ako red

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

apsolutno konvergira, tj. ako konvergira red $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| P(\{\omega\})$, onda kažemo da slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje i broj

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$

zovemo matematičko očekivanje slučajne varijable X.

Teorem 1.

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

slučajna varijabla na njemu. Redovi

$$\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) \quad \text{i} \quad \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i$$

istovremeno ili apsolutno konvergiraju ili apsolutno divergiraju. U slučajnu apsolutne konvergencije sume su im jednake i vrijedi

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\}) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i p_i.$$

Definicija 2.

Neka je X slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i $r > 0$. Definiramo sljedeće momente slučajne varijable X:

1. r-ti moment:

$$E[X^r] = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^r p_i,$$

ako $E[X^r]$ postoji,

2. r-ti centralni moment:

$$m_r = E\left[(X - E[X])^r\right],$$

ako $E\left[(X - E[X])^r\right]$ postoji,

3. r-ti apsolutni moment:

$$E[|X|^r] = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^r p_i,$$

ako $E[|X|^r]$ postoji.

Definicija 3.

Drugi centralni moment zove se varijanca slučajne varijable X:

$$\mathrm{Var}(X) = E\left[(X - E[X])^2\right] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

Napomena 1.

Neka su X i Y slučajne varijable koje imaju matematičko očekivanje, tj. $E[X]$ i $E[Y]$ postoje. Matematičko očekivanje ima sljedeća bitna svojstva:

1. linearnost: $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$,
2. monotonost: $X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$,
3. $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$,
4. $X \geq 0$ i $E[X] = 0 \Rightarrow X = 0$.

Zadatak 1.

Odredite matematička očekivanja slučajnih varijabli X, X^2 i X^3, gdje je slučajna varijabla X zadana je sljedećom tablicom distribucije:

a)

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/4 & 1/8 & 1/16 & 1/16 \end{pmatrix}.$$

Zadatak 2.

Slučajna varijabla X zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 8 \\ a & 1/8 & a - b^2 & b^2 & 1/4 & b \end{pmatrix},$$

gdje su a i b nepoznati parametri. Ako $E[X] = 25/8$, odredite:

(a) vrijednosti parametara a i b,

(b) varijancu slučajne varijable X.

Zadatak 3.

Za zadatke s pretprošlih vjebi (vježbe 6) odredite sljedeća matematička očekivanja:

a) Zadatak 4 - $E[X]$, gdje je

$$X(\{i,j,k\}) = \max\{i,j,k\}, \quad i,j,k \in \{1,\ldots,7\}.$$

b) $E[X]$, gdje je X slučajna varijabla čija je realizacija broj semafora pored kojih automobil prođe prije zaustavljanja na prvom crvenom svjetlu,

c) $E[Y]$, gdje je $Y = 3X^2 - 3$,

d) $E[Y]$, gdje je $Y = 3 - 2\cos^2 X$.

Zadatak 4.

Ispitujemo ispravnost sustava koji se sastoji od tri komponente. Otkazivanje komponenti događa se nezavisno i vjerojatnost otkazivanja n-te komponente je

$$p_n = 0.2 + (n-1)\,0.1, \quad n \in \{1,2,3\}.$$

Odredite distribuciju, matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable kojom je modeliran broj komponenti koje su otkazale.

Zadatak 5.

U spremniku se nalazi pet kutija: dvije su prazne, a u preostale tri nalazi se po deset bombona. Izvlačimo jednu po jednu kutiju sve dok ne izvučemo praznu kutiju (izvlačenje se vrši bez vraćanja prethodno izvučenih kutija u spremnik). Kolika je vjerojatnost da izvučemo svih 30 bombona? Odredite distribuciju, matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable kojom je modeliran broj bombona koje smo izvukli.

Zadatak 6.

Diskretna slučajna varijabla zadana je tablicom distribucije

$$X = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 1 & 1+\alpha \\ p & 2p & 3p \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0.$$

a) Odredite vrijednost parametra p.

b) Izračunajte matematičko očekivanje, varijancu i treći apsolutni moment slučajne varijable X.

c) Izračunajte

$$P\left(|X| \leq 1 + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Propozicija 1.

(Čebiševljeva nejednakost)
Neka je X slučajna vrijabla koja ima varijancu σ^2 i neka je $k > 0$.
Tada vrijedi:

$$P\left(|X - \mu| \geq k\sigma\right) \leq \frac{1}{k^2},$$

gdje je μ očekivanje slučajne varijable X.

Napomena 2.

Primjenom svojstva vjerojatnosti suprotnog događaja slijedi:

$$P\left(|X - \mu| < k\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Funkcija izvodnice diskretne slučajne varijable

Definicija 4.

Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu sa slikom $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$. Funkciju izvodnicu (vjerojatnosti) slučajne varijable X definiramo s

$$g_X(z) := E[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) z^k$$

Napomena 3.

- Red $\sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) z^k$ kojim je definirana funkcija izvodnice konvergira za $-1 \leq z \leq 1$.
- $E[X] = g'_X(1)$
- $Var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - g'_X(1)^2$

Zadatak 7.

Automat za igre na sreću u nekoj kockarnici programiran je tako da se prirodan broj n realizira s vjerojatnošću 2^{-n}, tj.

$$P(X = n) = \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Odredite distribuciju, matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable kojom je modeliran prirodan broj generiran automatom.

b) Izračunajte vjerojatnost da realizacija slučajne varijable X od njenog očekivanja odstupa za barem dvije standardne devijacije.

c) Vjerojatnost izračunatu u zadatku b) ocijenite pomoću Čebiševljeve nejednakosti te usporedite rezultate.

Zadatak 8.

Neka je X slučajna varijabla kojom je modeliran broj kišnih dana u Osijeku tijekom jedne godine. Poznato je da je očekivani broj kišnih dana 128, a standardna devijacija 4. Ocijenite vjerojatnost da broj kišnih dana u Osijeku tijekom jedne godine odstupa od očekivanog broja za manje od pet dana.

Zadatak 9.

Neka je X slučajna varijabla kojom je modelirana visina snježnog pokrivača na Zavižanu u dvanaestom mjesecu. Poznato je da je očekivana visina snijega u prosincu na Zavižanu 75 cm, a standardna devijacija 12 cm. Kolika se visina snijega može očekivati tijekom prosinca ako Čebiševljeva ocjena vjerojatnosti nije manja od 0.9.