Uvod u vjerojatnost i statistiku

Vježbe 12.

Definicija 1.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor pridružen slučajnom pokusu. Funkciju $(X_1, \ldots, X_n)$ koja svakom ishodu slučajnog pokusa pridružuje uređenu n-torku realnih brojeva $(x_1, \ldots, x_n)$ zovemo n-DIMENZIONALAN SLUČAJAN VEKTOR ako vrijedi:

$$\{X_1 \leq x_1\} \cap \ldots \cap \{X_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

za svaki $x_1 \in \mathbb{R}$, ..., $x_n \in \mathbb{R}$.

Napomena 1.

Dvodimenzionalan slučajan vektor - neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Analogno definiciji slučajne varijable možemo reći da je dvodimenzionalan slučajan vektor funkcija $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ takva da je za svaku točku $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ skup

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\} = A_{(x,y)} \in \mathcal{F}.$$

Definicija 2.

Slučajan vektor $\mathbb{X}$ je diskretnog tipa ako postoji konačan ili prebrojiv podskup D skupa $\mathbb{R}^n$ takav da je $P(\mathbb{X} \in D) = 1$. Odnosno, za slučajan vektor kažemo da je diskretan ako mu je slika $\mathcal{R}(\mathbb{X})$ diskretan skup.

Definicija 3.

Neka nam je zadan dvodimenzionalan slučajan vektor $\mathbb{Z} = (X, Y)$. Distribucije njegovih komponenti zadane su tablicama:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix} ; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Distrubucija vektora $\mathbb{Z}$ zadana je sa:

$$p_{i,j} = P\{\mathbb{Z} = (x_i, y_j)\} = P\{X = x_i, Y = y_j\},$$

$$p_{i,j} \geq 0, \sum_{i,j} p_{i,j} = 1.$$

Uz pretposatvku da imamo konačno mnogo vrijednosti x_i i y_j, tu distribuciju najčešće zapisujemo u obliku tablice distribucije:

$X \mid Y$	y_1	y_2	y_3	$\dots$	y_m	
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$\dots$	p_{1m}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$\dots$	p_{2m}	p_2
x_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}	$\dots$	p_{3m}	p_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	p_{n3}	$\dots$	p_{nm}	p_n
	q_1	q_2	q_3	$\dots$	q_m	

Napomena 2.

Iz distribucije slučajnog vektora $\mathbb{Z} = (X, Y)$ lako saznajemo distribucije slučajnih varijabli X i Y - to su rubne ili marginalne distribucije slučajnog vektora $\mathbb{Z}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ q_1 & q_2 & \dots & q_m \end{pmatrix}.$$

Definicija 4.

Uvjetna distribucija komponente X s obzirom na poznatu vrijednost komponente Y, tj. uz uvjet da je $Y = y_j$ dana je sljedećom tablicom:

$$X|_{Y=y_j} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1|_{Y=y_j} & p_2|_{Y=y_j} & \cdots \end{pmatrix},$$

gdje je

$$p_i|_{Y=y_j} = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{p_{ij}}{q_j}, \ \ i = 1, 2, \ldots$$

Definicija 5.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor pridružen slučajnom pokusu i $(X_1, \ldots, X_n)$ slučajan vektor. Funkciju $F\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ definiranu izrazom

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

zovemo FUNKCIJA DISTRIBUCIJE SLUČAJNOG VEKTORA $(X_1, \ldots, X_n)$.

Napomena 3.

Neka su X i Y diskretne slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sa distribucijama

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix}.$$

Slučajne varijable X i Y su nezavisne ako i samo ako vrijedi:

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j) = p_i \cdot q_j$$

za sve $i = 1, \ldots, n$ i za sve $j = 1, \ldots, m$.

Definicija 6.

Neka je $\mathbb{X} = (X_1, \dots, X_n)$ slučajan vektor na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ukoliko postoji očekivanje svake slučajne varijable X_i, tj. ukoliko je $E[|X_i|] < +\infty$ za svaki i, kažemo da postoji očekivanje slučajnog vektora $\mathbb{X}$ i pišemo:

$$E[\mathbb{X}] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ \vdots \\ E[X_n] \end{bmatrix}.$$

Teorem 1.

Ako su slučajne varijable X i Y nezavisne i ako postoje matematička očekivanja $E[X]$ i $E[Y]$, tada slučajna varijabla XY ima očekivanje i vrijedi:

$$E[XY] = E[X] \cdot E[Y].$$

Teorem 2.

Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable takve da postoji varijanca $\mathrm{Var}(X_k)$, $k = 1, \ldots, n$ i neka su $a_1, \ldots, a_n$ realni brojevi. Tada vrijedi:

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \mathrm{Var}(X_k).$$

Definicija 7.

Neka su X i Y slučajne varijable takve da postoje $E[X]$, $E[Y]$ i $E[XY]$. Tada kovarijancu slučajnih varijabli X i Y definiramo na sljedeći način:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E[(X - E[X])\,(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y].$$

Teorem 3.

Neka je (X,Y) diskretan dvodimenzionalan slučajan vektor za koji postoje $E[X]$ i $E[Y]$. Ako su slučajne varijable X i Y nezavisne onda je $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$.

Napomena 4.

Obrat ovog teorema općenito ne vrijedi, tj. ako je kovarijanca $\mathrm{Cov}(X, Y)$ jednaka nuli, to ne znači da su slučajne varijable X i Y nužno nezavisne.

Napomena 5.

Ako slučajan vektor ima kovarijancu različitu od nule, onda su njegove komponente nužno zavisne.

Definicija 8.

Neka je (X, Y) slučajan vektor za koji je $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Tada kažemo da su njegove komponente X i Y NEKORELIRANE.

Napomena 6.

Očito nezavisnost slučajnih varijabli povlači njihovu nekoreliranost. Obrat ove tvrdnje generalno ne vrijedi.

Definicija 9.

Broj

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X) \cdot \mathrm{Var}(Y)}}$$

nazivamo KOEFICIJENT KORELACIJE slučajnih varijabli X i Y. Pri tome, $\rho_{X,Y} \in [-1, 1]$.

Zadatak 1.

Slučajan pokus sastoji se od dva uzastopna bacanja simetričnog novčića. Neka je (X, Y) slučajan vektor gdje slučajna varijabla X označava broj glava, a slučajna varijabla Y broj pisama koja se realiziraju u ta dva bacanja. Odredite distribuciju i marginalne distribucije slučajnog vektora (X, Y), uvjetnu distribuciju slučajne varijable X uz uvjet $\{Y = 1\}$ te izračunajte koeficijent korelacije $\rho_{(X,Y)}$.

Zadatak 2.

Neka je (X, Y) slučajan vektor kod kojeg slučajna varijabla X predstavlja broj izlazaka trgovačkog putnika na teren, a slučajna varijabla Y broj prodanih proizvoda. Distribucija slučajnog vektora zadana je sljedećom tablicom:

Y/X	0	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	0	0	0	0
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	0	0
3	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	0
4	0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{128}$

a) Odredite marginalne distribucije slučajnog vektora (X, Y).
Rješenje:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{32} & \frac{33}{128} & \frac{15}{64} & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{32} & \frac{1}{128} \end{pmatrix};$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

b) Izračunajte $E[X]$, $E[Y]$ i $\rho_{X,Y}$.

Rješenje: $E[X] = \dfrac{327}{128}$, $E[Y] = \dfrac{21}{8}$, $\rho_{X,Y} = 0.579$.

c) Odredite vjerojatnost da je trgovački putnik prodao četiri knjige, ako je dva puta izašao na teren.
Rješenje: $P(Y = 4|X = 2) = \frac{1}{15}$.

Zadatak 3.

Bacamo dvije kocke. Neka je slučajna varijabla X manji, a varijabla Y veći od dva pojavljena broja. Odredi razdiobu vektora (X, Y), marginalne razdiobe, te uvjetnu razdiobu od X uz uvjet $Y = 4$. Izračunaj vjerojatnost događaja $A = (X \geq 2 | Y = 4)$ i $B = (Y = 4 | X \geq 2)$.

Zadatak 4.

Promotrimo slučajan pokus koji se sastoji od nezavisnog bacanja dvaju novčića tri puta za redom (misli se da su realizacije na novčićima pri jednom bacanju međusobno nezavisne). Novčić A je simetričan, odnosno $P_A(G) = P_A(P) = 0.5$, ali nočić B nije i vrijedi: $P_B(G) = 0.25$, $P_B(P) = 0.75$. Neka je (X, Y) slučajan vektor u kojem X predstavlja broj glava realiziranih bacanjem novčića A, a Y broj glava realiziranih bacanjem novčića B. Odredite distribuciju i marginalne distribucije slučajnog vektora (X, Y), uvjetnu distribuciju slučajne varijable X uz uvjet $\{Y = 2\}$ te izračunajte koeficijent korelacije $\rho_{X,Y}$.

Zadatak 5.

Slučajan vektor (X, Y) zadan je na sljedeći način:

$$P(X = x_i, Y = y_j) = \begin{cases} k(2x_i + y_j) & , \quad x_i = 1, 2; \;\; y_j = 1, 2 \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases}$$

Odredite numeričku vrijednost konstante k, marginalne distribucije slučajnog vektora (X, Y), te provjerite jesu li slučajne varijable X i Y nezavisne.

Zadatak 6.

Za slučajan vektor iz prethodnog zadatka odredite sljedeće uvjetne vjerojatnosti:

a) $P(Y = y_j \,|\, X = x_i)$
$P(X = x_i \,|\, Y = y_j)$

b) $P(Y = y_2 \,|\, X = x_2)$
$P(X = 2 \,|\, Y = 2)$

Zadatak 7.

Zadane su jednako distribuirane slučajne varijable $X_1, \ldots, X_n$ s matematičkim očekivanjem μ i varijancom σ^2. Izračunajte:

(a) $E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right]$,

(b) $E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2\right]$, gdje je $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$,

(c) uz pretpostavku da su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable, izračunajte $\mathrm{Var}\,\overline{X_n}$.