Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku

Materijali iz Funkcija više varijabli
Ekstremi funkcija više varijabli

Definicija 1 *Funkcija $u = f(x_1, \dots, x_n)$ u točki $T(a_1, \dots, a_n)$ ima*
a) lokalni minimum $f(a_1, \dots, a_n)$ ako za svaku točku $T'(a_1 + dx_1, \dots, a_n + dx_n)$, $T' \neq T$ iz dovoljno male okoline točke T vrijedi nejednakost

$$f(T') > f(T),$$

tj. kada je totalni prirast funkcije f u točki T, $\Delta f = f(T') - f(T) > 0$.
b) lokalni maksimum $f(a_1, \dots, a_n)$ ako za svaku točku $T'(a_1 + dx_1, \dots, a_n + dx_n)$, $T' \neq T$ iz dovoljno male okoline točke T vrijedi nejednakost

$$f(T') < f(T),$$

tj. kada je totalni prirast funkcije f u točki T, $\Delta f = f(T') - f(T) < 0$.
c) nema ekstrema ako Δf mijenja predznak u točki T.

NUŽAN UVJET POSTOJANJA EKSTREMA
Ako diferencijabilna funkcija $u = f(x_1, \dots, x_n)$ ima ekstrem u točki T, tada nužno vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(T) = 0, \quad , \frac{\partial f}{\partial x_2}(T) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(T) = 0, \tag{1}$$

što je pak ekvivalentno sa $df(x_1, \dots, x_n)(T) = 0$.
Rješavanjem sustava jednadžbi (1) dobivamo točke $T_1, T_2, \dots, T_n$ koje zovemo *stacionarnim točkama*. One su kandidati za točke ekstrema.

DOVOLJNI UVJETI EKSTREMA
Prvi način. Neka je $T(a_1, \dots, a_n)$ stacionarna točka funkcije $u = f(x_1, \dots, x_n)$, tj. $df(x_1, \dots, x_n)(T) = 0$. Ako u nekoj dovoljno maloj okoliko točke T vrijedi

(1) $d^2f(a_1, \dots, a_n) > 0$ za $(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 > 0$, tada funkcija f ima minimum u točki T.

(2) $d^2f(a_1, \dots, a_n) < 0$ za $(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 > 0$, tada funkcija f ima maksimum u točki T.

(3) $d^2f(a_1, \dots, a_n)$ mijenja predznak za $(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 > 0$, tada funkcija f nema ekstrem u točki T.

(4) $d^2f(a_1, \dots, a_n) \geq 0$ ili $d^2f(a_1, \dots, a_n) \leq 0$ za $(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 > 0$, tj. kada za neku kombinaciju diferencijala $d^2f(a_1, \dots, a_n)$ može biti jednak nuli, tada nema odluke (moramo dodatno ispitati ekstreme).

(5) ako u točki T vrijedi $df(a_1, \dots, a_n) = 0$,$d^2f(a_1, \dots, a_n) = 0, \dots, d^{n-1}f(a_1, \dots, a_n) = 0$, $d^nf(a_1, \dots, a_n) \neq 0$, tada:
   - za n neparan, T nije točka ekstrema
   - za n paran, T je točka ekstrema i to :
     (i) T je točka minimuma ako je $d^nf(a_1, \dots, a_n) > 0$
     (ii) T je točka maksimuma ako je $d^nf(a_1, \dots, a_n) < 0$

(6) ako je $d^2f(a_1, \dots, a_n) = 0$ za $(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 > 0$, tada nema odluke.

Drugi način. Neka je $T(a_1, \dots, a_n)$ stacionarna točka funkcije $u = f(x_1, \dots, x_n)$. Pridružimo drugom diferencijalu funkcije računatom u točki T matricu

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(T), \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Tada vrijede sljedeće tvrdnje (**Silvesterov kriterij**):

(1) $d^2f(a_1,\dots,a_n)>0$ za $(dx_1)^2+\cdots+(dx_n)^2>0$ ako i samo ako je

$$a_{11}>0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}>0,\quad \dots,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0$$

i tada je minimum funkcije f u točki $T(a_1,\dots,a_n)$.

(2) $d^2f(a_1,\dots,a_n)<0$ za $(dx_1)^2+\cdots+(dx_n)^2>0$ ako i samo ako je

$$a_{11}<0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}<0,\quad \dots,\quad (-1)^n\begin{vmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0$$

i tada je maksimum funkcije f u točki $T(a_1,\dots,a_n)$.

(3) $d^2f(a_1,\dots,a_n)$ mijenja predznak za $(dx_1)^2+\cdots+(dx_n)^2>0$ ako su sve determinante različite od nule i ne pojavljuje se slučaj (1) ili (2) tada funkcija nema ekstrema u točki T.

(4) ako je neka od neka od determinanti jednaka nuli, tada nema odluke.

Materijali iz Funkcija više varijabli
Uvjetni ekstremi funkcija više varijabli

Uvjetnim ekstremom funkcije $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ nazivamo maksimum ili minimum te funkcije dostignut pod uvjetom da su varijable $x_1, \ldots, x_n$ funkcije f povezane jednadžbama $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, $i = 1, \ldots, m$, $m < n$.
Traženje uvjetnog ekstrema svodi se na traženje običnog ekstrema funkcije F (tzv. **Lagrangeove funkcije**),

$$F(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + \lambda_m \varphi_m(x_1, \ldots, x_n),$$

gdje su λ_i, $i = 1, \ldots, m$ konstantni faktori.

NUŽNI UVJETI EKSTREMA

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} &= 0 \\
&\vdots \\
\frac{\partial F}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} &= 0 \\
\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) &= 0 \\
&\vdots \\
\varphi_m(x_1, \ldots, x_n) &= 0.
\end{aligned}$$

Ako je $(x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ jedno rješenje gornjeg sustava, tada funkcija f može imati ekstrem $f(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ u točki $T(x_1^*, \ldots, x_n^*)$.

DOVOLJNI UVJETI EKSTREMA

Postojanje i karakter uvjetnog ekstrema istražujemo na osnovu predznaka drugog diferencijala Lagrangeove funkcije.

$$d^2F(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n)^2 F(x_1, \ldots, x_n)$$

za vrijednosti $(x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$ pod uvjetom da su $dx_1, \ldots, dx_n$ vezani jednadžbama

$$\begin{aligned}
d\varphi_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} dx_n = 0 \\
&\vdots \\
d\varphi_m &= \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} dx_n = 0
\end{aligned}$$

Iz posljednjih m jednadžbi možemo izračunati m diferencijala dx_i, $i = 1, \ldots, m$ kao funkcije od preostalih $n-m$ diferencijala $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ te ih uvrstiti u drugi diferencijal funkcije F. Time se broj diferencijala u d^2F smanji i tada ispitujemo predznak od d^2F za $(x_1^*, \ldots, x_n^*, \lambda_1^*, \ldots, \lambda_m^*)$.
Ako je

(a) $d^2F(x_1^*, \ldots, x_n^*) < 0$, funkcija f ima uvjetni maksimum u $T(x_1^*, \ldots, x_n^*)$.

(b) $d^2F(x_1^*, \ldots, x_n^*) > 0$, funkcija f ima uvjetni minimum u $T(x_1^*, \ldots, x_n^*)$.

(c) $d^2F(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ mijenja predznak , funkcija f nema ekstrem u $T(x_1^*, \ldots, x_n^*)$.

(d) $d^2F(x_1^*, \ldots, x_n^*) \leq 0$ ili $d^2F(x_1^*, \ldots, x_n^*) \geq 0$, tada nema odluke.