

Pismeni ispit iz kolegija  
Realna analiza  
02.09.2021.

1. Dokažite ili opovrgnite:

- (a) [5 bod.] Norme  $\|\cdot\|_1$  i  $\|\cdot\|_2$  na  $\mathbb{R}^n$  su ekvivalentne.
- (b) [10 bod.] Norme  $\|\cdot\|_1$  i  $\|\cdot\|_2$  zadovoljavaju jednakost paralelograma.

2. (a) [10 bod.] Ispitajte je li formulom

$$\rho(x, y) = \frac{|x - y|}{|x - y| + 7}$$

zadana metrika na  $\mathbb{R}$ .

- (b) [5 bod.] Neka su  $x, y, u, z$  točke iz metričkog prostora  $(X, d)$ . Dokažite:

$$|d(x, z) - d(y, u)| \leq d(x, y) + d(z, u).$$

3. Dokažite:

- (a) [5 bod.]  $X \setminus \text{Cl}(X \setminus B) = \text{Int } B$ .
  - (b) [5 bod.]  $A \setminus \partial A = \text{Int } A$ .
4. (a) [5 bod.] Neka je  $(\mathbf{x}_k)$  niz u  $\mathbb{R}^n$  takav da je  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k\| = 0$ . Pokažite da je tada  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ .
- (b) [10 bod.] Neka je na  $\mathbb{R}$  zadana topologija  $\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ . Je li niz  $(x_k)$ ,  $x_k = k$ , konvergentan, te ako jest, je li njegov limes jedinstven?
5. [10 bod.] Neka je  $(x_k)$  Cauchyjev niz u metričkom prostoru  $(X, d)$ . Dokažite da za svaki niz  $(\varepsilon_k)$  pozitivnih realnih brojeva postoji podniz  $(\varepsilon_{u_k})$  takav da je

$$d(x_{u_{k+1}}, x_{u_k}) < \varepsilon_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

6. Dokažite ili opovrgnite:

- (a) [10 bod.] Ako je  $C$  omeđen i zatvoren skup iz metričkog prostora  $(X, d)$ , onda je on i kompaktan.
- (b) [5 bod.] Neka je  $X$  diskretan, a  $Y$  proizvoljan topološki prostor. Svako preslikavanje  $f : X \rightarrow Y$  je neprekidno na  $X$ .
- (c) [10 bod.] Neka je  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zadana formulom  $g(x) = x^{-2}$ . Funkcija  $g$  je uniformno neprekidna na  $(0, 3)$ . Dokažite pomoćne tvrdnje koje koristite.
- (d) [10 bod.] Svaka neprekidna funkcija  $g : [c, d] \rightarrow [c, d]$  ima fiksnu točku.