



---

## Zadatci

---

### Zadatak 1.

a) [5 bod.] Neka je  $n$  četveroznamenasti prirodni broj. Dokažite da je razlika broja  $n$  i zbroja njegovih znamenki uvijek djeljiva s 9.

b) [5 bod.] Dokažite da za sve realne brojeve  $a, b, c$  vrijedi

$$|a + b + c| \geq |a| - (|b| + |c|).$$

### Zadatak 2.

Zadan je skup  $S = \left\{ \frac{3n+1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

a) [10 bod.] Dokažite da je  $S$  odozgo omeđen skup.

b) [10 bod.] Bez primjene limesa, odredite  $\inf S$  i  $\sup S$ .

c) [10 bod.] Dokažite da vrijedi:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow \frac{3n+1}{2n+1} > \frac{3}{2} - \varepsilon.$$

### Zadatak 3. [10 bod.]

Odredite polinom  $f$  drugog stupnja kojemu je broj  $-3$  dvostruka nultočka i vrijedi  $f(1) - 3 \cdot f(-5) = 8$ .

### Zadatak 4. Dokažite ili opovrgnite sljedeće tvrdnje:

a) [3 bod.] Postoji niz realnih brojeva  $(a_n)$  koji nije omeđen i ima jedno gomilište.

b) [2 bod.] Monoton niz realnih brojeva  $(a_n)$  je i konvergentan.

c) [2 bod.] Ako podniz niza realnih brojeva  $(a_n)$  konvergira realnom broju  $a$ , onda i niz  $(a_n)$  također konvergira tom istom broju  $a$ .

d) [3 bod.] Svaki omeđen niz realnih brojeva  $(a_n)$  je i konvergentan.

### Zadatak 5.

Izračunajte sljedeće limese:

a) [10 bod]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n - n^2 + 3},$

b) [10 bod]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n+1) \cos(n^3 + 3n)}{n^2 + 1},$

c) [10 bod]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}}{\frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^n}},$

d) [10 bod]  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3 - 4}{n^3 + 6} \right)^{n^3 + 1}.$