Pismeni ispit iz kolegija
Realna analiza
16.02.2021.

1. **[10 bod.]** Neka je $(\mathbb{R}, d)$ metrički prostor, gdje je $d(x,y) = |x-y|$. Pokažite da je formulom
$$\rho\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = \sqrt{d(x_1,x_2)} + \sqrt{d(y_1,y_2)}$$
zadana metrika na $\mathbb{R}^2$.

2. **[10 bod.]** Dokažite da za proizvoljan skup A u metričkom prostoru vrijedi $\operatorname{diam}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{diam} A$.

3. (a) **[5 bod.]** Neka je na $X = \{a,b,c\}$ zadana topologija $\mathcal{U} = \{\emptyset, X, \{a,b\}\}$. Je li točka b gomilište niza $a,c,a,c,a,c,\dots$ u toj topologiji? A je li točka b limes tog niza u diskretnoj topologiji na istom skupu X?
   (b) **[10 bod.]** Pokažite da Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove ne vrijedi u prostoru $\mathbb{R}^n$ s diskretnom topologijom.

4. **[5 bod.]** Neka je $s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ k–ta parcijalna suma harmonijskog reda. Pokažite da (s_k) nije Cauchyjev niz, što će značiti da harmonijski red ne konvergira.

5. **[10 bod.]** Neka je (X,d) potpun metrički prostor. Pretpostavimo da je (B_k) silazan niz zatvorenih podskupova od X tako da je $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} B_k = 0$. Dokažite da je $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k \neq \emptyset$.

6. Dokažite ili opovrgnite:
   (a) **[5 bod.]** Neka je X topološki prostor i neka su B i C kompaktni podskupovi od X. Tada je i skup $B \cup C$ kompaktan.
   (b) **[10 bod.]** Ako je C omeđen i zatvoren skup iz metričkog prostora (X,d), onda je on i kompaktan.

7. **[10 bod.]** Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ topoloških prostora otvoreno ako je slika otvorenog skupa otvoren skup. Dokažite da je f homeomorfizam onda i samo onda ako je f neprekidno i otvoreno bijektivno preslikavanje.

8. **[5 bod.]** Dokažite ili opovrgnite: Svaka neprekidna funkcija $g : [c,d] \to [c,d]$ ima fiksnu točku.

9. **[10 bod.]** Neka je $f : X \to Y$ Lipschitzovo preslikavanje metričkih prostora. Dokažite da je tada f uniformno neprekidno preslikavanje.

10. **[10 bod.]** Dokažite da neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ne može biti injekcija.