

Uvod u vjerojatnost i statistiku

Vježbe 10.

- 1 Matematičko očekivanje i varijanca neprekidne slučajne varijable
 - Zadaci

Definicija 1.

Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f .
Ako je integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx < \infty,$$

kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje i broj

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx,$$

zovemo OČEKIVANJE NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE X .

Definicija 2.

Za strogo pozitivan realan broj r definiramo:

- r -ti moment μ_r : $E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx$, ukoliko $E[X^r]$ postoji.

- r -ti centralni moment m_r :

$$E[(X - E[X])^r] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^r f(x) dx, \text{ ukoliko je}$$

spomenuti integral konačan.

Definicija 3.

VARIJANCA (drugi centralni moment) neprekidne slučajne varijable X sa funkcijom gustoće f definirana je na sljedeći način:

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx.$$

Napomena 1.

Svojstva (linearnost, monotonost, ...) matematičkog očekivanja spomenuta kod očekivanja diskretnih slučajnih varijabli vrijede i kod očekivanja neprekidnih slučajnih varijabli.

Zadatak 1.

Slučajna varijabla X zadana je funkcijom gustoće:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & , \quad \text{inače.} \end{cases}$$

Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X , te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.

Zadatak 2.

Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , x \in \langle a, b \rangle \\ 0 & , x \notin \langle a, b \rangle \end{cases}$$

zove se UNIFORMNA SLUČAJNA VARIJABLA S PARAMETRIMA a I b , $a < b$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X , te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.

Zadatak 3.

Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{za } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{za } x \geq 0 \end{cases}$$

zove se EKSPONENCIJALNA SLUČAJNA VARIJABLA S PARAMETROM $\lambda > 0$. Odredite funkciju distribucije slučajne varijable X , te izračunajte njezino matematičko očekivanje i varijancu.

Zadatak 4.

Slučajna varijabla X zadana funkcijom gustoće

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

gdje je $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \langle 0, +\infty \rangle$, zove se NORMALNA SLUČAJNA VARIJABLA S PARAMETRIMA μ I σ^2 . Odredite matematičko očekivanje i varijancu slučajne varijable X .