Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

grupa A

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa

1. [**10 bod**] Primjenom Arhimedovog aksioma dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\frac{n+3}{n+4} > 1 - \varepsilon.$$

2. Zadani su skupovi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$, na sljedeći način: skup S_1 jednak je 1-okolini broja 2 te skup $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : |3x-1| - x \leq 2\}$.

   a) [**5 bod**] Pomoću intervala napišite skupove S_1 i S_2.

   b) [**2 bod**] Odredite $S_1 \cup S_2$.

   c) Ako postoje, odredite:

   c1) [**2 bod**] $\inf(S_1 \cup S_2)$ c2) [**2 bod**] $\sup(S_1 \cup S_2)$

   c3) [**2 bod**] $\min(S_1 \cup S_2)$ c4) [**2 bod**] $\max(S_1 \cup S_2)$

3. [**10 bod**] Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza je 165. Ako je $a_1 = -10$, $a_4 = -1$, koliki je n?

4. [**15 bod**] Dokažite da je niz (a_n) zadan s $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{8}(a_{n-1}^2 + 15)$, $n \geq 2$, omeđen i monoton te mu odredite limes.

5. [**20 bod**] Neka je $a_n = \frac{2n-3}{5n-1}$. Odredite L takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Pokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$
Specijalno odredite $n_0(0.05)$.

6. Izračunajte limese sljedećih nizova:

   a)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}-2}{2n+\sqrt{n}-3}$ b)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+\sin n}{5-2n^2}$

   c)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^3+4} - \sqrt{n^3})$ d)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$

   e)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3}{2n^2+5}\right)^{3n^2+4}$ f)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{11^n - 4\cdot 3^n}{7\cdot 11^n - 3^{n+1}}$.

grupa B

Prvi kolokvij iz Diferencijalnog računa

1. [**10 bod**] Primjenom Arhimedovog aksioma dokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\frac{n+4}{n+5} > 1 - \varepsilon.$$

2. Zadani su skupovi $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}$, na sljedeći način: skup S_1 jednak je 1-okolini broja 2 te skup $S_2 = \{x \in \mathbb{R} : |5x - 1| - x \leq 3\}$.
   a) [**5 bod**] Pomoću intervala napišite skupove S_1 i S_2.
   b) [**2 bod**] Odredite $S_1 \cup S_2$.
   c) Ako postoje, odredite:
      c1) [**2 bod**] $\inf(S_1 \cup S_2)$ c2) [**2 bod**] $\sup(S_1 \cup S_2)$
      c3) [**2 bod**] $\min(S_1 \cup S_2)$ c4) [**2 bod**] $\max(S_1 \cup S_2)$

3. [**10 bod**] Zbroj prvih n članova geometrijskog niza je 341. Ako je $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_4 = \frac{8}{3}$, koliki je n?

4. [**15 bod**] Dokažite da je niz (a_n) zadan s $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{6}(a_{n-1}^2 + 8)$, $n \geq 2$, omeđen i monoton te mu odredite limes.

5. [**20 bod**] Neka je $a_n = \frac{3n-3}{8n-1}$. Odredite L takav da je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Pokažite da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ takav da je
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon.$$
   Specijalno odredite $n_0(0.05)$.

6. Izračunajte limese sljedećih nizova:

   a)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2} - 1}{3n - \sqrt{n} + 2}$ b)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2 + \cos n}{4 - 3n^2}$

   c)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^5 + 3} - \sqrt{n^5})$ d)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+3)! + (2n+4)!}{(2n+5)!}$

   e)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+2}{3n^2+5}\right)^{2n^2+4}$ f)[**5 bod**] $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12^n - 4 \cdot 5^n}{3 \cdot 12^n - 5^{n+1}}$.