NAPOMENA
Radi jednostavnosti prikaza kod slika nekih ploha nisu naznačene točno koordinatne osi već samo smjerovi u kojima idu.

1 Valjkaste (cilindrične) plohe

a) Izvodnica je paralelna s osi OZ i prolazi kroz krivulju

$$F(x, y) = 0, \ z = 0$$

Tada je jednadžba plohe općenito dana sa $F(x, y) = 0$. (nedostaje z)

b) Izvodnica je paralelna sa osi OX i prolazi kroz krivulju

$$F(y, z) = 0, \ x = 0$$

Tada je jednadžba plohe općenito dana sa $F(y, z) = 0$ (nedostaje x)

c) Izvodnica je paralelna sa osi OY i prolazi kroz krivulju

$$F(x, z) = 0, \ y = 0$$

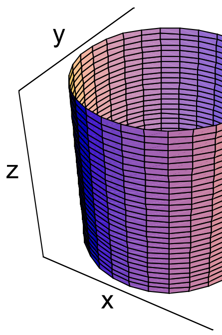
Tada je jednadžba plohe općenito dana sa $F(x, z) = 0$ (nedostaje y)

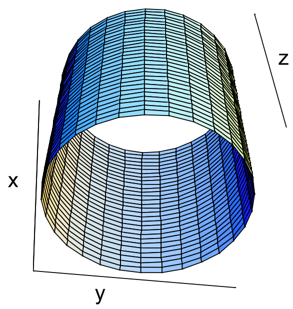
PRIMJERI

1.KRUŽNI VALJAK

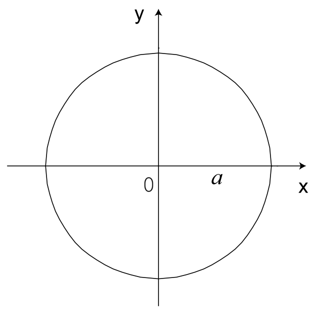
$$x^2 + y^2 = a^2$$

(primijetimo da u jednadžbi nema varijable z, pa je to a) slučaj)





U presjeku sa bilo kojom ravninom paralelnoj ravnini $z = 0$ imamo kružnicu polumjera a



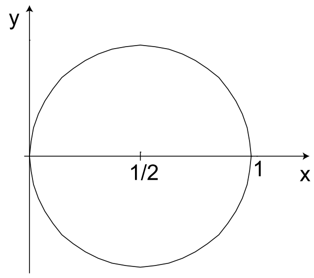
2. KRUŽNI VALJAK

$$x^2 + y^2 = x$$

Ovu jednadžbu možemo zapisati i u obliku

$$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

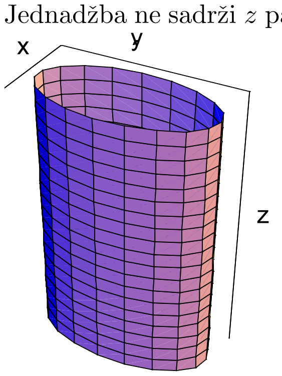
Izgled ove plohe isti je kao u prethodnom slučaju, samo što je ona pomaknuta u koordinatnom sustavu po x osi za vrijednost $\frac{1}{2}$. Presjek sa bilo kojom ravninom oblika $z = c$ je kružnica polumjera $\frac{1}{2}$ sa središtem u točki $(\frac{1}{2}, 0, c)$

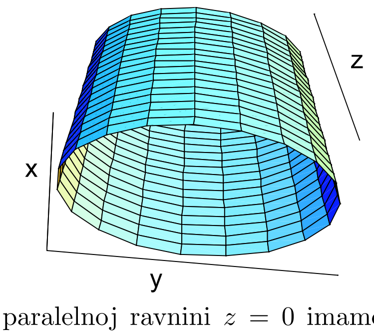


3. ELIPTIČKI VALJAK

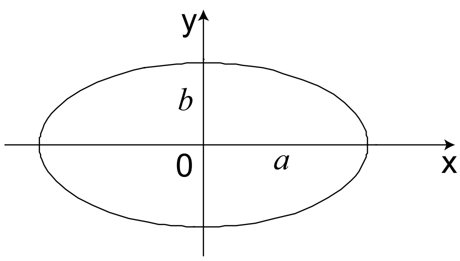
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Jednadžba ne sadrži z pa je ovo opet slučaj a) tj. izvodnice su paralelne osi OZ.





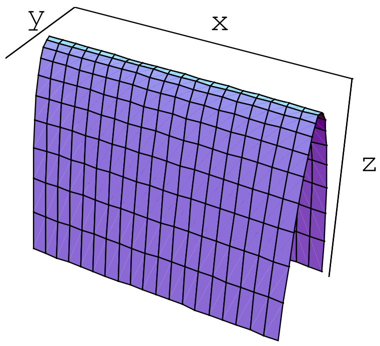
U presjeku sa bilo kojom ravninom paralelnoj ravnini $z = 0$ imamo elipsu s poluosima a i b.

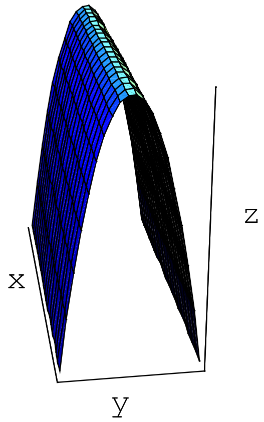


3. PARABOLIČKI VALJAK

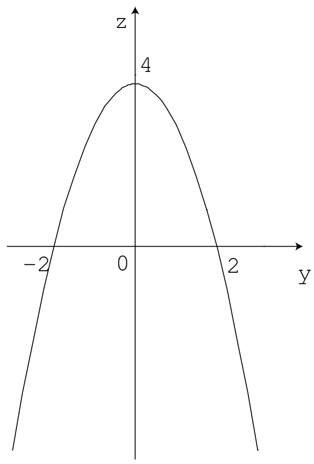
$$z + y^2 = 4$$

Jednadžba ne sadrži x pa je ovo slučaj b) tj. izvodnice cu paralelne osi OX.





U presjeku sa bilo kojom ravninom paralelnoj ravnini $x = 0$ imamo parabolu $z = -y^2 + 4$



2 Stožaste(konusne) plohe (s vrhom u ishodištu)

a) Želimo pronaći jednadžbu stožaste plohe čije izvodnice(pravci) prolaze kroz ishodište koordinatnog sustava i kroz točke krivulje

$$F(x,y)=0, \quad z=1$$

Na toj krivulji odaberimo proizvoljnu točku $T_0(x_0,y_0,1)$. Jednadžba izvodnice (pravca) kroz točke $O(0,0,0)$ i $T_0(x_0,y_0,1)$ glasi

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{1}$$

Dakle vrijedi:

$x=zx_0 \;\Rightarrow\; x_0=\dfrac{x}{z}$

$y=zy_0 \;\Rightarrow\; y_0=\dfrac{y}{z}$

Kako točka $T_0(x_0,y_0,1)$ leži na krivulji mora vrijediti $F(x_0,y_0)=0$ pa dobivamo opći oblik jednadžbe stožaste plohe

$$F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$$

b) Jednadžba stožaste plohe čije izvodnice prolaze kroz i ishodište i kroz točke krivulje

$$F(x,z)=0,\ y=1$$

je općenito dana sa

$$F\left(\frac{x}{y},\frac{z}{y}\right)=0$$

c) Jednadžba stožaste plohe čije izvodnice prolaze kroz i ishodište i kroz točke krivulje

$$F(y,z)=0,\ x=1$$

je općenito dana sa

$$F\left(\frac{y}{x},\frac{z}{x}\right)=0$$

PRIMJERI

1. KRUŽNI STOŽAC

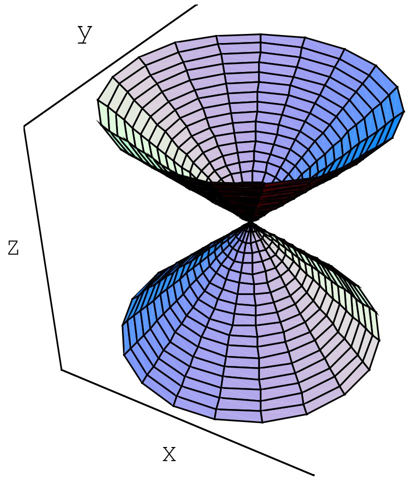
$$z^2=a^2(x^2+y^2)$$

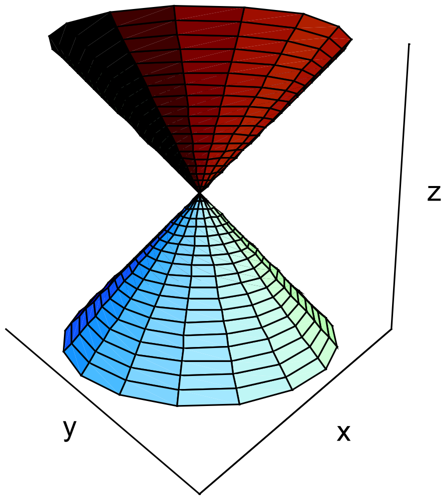
Korjenovanjem gornje jednadžbe dobivamo

$$z=\pm a\sqrt{x^2+y^2}$$

U presjeku s ravninama $z=\pm a$ je kružnica

$$x^2+y^2=1$$





Jenadžba za dio kružnog stošca koji se nalazi iznad ravnine $z = 0$ je

$$z = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

a za dio kružnog stošca koji se nalazi ispod ravnine $z = 0$ je

$$z = -a\sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.ELIPTIČKI STOŽAC

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Korjenovanjem gornje jednadžbe dobivamo

$$z = \pm c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

U presjeku s ravninama

$$z = \pm c$$

imamo elipsu

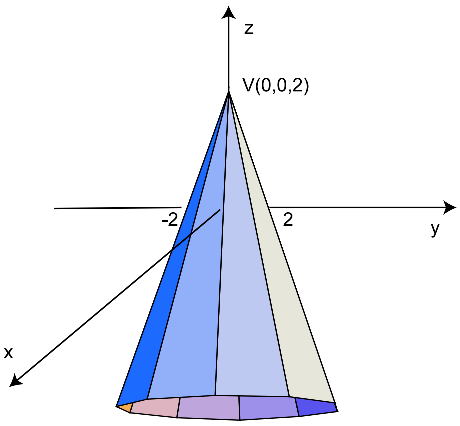
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Općenito presjeku sa bilo kojom ravninom $z = \pm K,\ K \neq 0$ imamo elipsu oblika

$$\frac{x^2}{\frac{K^2a^2}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{K^2b^2}{c^2}} = 1$$

3. KRUŽNI STOŽAC

$$z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$$


z
V(0,0,2)
-2
2
y
x

3 Rotacijske plohe

a)Jednadžba rotacijske plohe koja nastaje rotacijom krivulje $z = f(y)$ oko osi OZ.
Neka je $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ udaljenost proizvoljne točke $T(x, y, z)$ rotacione plohe od osi OZ. Tada je jednadžba rotacijske plohe kojoj je os OZ os rotacije dana sa

$$z = f(\rho) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

ili općenito sa

$$F(z, x^2 + y^2) = 0$$

b) Jednadžba plohe koja nastaje rotacijom krivulje x=f(z) (ili $f(y)$) oko osi OX je dana sa

$$x = f(\rho) = f(\sqrt{y^2 + z^2})$$

ili općenito sa

$$F(x, y^2 + z^2) = 0$$

c) Jednadžba plohe koja nastaje rotacijom krivulje y=f(x) (ili $f(z)$)oko osi OX je dana sa

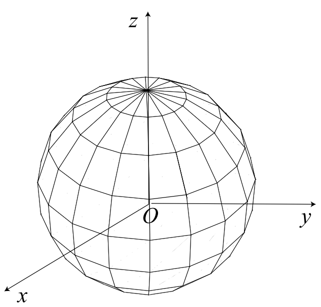
$$x = f(\rho) = f(\sqrt{x^2 + z^2})$$

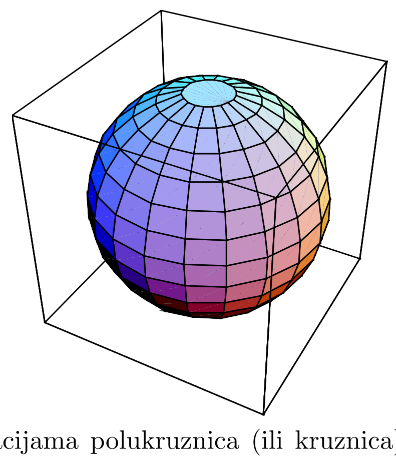
ili općenito sa

$$F(y, x^2 + z^2) = 0$$

PRIMJERI
1. SFERA ili kuglina ploha

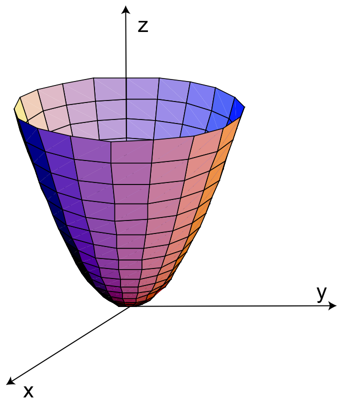
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$





Primijetimo da sfera moze nastati rotacijama polukruznica (ili kruznica) oko sve tri osi
2. ROTACIJSKI PARABOLOID

$$z = a(x^2 + y^2) \; a > 0$$

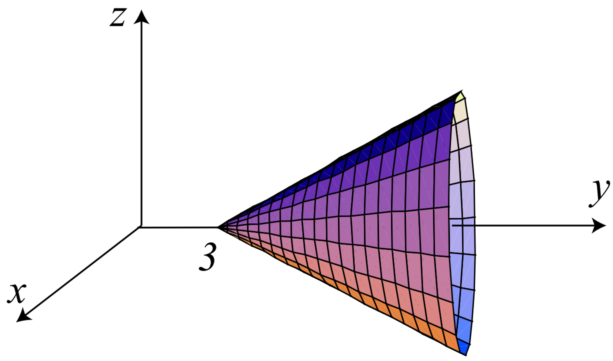


Ova ploha nastaje rotacijom krivulje $z = ay^2$ (ili rotacijom $z = ax^2$) oko osi OZ.

3. ROTACIJSKI (KRUŽNI) STOŽAC

$$y - 3 = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Ova rotacijska ploha nastaje rotacijom pravca $y = 3 + x,\ x \geq 0$ oko osi OY.



4 Jednadžbe nekih ploha

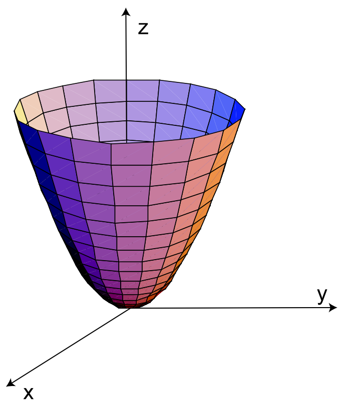
a) ELIPTIČKI PARABOLOID

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

U presjeku sa ravninom $x = 0$ i sa bilo kojom njoj paralelnom ravninom imamo parabolu (za $x = 0$ to je parabola $z = \frac{y^2}{b^2}$).

U presjeku s ravninom $y = 0$ i sa bilo kojom njoj paralelnom ravninom imamo parabolu (za $y = 0$ ta je parabola jednaka $z = \frac{x^2}{a^2}$).

U presjeku za bilo kojom ravninom oblika $z = c,\ c > 0$ je elipsa (posebno, za $z = 1$ to je elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$).



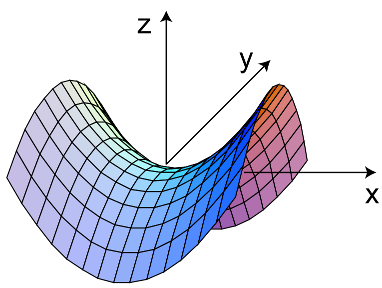
b) HIPERBLIČKI PARABOLOID(ili sedlasta ploha)

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

U presjeku s ravninama oblika $y = c$ su parabole $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2}$. U presjeku s ravninama $x = c$ su parabole $z = \frac{c^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$. U preskjeku s ravninama $z = c$ su hiperbole oblika $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c\ c > 0$ i $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = -c\ c < 0$.

Primjer 1.

$$x^2 - y^2 = 1$$



Primjer 2.

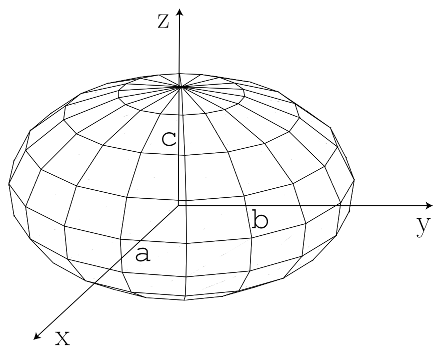
$$z = xy$$

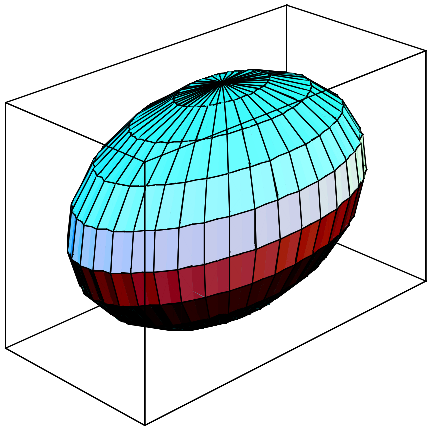
Ovo je također jednadžba hiperboličkog paraboloida. To je ploha iz primjera 1, samo zarotirana za 45^o. (znamo da je npr. hiperbola $xy = 1$ zarotirana hiperbola $x^2 - y^2 = 1$ za kut od 45^o)

c) ELIPSOID(troosi)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Ako je $a > b > c > 0$ tada kažemo da je a velika poluos, b srednja poluos i c mala poluos elipsoida.
Ako su dvije poluosi jednake, npr. $a > b = c > 0$ tada dobijemo tzv. *rotacijski elipsoid*.
Ako su sve tri poluosi jednake dobivamo sferu ili kuglinu plohu.





d) JEDNOPLOŠNI TROOSI HIPERBOLOID

Ako u jednadžbi troosog elipsoida na lijevoj strani stavimo bilo gdje samo jedan predznak minus(-) dobivamo jednadžbu jednoplošnog troosog hiperboloida. Ako je $a = b$ dobivamo *jednoplošni rotacijski hiperboloid*.

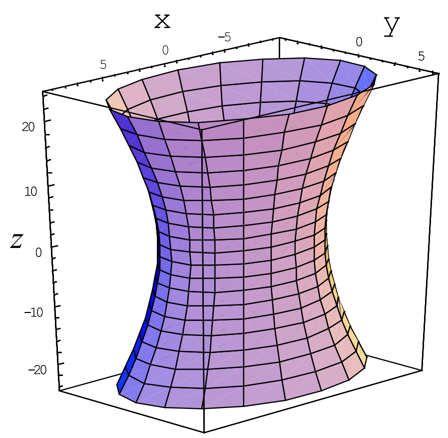
Primjer

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Primjetimo da u presjeku s ravninama $z = c$ imamo elipsu s (posebno za z=0 to je elipsa s poluosima a i b). U presjeku s ravninom $x = 0$ imamo hiperbolu, te u presjeku s ravninom $y = 0$ imamo hiperbolu.

Primjer

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{400} = 1$$



e) DVOPLOŠNI TROOSI HIPERBOLOID Ako u jednadžbi troosog elipsoida na lijevoj strani stavimo bilo gdje dva predznake minus(-) dobivamo jednadžbu dvoplošnog troosog hiperboloida.
Primjer:

$$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

U presjeku sa ravninama oblika $x = K$ imamo hiperbolu, u presjeku sa ravninama oblika $y = K$ imamo hiperbolu i u presjeku sa ravninama oblika $z = \pm K,\ K > c$ imamo elipsu.