Sadržaj

1 Važne parametarske familije diskretnih slučajnih varijabli

Bernoullijeva slučajna varijabla

Neka je X slučajna varijabla koja može poprimiti točno dvije vrijednosti - $\mathcal{R}(X) = \{0, 1\}$. Takva slučajna varijabla ima tablicu distribucije sljedećeg oblika:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, 1\rangle.$$

Slučajnu varijablu X zadanu ovom tablicom distribucije nazivamo Bernoullijeva slučajna varijabla, a samu distribuciju Bernoullijeva distribucija s parametrom p. Parametar p zapravo je vjerojatnost da se realizira vrijednost 1 slučajne varijable X.

Matematičko očekivanje i varijanca Bernoullijeve slučajne varijable:

$$E[X] = p, \quad \mathrm{Var}(X) = p(1-p).$$

Binomna slučajna varijabla

Binomna slučajna varijabla vezana je uz nezavisno ponavljanje Bernoullijevog pokusa (koji ima samo dva moguća ishoda: 1 = uspjeh; 0 = neuspjeh). Svako izvođenje takvog pokusa opisano je jednom Bernoullijevom slučajnom varijablom - sva izvođenja takvog pokusa modelirana su nezavisnim Bernoullijevim slučajnim varijablama zadanima istom tablicom distribucije.

Pretpostavimo da Bernoullijev pokus ponavljamo nezavisno n puta i da nas zanima kolika je vjerojatnost da se pojavi točno k uspjeha, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

jer se u n nezavisnih ponavljanja pokusa točno k puta (svaki puta s vjerojatnošću p) pojavila realizacija koju nazivamo uspjeh i točno $(n-k)$ puta (svaki puta s vjerojatnošću $(1-p)$) realizacija koju nazivamo neuspjeh.

Slučajna varijabla X čija je realizacija broj uspjeha u n nezavisnih ponavljanja istog Bernoullijevog pokusa ima sljedeću tablicu distribucije:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n \\ q^n & \binom{n}{1} pq^{n-1} & \binom{n}{2} p^2 q^{n-2} & \ldots & p^n \end{pmatrix}.$$

Slučajna varijabla X zadana ovom tablicom distribucije zove se binomna slučajna varijabla. Njezinu distribuciju nazivamo binomnom distribucijom i označavamo $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, gdje brojeve n (broj nezavisnih ponavljanja Bernoullijevog pokusa) i p (vjerojatnost realizacije uspjeha u jednom izvođenju Bernoullijevog pokusa) nazivamo parametrima binomne slučajne varijable.

Matematičko očekivanje i varijanca binomne slučajne varijable:

$$E[X] = np, \quad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Zadatak 1.

a) Student rješava pismeni ispit koji se sastoji od dvadeset pitanja. Na svako pitanje ponuđena su samo dva odgovora: točno i netočno. Izračunajte vjerojatnost da slučajnim odabirom odgovora na svih dvadeset pitanja student točno riješi 80 % ispita. Kolika je vjerojatnost da na isti način točno riješi barem 80 % ispita?

b) Student rješava pismeni ispit koji se sastoji od 33 pitanja. Na svako pitanje ponuđena su točno četiri odgovora. Odredite očekivani broj točnih odgovora ako student na svako pitanje slučajno odabere jedan od četiri ponuđena odgovora.

Zadatak 2.

Promotrimo sljedeću igru na sreću:

- u svakoj partiji igre jednom se bacaju tri simetrične igraće kockice,
- igrač u svakoj partiji igre ulaže jednu kunu ("kladi" se na jednu kunu),
- u svakoj partiji igrač ili gubi ili nešto zarađuje. Ako se ni na jednoj kockici nije okrenula šestica, gubi uloženu kunu. Zarađuje prema sljedećoj shemi: dobiva jednu kunu za svaku šesticu koja se okrenula na bačenim kockicama i u tom slučaju zadržava i svoju uloženu kunu.

Izračunajte očekivani iznos igračevog dobitka (gubitka).

Geometrijska slučajna varijabla

Pretpostavimo da nezavisno ponavljamo Bernoullijev pokus u kojem je vjerojatnost uspjeha p. Geometrijska slučajna varijabla $X \sim \mathcal{G}(p)$ modelira broj provedenih pokusa do prvog uspjeha:

$$\mathcal{R}(X) = \{1, 2, 3, \dots\},$$
$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

Očekivanje i varijanca:

$$E[X] = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Zadatak 3.

Pokažite da je matematičko očekivanje geometrijske slučajne varijable $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$E[X] = \frac{1}{p},$$

a varijanca

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Zadatak 4.

Partija igre se sastoji od bacanja simetričnog novčića i možemo uložiti proizvoljni iznos c na svaku partiju. Ako padne pismo osvajamo $2c$, a ako padne glava gubimo uloženo. Odlučujemo se za sljedeću strategiju: na prvu igru ulažemo c. Kad izgubimo, udvostručujemo ulog iz prethodne partije i igramo sve dok ne pobijedimo u jednoj partiji.

a) Koliki je očekivani broj igara koje ćemo odigrati?

b) Odredite dobitak/gubitak u trenutku kad igra prestaje.

c) Odredite očekivani iznos novca potreban za ovu strategiju.

Hipergeometrijska slučajna varijabla

U spremniku se nalazi N proizvoda, $N \in \mathbb{N}$. Od tih N proizvoda M ih je prve vrste, a $(N-M)$ druge vrste. Iz tog spremnika na slučajan način odaberemo n proizvoda, bez vraćanja u spremnik prethodno izvučenih proizvoda. Broj izvučenih proizvoda prve vrste modeliramo slučajnom varijablom X sa sljedećom distribucijom:

$$\mathcal{R}(X) = \{k \in \mathbb{N}_0 : \max\{0, n-(N-M)\} \le k \le \min\{n, M\}\},$$

$$P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k \in \mathcal{R}(X).$$

Slučajnu varijablu X nazivamo hipergeometrijska slučajna varijabla s parametrima n, M i N. Samu distribuciju zovemo hipergeometrijska distribucija i označavamo

$$X \sim \mathcal{H}(n, M, N), \quad N \in \mathbb{N}, \quad M \le N, \quad n \le N.$$

Matematičko očekivanje i varijanca hipergeometrijske slučajne varijable:

$$E[X] = \frac{nM}{N}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{nM}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

Sljedeći teorem govori o aproksimaciji hipergeomertijske distribucije binomnom distribucijom:

Teorem 1.

Neka je $X \sim \mathcal{H}(n, M, N)$. Ako $N \to \infty$ i $M \to \infty$ tako da $\dfrac{M}{N} \to p$, gdje je p pozitivan realan broj, tada

$$\frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \forall k \in \mathcal{R}(X).$$

Zadatak 5.

U pošiljci audio opreme nalazi se 100 mikrofona od kojih je 20 neispravno. Vlasnik trgovine audio opremom, koji ne zna broj neispravnih mikrofona u pošiljci, odlučuje da će za svoju trgovinu uzeti pošiljku ako među 10 slučajno odabranih mikrofona ne bude više od 3 neispravna.

a) Kolika je vjerojatnost da će trgovac prihvatiti pošiljku?

b) Što zaključujete o vjerojatnosti prihvaćanja pošiljke u slučaju da pošiljka sadrži jednak broj ispravnih i neispravnih mikrofona?

Zadatak 6.

Posuda sadrži 1000 lukovica tulipana - 400 lukovica crvenih tulipana i 600 lukovica tulipana drugih boja. Iz te posude na slučajan način odaberemo 10 lukovica.

a) Kolika je vjerojatnost da smo odabrali točno pet lukovica crvenih tulipana?

b) Koliki je očekivani broj izvučenih lukovica crvenih tulipana?

Zadatke riješite pomoću hipergeometrijske i binomne distribucije.

Poissonova slučajna varijabla

- Slučajna varijabla čija realizacija predstavlja broj "uspjeha" u nekom jediničnom intervalu (vremena, mase, volumena, ...) naziva se POISSONOVOM SLUČAJNOM VARIJABLOM.
- Slučajan pokus iz kojeg proizlazi koncept slučajne varijable ovakvog tipa mora zadovoljavati slijedeće uvjete:
  - vjerojatnost da se pojavi uspjeh ne ovisi o tome u kojem će se jediničnom intervalu dogoditi,
  - broj uspjeha u jednom vremenskom intervalu neovisan je o broju uspjeha u nekom drugom intervalu,
  - očekivani broja uspjeha je isti za sve jedinične intervale i dan je pozitivnim realnim brojem λ.

Definicija 1.

Slučajna varijabla $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako prima vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, \dots\}$ s vjerojatnostima:

$$P(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}.$$

- Numeričke karakteristike Poissonove slučajne varijable:

- MATEMATIČKO OČEKIVANJE:	$E[X] = \lambda$;
- VARIJANCA:	$Var(X) = \lambda$.

Napomena 1.

Poissonovu distribuciju možemo promatrati kao granični slučaj binomne s parametrima n i p, kada n teži u beskonačno, a p u nulu, tako da produkt np ostaje konstantan. Uzmemo li da je

$$p_i(n) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}, \quad \lambda = np,$$

može se pokazati da je

$$\lim_{n \to \infty} p_i(n) = \frac{1}{i!} \lambda^i e^{-\lambda}.$$

Zadatak 7.

Pokažite da je matematičko očekivanje Poissonove slučajne varijable $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$E[X] = \lambda,$$

a varijanca

$$\mathrm{Var}(X) = \lambda.$$

Zadatak 8.

Podaci o poslovanju dostavne službe jedne poznate osječke pizzerije podupiru tvrdnju da broj poziva u minuti ima Poissonovu distribuciju s očekivanim brojem poziva 4 po minuti. Odredite vjerojatnost da tijekom jedne minute:

1. ne bude primljena niti jedna narudžba;
2. budu primljene barem dvije narudžbe.

Zadatak 9.

Broj poziva telefonskoj centrali ima Poissonovu distribuciju s očekivanim brojem poziva proporcionalnim vremenskom periodu. Za sat vremena centrala očekivano primi 120 poziva. Zbog iznenadnog kvara pozivi nisu primani jednu minutu. Kolika je vjerojatnost da u tom periodu centrali nije bilo upućeno više od 4 poziva?

Zadatak 10.

Pretpostavimo da je 1% od svih tranzistora koje proizvodi neka tvrtka neispravno. Za novi model računala potrebno je 100 takvih tranzistora i svih 100 ih je odabrano s proizvodne trake spomenute tvrtke. Odredite vjerojatnost da su među odabranim tranzistorima:

a) točno tri

b) manje od tri

c) barem tri

neispravna tranzistora, korištenjem binomne i Poissonove distribucije.