



## Pravila

Kolokvij se piše 90 min te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Pored zadatka je dani broj bodova koje nose. Rezultati kolokvija bit će objavljeni na web stranici kolegija.

---

### Zadatak 1 (10+10)

- a) Fotografija se dimenzije  $m \times n$  unutar računala može pohraniti kao matrica  $A = [a_{ij}]$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ , gdje je  $a_{ij}$  uređena trojka  $(x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ ,  $x_{ij} \in \{0, 1, \dots, 255\}$ ,  $y_{ij} \in \{0, 1, \dots, 255\}$ ,  $z_{ij} \in \{0, 1, \dots, 255\}$  i ta uređena trojka označava boju svakog piksela fotografije u tzv. RGB (red, green, blue) obliku. Koliki je broj svih mogućih fotografija dimenzija  $m \times n$  pohranjenih na ovakav način?
- b) Broj  $r$ -permutacija  $n$ -članog skupa jednak je  $n^r = n(n-1) \dots (n-r+1)$ . Dokažite!

### Zadatak 2 (20)

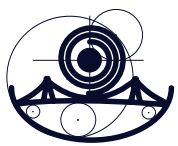
Marko je na papir napisao 21 različit prirodan broj iz skupa  $\{1, 2, \dots, 100\}$ . Pokažite da postoje barem dva para tih brojeva čiji je zbroj isti.

### Zadatak 3 (20)

Registracijska oznake neke male države sastoji se od znakova  $A, B, 1, 2$  i duljine je 4. Budući da ta država nema mnogo stanovnika, a i radi zaštite netaknute prirode, zakonodavci su odlučili da će sve registarske oznake biti načinjene iz multiskupa  $M = \{4 \cdot B, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2, 1 \cdot A\}$ . Koliko će registarskih oznaka biti načinjeno?

### Zadatak 4 (20)

Hrvatski košarkaški savez na proenstvo šalje reprezentaciju sastavljenu od 12 košarkaša. Tih 12 košarkaša dolaze iz 4 kluba: KK Osijek, KK Zagreb, KK Rijeka i KK Split. Svaki od ta 4 kluba ima barem 1 reprezentativca, no niti jedan od klubova nema više od 6 reprezentativaca. Koliko je mogućih raspodjela reprezentativaca među ta 4 kluba?



**Zadatak 5 (15+5)**

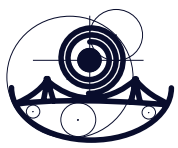
a) Pokažite da vrijedi:

$$2^{n-2} \cdot n \cdot (n-1) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1)$$

b) Neka je dan izraz:

$$(x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4)^8.$$

Koliki je koeficijent uz  $x_1^2 x_2^2 x_4^1$  pri razvoju tog izraza ako je  $x_3 = 5$ ?



## Pravila

Kolokvij se piše 90 min te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima. Pored zadatka je dani broj bodova koje nose. Rezultati kolokvija bit će objavljeni na web stranici kolegija.

### Zadatak 1 (10+10)

- a) Marko je nabavio popularnu društvenu igru "Spoji četiri" (slika 1.1) u kojoj dvojica igrača jedan nasuprot drugog ubacuju novčiće u matricu  $M = [m_{ij}]$ ,  $i \in \{1, \dots, 6\}$ ,  $j \in \{1, \dots, 7\}$ . Jedan igrač ubacuje žute, a drugi crvene novčiće. Svi su novčići jednakog oblika i od svake ih boje ima po 21 (21 žuti i 21 crveni). Marko trenutno nije u mogućnosti igrati igru već ga zanima sjedaju li novčići unutar čelija matrice  $M$ . Zato je odlučio da će popuniti tri najdonja retka matrice matrice, odnosno, mjesta  $m_{4,1}, m_{4,2}, \dots, m_{4,7}, m_{5,1}, m_{5,2}, \dots, m_{5,7}, m_{6,1}, m_{6,2}, \dots, m_{6,7}$  popuniti s novčićima. S obzirom na boje novčića, na koliko je načina Marko to mogao učiniti?

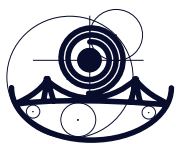


Slika 1.1: Društvena igra "Spoji četiri"

- b) Neka su  $r, n \in \mathbb{N}$ , a  $T$  i  $S$  skupovi takvi da je  $|T| = r$  i  $|S| = n$ . Tada svih funkcija sa  $T$  u  $S$  ima  $n^r$ , tj.

$$|\{f|f : T \rightarrow S\}| = |S^T| = |S|^{|T|} = n^r.$$

Dokažite!



**Zadatak 2 (20)**

U prostoru  $\mathbb{R}^3$  zadano je devet cjelobrojnih točaka. Dokažite da je polovište barem 1 dužine određene nekim parom tih točaka cjelobrojna točka.

**Zadatak 3 (20)**

Koliko je troznamenastih brojeva u heksadecimalnom brojevnom sustavu koji se mogu načiniti od znamenaka multiskupa  $M = \{3 \cdot b, 2 \cdot f, 1 \cdot c\}$ ?

**Zadatak 4 (20)**

Tržnica u Osijeku u najam nudi 30 štandova. Natječaj za najam prošlo je 13 OPG-ova. Svaki od 13 OPG-ova unajmit će barem 1 štand, a najviše 15. Poznato je da će svih 30 štandova biti iznajmljeno. Koliko je mogućih raspodjela štandova među tih 13 OPG-ova?

**Zadatak 5 (15+5)**

a) Pokažite da vrijedi:

$$(n-1) \cdot 6^{n-2} \cdot 5 = \sum_{k=2}^n \binom{n-1}{k-1} (k-1) 5^{k-1}$$

b) Neka je dan izraz:

$$(x_1 + 5x_2 - 6x_3)^7.$$

Koliki je koeficijent uz  $x_1^2 x_3^3$  pri razvoju tog izraza ako je  $x_2 = -3$ ?