1. kolokvij iz Realne analize
8.11.2019., Grupa A

1. [**20 bod.**] Neka je X realan vektorski prostor s normom $\|\cdot\|$ koja zadovoljava jednakost paralelograma. Dokažite da postoji skalarni produkt na X koji inducira normu $\|\cdot\|$, tj. takav da vrijedi
$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}.$$
2. [**20 bod.**] Pokažite da je formulom
$$\rho(x,y) = \left|\frac{x}{1+\sqrt{7+x^2}} - \frac{y}{1+\sqrt{7+y^2}}\right|,\ x,y \in \mathbb{R}$$
zadana metrika na $\mathbb{R}$.
3. [**20 bod.**] Dokažite da je skup $U \subseteq X$ iz metričkog prostora (X,d) otvoren onda i samo onda ako se može prikazati kao unija neke familije otvorenih kugli.
4. [**20 bod.**] Neka je X topološki prostor, a $D \subseteq X$ proizvoljan podskup. Dokažite da je
$$X \backslash \mathrm{Cl}\, D = \mathrm{Int}\,(X \backslash D).$$
5. [**20 bod.**] Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor, $A \subseteq X$ i $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$. Dokažite da je $A \cap O \neq \emptyset$ za svaku okolinu O točke x_0.

1. kolokvij iz Realne analize
8.11.2019., Grupa B

1. [**20 bod.**] Dokažite da u svakom unitarnom vektorskom prostoru $(X,+,\cdot)$ vrijedi Schwarzova nejednakost:
$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|,\ x,y \in X.$$
2. [**20 bod.**] Pokažite da je formulom
$$\rho(x,y) = \left|\frac{3x}{1+\sqrt{1+x^2}} - \frac{3y}{1+\sqrt{1+y^2}}\right|,\ x,y \in \mathbb{R}$$
zadana metrika na $\mathbb{R}$.
3. [**20 bod.**] Dokažite da otvorena kugla $K(x_0,r)$ iz metričkog prostora (X,d) otvoren skup.
4. [**20 bod.**] Neka je X topološki prostor, a $D \subseteq X$ proizvoljan podskup. Dokažite da je
$$X \backslash \mathrm{Int}\, D = \mathrm{Cl}\,(X \backslash D).$$
5. [**20 bod.**] Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Dokažite sljedeću tvrdnju: Ako je $A \cap O \neq \emptyset$ za svaku okolinu O točke x_0, onda je $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$.