Sveučilište u Osijeku **A**
Odjel za matematiku
1. prosinca 2017.

Matematički praktikum (2017./2018.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Neka je* $\mathcal{A} = \{a^i \in \mathbb{R}^n : i = 1, \ldots, m\}$ *skup točaka. Kako se definira centroid, kako medijan, a kako geometrijski medijan skupa* $\mathcal{A}$ *?*

(b) *Odredite centroid i medijan skupa* $\mathcal{A} = \{(10,0),(2,5),(9,6),(5,-3),(7,-1),(8,8),(2,6),(1,3)\}$.

(c) *Zašto za geometrijski medijan ne postoji eksplicitna formula? Obrazložite svoju tvrdnju! Koji algoritam poznajete za određivanje geometrijskog medijana?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) centroid:* $(\frac{11}{2}, 3)$, $\operatorname{med}\mathcal{A} = ([5,7],[3,5])$; *(c) Vidi Nastavne materijale.*

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Neka je* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, *funkcija definirana na konveksnom skupu* $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Ako je za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$ *nivo-skup* $\mathcal{D}_\lambda(f) = \{x \in \mathcal{D} : f(x) \le \lambda\}$ *konveksan, dokažite da je tada funkcija* f *kvazikonveksna. Vrijedi li obrat ove tvrdnje?*

(b) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}, & \text{if } x \in [0,1] \\ 1, & \text{if } x \in [1,2] \\ x-1, & \text{if } x \in [2,2.5] \\ -x+4, & \text{if } x \in [2.5,3] \\ 1, & \text{if } x \in [3,4] \\ 1 + \sqrt[3]{(x-4)^2}, & x \in [4,5]. \end{cases}$. *Ispitajte područja konveksnosti i područja kvazikonveksnosti ove funkcije.*

Rješenje: *(a) Vidi nastavne materijale; (b) Kvazikonveksna na* $[0,2.5]$ *i na* $[2.5,5]$, *konveksna na* $[1,2.5]$ *i na* $[2.5,4]$.

Zadatak 3. [25 bodova]
Zadana je funkcija $f(x,y) = 2x^2 - 2xy + y^2$ *i točka* $(x_0,y_0) = (1,1)$. *Odredite vektor smjera kretanja* $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ *i duljinu koraka* $\alpha > 0$ *tako da vrijedi* $f(x_0+\alpha p_1, y_0+\alpha p_2) < f(x_0,y_0)$. *Skicirajte graf funkcije* $\alpha \mapsto f(x_0,y_0) - f(x_0+\alpha p_1, y_0+\alpha p_2)$. *Za koji* α *se postiže najveće sniženje funkcije* f*?*

Rješenje: *Primjerice:* $p = -\nabla f(x_0,y_0) = (-2,0)$; $\alpha \in (0,.5)$; *Najveće sniženje funkcije* f *postiže se za* $\alpha = .25$.

Zadatak 4. [25 bodova]
Zadana je funkcija $f \in C^1[a,b]$ *i prve dvije različite aproksimacije* $x_0, x_1 \in [a,b]$ *njenog globalnog minimuma. Interpolirajte funkciju* f *kvadratnom funkcijom* $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *tako da bude:* $g(x_0) = f(x_0)$, $g(x_1) = f(x_1)$ *i* $g'(x_0) = f'(x_0)$ *i odredite sljedeću aproksimaciju kao* $x_2 = \operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}} g(x)$.

Rješenje: $x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-2f_0x_0+2f_1x_0+f_0'x_0^2-f_0'x_1^2}{2(f_0-f_1-f_0'x_0+f_0'x_1)}$, *gdje je* $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, $f_0' = f'(x_0)$, *a može se dobiti iz*

```
In[1]:= (* d0:=f'(x0) *)
        sol = Solve[{al x0^2 + be x0 + gam == f0, al x1^2 + be x1 + gam == f1,
                                                      2 al x0 + be == d0}, {al, be, gam}]
        Print["alpha=", alpha = al /. sol[[1]]]
        Print["beta=", beta = be /. sol[[1]]]
        Print["x2=-beta/(2 alpha)=", -beta/(2 alpha)]
```

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) Skicirajte graf funkcije $f\colon [1,4] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$.
(b) Metodom tangenti odredite prve tri aproksimacije točke globalnog minimuma ove funkcije uz početnu aproksimaciju $u_0 = 4$. *Koji kriteriji za zaustavljanje ovog iterativnog procesa se mogu primijeniti?.*

Rješenje: *(b)* $\{1, 4, 1.6, 1.231\}$. *Za zadani* $\epsilon > 0$ *može se promatrati* $|x_k - x_{k+1}| < \epsilon$ *ili* $|f'(x_k)| < \epsilon$ *ili unaprijed zadati broj iteracija.*

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.

Sveučilište u Osijeku **B**
Odjel za matematiku
1. prosinca 2017.

Matematički praktikum (2016./2017.)

1. kolokvij

Zadatak 1. [20 bodova]
(a) *Što podrazumijevamo pod pojmom „globalni minimum", a što pod pojmom „globalni minimizator" funkcije* $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$?

(b) *Neka je* $q\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = |x-4| + 2$ *zadana funkcija. Postavite optimizacijski problem traženja najkraće* ℓ_1*-udaljenosti točke* $T_0 = (2,5)$ *do grafa funkcije* q. *Skicirajte sliku grafa funkcije* q *i grafa optimizacijske funkcije. Gdje se postiže tražena najkraća udaljenost?*

Rješenje: *(a) Vidi Nastavne materijale; (b) U svakoj točki intervala* $[1,2]$.

Zadatak 2. [25 bodova]
(a) *Neka je* $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *konveksna funkcija definirana na konveksnom skupu* D. *Dokažite da je nivo - skup* $D_\lambda(f) = \{x \in D : f(x) \le \lambda\}$ *konveksan skup za svaki* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Vrijedi li obrat prethodne tvrdnje? Obrazložite.*

(b) *Skicirajte graf funkcije* $f\colon [0,5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{(x-1)^2}, & \text{if } x \in [0,1] \\ 1, & \text{if } x \in [1,2] \\ -x+3, & \text{if } x \in [2,2.5] \\ x-2, & \text{if } x \in [2.5,3] \\ 1, & \text{if } x \in [3,4] \\ 1 + \sqrt[3]{(x-4)^2}, & x \in [4,5]. \end{cases}$. *Ispitajte područja konveksnosti i područja kvazikonveksnosti ove funkcije.*

Rješenje: *(a) Vidi nastavne materijale; (b) Kvazikonveksna na* $[0,5]$, *konveksna na* $[1,4]$.

Zadatak 3. [25 bodova]
Zadana je funkcija $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ *i točka* $(x_0,y_0) = (2,4)$. *Odredite vektor smjera kretanja* $p = (p_1,p_2) \in \mathbb{R}^2$ *i duljinu koraka* $\alpha > 0$ *tako da vrijedi* $f(x_0+\alpha p_1, y_0+\alpha p_2) < f(x_0,y_0)$. *Skicirajte graf funkcije* $\alpha \mapsto f(x_0,y_0) - f(x_0+\alpha p_1, y_0+\alpha p_2)$. *Za koji* α *se postiže najveće sniženje funkcije* f?

Rješenje: *Primjerice:* $p = -\nabla f(x_0,y_0) = (0,-6)$; $\alpha \in (0,1)$; *Najveće sniženje funkcije* f *postiže se za* $\alpha = .5$.

Zadatak 4. [25 bodova]
Zadana je funkcija $f \in C^1[a,b]$ *i prve dvije različite aproksimacije* $x_0, x_1 \in [a,b]$ *njenog globalnog minimuma. Interpolirajte funkciju* f *kvadratnom funkcijom* $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ *tako da bude:* $g(x_0) = f(x_0)$, $g(x_1) = f(x_1)$ *i* $g'(x_1) = f'(x_1)$ *i odredite sljedeću aproksimaciju kao* $x_2 = \underset{x\in[a,b]}{\operatorname{argmin}}\, g(x)$.

Rješenje: $x_2 = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-f_1' x_0^2 + 2f_0 x_1 - 2f_1 x_1 + f_1' x_1^2}{2(-f_0 + f_1 + f_1' x_0 - f_1' x_1)}$, *gdje je* $f_0 = f(x_0)$, $f_1 = f(x_1)$, $f_1' = f'(x_1)$, *a može se dobiti iz*

```
In[1]:= (* d1:=f'(x1) *)
        sol = Solve[{al x0^2 + be x0 + gam == f0, al x1^2 + be x1 + gam == f1,
                                                     2 al x1 + be == d1}, {al, be, gam}]
        Print["alpha=", alpha = al /. sol[[1]]]
        Print["beta=", beta = be /. sol[[1]]]
        Print["x2=-beta/(2 alpha)=", -beta/(2 alpha)]
```

Zadatak 5. [20 bodova]
(a) Skicirajte graf funkcije $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 3x^2$.
(b) Odredite broj iteracija potreban da bi se metodom polovljenja odredila točka globalnog minimuma ove funkcije s točnošću na dvije decimale. Odredite prve tri iteracije.

Rješenje: *(b)* $\epsilon = .005$; $k > \frac{\ln\epsilon - \ln 2}{\ln 0.5} - 1$; $k > 8$ $x_k \in \{0, .5, .25, .125, .062\}$;

Napomena. Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 115 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u sljedećim zadaćama.