3. kolokvij iz Realne analize
20.1.2020., grupa A

1. [**20 bod.**] Neka su X i Y topološki prostori, a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Dokažite da su originali otvorenih skupova otvoreni, tj.

$$V \text{ otvoren u } Y \implies f^{-1}(V) \text{ otvoren u } X.$$

2. [**20 bod.**] Neka je $(X, +, \cdot)$ realan vektorski prostor. Pokazati da je norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje.
3. [**5 bod.**] Pokažite da se funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, zadana s $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, ne može neprekidno proširiti do funkcije definirane na cijelom skupu $\mathbb{R}$.
4. [**10 bod.**] Pokažite da svaka neprekidna funkcija $g : [a, b] \to [a, b]$ ima fiksnu točku.
5. [**10 bod.**] Pokažite da uniformno neprekidno preslikavanje *čuva* Cauchyjeve nizove.
6. [**5 bod.**] Pokažite da je funkcija $f(x) = \sin(3x)$, $x \in \mathbb{R}$ Lipschitzova s konstantom $\lambda = 3$.
7. [**10 bod.**] Dokažite da je skup $[a, b)$ povezan.
8. [**20 bod.**] Neka su X i Y topološki prostori, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Dokažite da je slika $f(K)$ kompaktan skup u Y.

3. kolokvij iz Realne analize
20.1.2020., grupa B

1. [**20 bod.**] Neka su X i Y topološki prostori, a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Dokažite da su originali zatvorenih skupova zatvoreni, tj.

$$F \text{ zatvoren u } Y \implies f^{-1}(F) \text{ zatvoren u } X.$$

2. [**5 bod.**] Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \le y \\ 1, & \text{za } x > y \end{cases}.$$

   Pokažite da su točke koje leže na pravcu $x = y$ točke prekida funkcije f.
3. [**10 bod.**] Pokažite da svaka neprekidna funkcija $f : [c, d] \to [c, d]$ ima fiksnu točku.
4. [**10 bod.**] Pokažite da *biti Cauchyjev niz* nije topološko svojstvo.
5. [**5 bod.**] Pokažite da je funkcija $f(x) = \sin(4x)$, $x \in \mathbb{R}$ Lipschitzova s konstantom $\lambda = 4$.
6. [**10 bod.**] Dokažite da je skup $[a, b)$ povezan.
7. [**20 bod.**] Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokazati da je $f([a, b])$ segment.
8. [**20 bod.**] Neka su X i Y topološki prostori, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Dokažite da je slika $f(K)$ skupa K kompaktan skup.