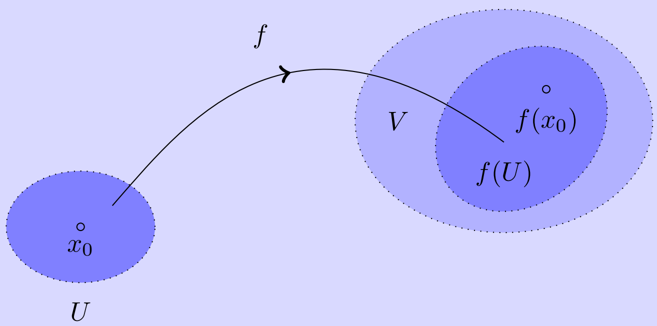
Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku



REALNA ANALIZA

Dragan Jukić

OSIJEK, 2020.

prof. dr. sc. Dragan Jukić

REALNA ANALIZA

Osijek, 2020.

Izdavač:
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku
Trg Ljudevita Gaja 6, Osijek

Odgovorna osoba izdavača:
prof. dr. sc. Kristian Sabo

Recenzenti:
Prof. dr. sc. Krešimir Burazin
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku

Dr. sc. Tibor Poganj, dr. habil. prof. emer. Pomorskog fakulteta u Rijeci

Lektorica:
Marina Tomić, prof.

Tehnička obrada:
Prof. dr. sc. Dragan Jukić

Mjesec i godina objavljivanja publikacije:
studeni, 2020.

CIP zapis dostupan je u računalnom katalogu Gradske i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 150222062

ISBN 978-953-8154-13-3

Suglasnost za izdavanje ovog sveučilišnog udžbenika donio je Senat Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku na 1. sjednici održanoj 28. listopada 2020. godine pod brojem 21/20.

Udžbenik se tiska uz novčanu potporu Ministarstva znanosti i obrazovanja.

Tisak: Alea Osijek d.o.o., Osijek

Sadržaj

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik namijenjen je u prvom redu studentima Odjela za matematiku Sveučilišta u Osijeku za potrebe kolegija *Realna analiza*.

Materija je podijeljena u devet poglavlja: Topologija na euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$, Konvergencija nizova, Konvergencija nizova funkcija, Potpuni metrički prostori, Kompaktnost, Neprekidna preslikavanja, Banachov teorem o fiksnoj točki, Povezani prostori i povezanost putevima te Limes funkcije. Na kraju udžbenika nalaze se popis literature i kazalo pojmova. U svim poglavljima teorijski dio ilustriran je mnoštvom primjera. Na kraju svakog poglavlja dani su zadaci za utvrđivanje izloženog gradiva i proširivanje znanja. Za većinu tih zadataka dane su detaljne upute. U svakom su poglavlju redom numerirane definicije, teoremi, korolari, leme, propozicije i primjeri.

Na kraju, zahvaljujem svima koji su izravno ili na drugi način pomogli da se ovaj udžbenik tiska i bude što bolji. Posebno zahvaljujem recenzentima prof. dr. sc. Krešimiru Burazinu i prof. dr. sc. Tiboru Pogány koji su pažljivo pročitali rukopis i svojim primjedbama i sugestijama utjecali na mnoge dijelove teksta.

Unaprijed zahvaljujem svima koji mi ukažu na neku pogrešku ili propust i predlože ispravak ili poboljšanje.

U Osijeku, rujan 2020. Dragan Jukić

1. Topologija na euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$

Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ okruženje je u kojem ćemo izučavati realnu analizu. Kao skup $\mathbb{R}^n$ se sastoji od svih uređenih n-torki realnih brojeva:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Skup $\mathbb{R}^n$ snabdjeven je strukturom realnog vektorskog prostora. Osim vektorske strukture, za matematičku analizu važne su metrička i iz nje izvedena topološka struktura prostora $\mathbb{R}^n$. Te strukture će nam omogućiti da se mnogi osnovni pojmovi matematičke analize (npr. limes niza, neprekidnost funkcije i limes funkcije) jednostavnije definiraju i dalje izučavaju.

1.1. Unitarni prostori

U ovoj ćemo točki definirati operaciju množenja dvaju vektora, uz pomoć koje ćemo obogatiti strukturu u vektorskom prostoru. Koristeći tu bogatiju strukturu, moguće je uvesti nove pojmove i razviti sadržajniju teoriju u narednim poglavljima.

1.1.1. Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$

Skup $\mathbb{R}^n$ zajedno sa sljedećim dvjema operacijama:

(i) *zbrajanje* $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definirano formulom

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

(ii) *množenje realnim brojevima* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definirano formulom

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

realan je vektorski prostor. Kratko ga označavamo s $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

U vektorskom prostoru $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (ili kraće: prostoru $\mathbb{R}^n$) imamo tzv. standardni ili euklidski skalarni produkt koji se definira kao funkcija $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

gdje su $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Prostor $\mathbb{R}^n$ sa standardnim skalarnim produktom zove se n-dimenzionalni euklidski prostor.

Euklidski skalarni produkt na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ ima sljedeća svojstva:

(U1) $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geq 0$ (nenegativnost),

(U2) $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (strogost, definitnost), (U3) $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{y}|\mathbf{x})$ (simetričnost),

(U4) $(\mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{z}) = (\mathbf{x}|\mathbf{z}) + (\mathbf{y}|\mathbf{z})$ (aditivnost u odnosu na prvu varijablu) i

(U5) $(\lambda\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ (homogenost u odnosu na prvu varijablu).

1.1.2. Skalarni produkt na vektorskom prostoru

Gore navedena svojstva standardnog skalarnog produkta na $\mathbb{R}^n$ uzimaju se za definiciju unitarnog prostora:

1.1. Definicija
Neka je $(X,+,\cdot)$ bilo koji realan vektorski prostor. Skalarni produkt na X svaka je funkcija $(\cdot|\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ koja ima svojstva (U1)-(U5). Uređeni par $(X, (\cdot|\cdot))$ zove se unitarni prostor.

Navedimo nekoliko primjera unitarnih prostora.

1.2. Primjer. $X = \mathbb{R}^n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$ čvrsti brojevi. Za vektore $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ stavimo

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i y_i.$$

Lako se provjere gore spomenuti uvjeti (U1)-(U5) skalarnog produkta. Prema tome, takav je način množenja vektora zaista skalarni produkt. Zovemo ga težinski skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$.

1.3. Primjer (Prostor neprekidnih funkcija). Neka je $X = C([a,b],\mathbb{R})$, gdje je

$$C([a,b],\mathbb{R}) := \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ neprekidna}\}.$$

Uz zbrajanje i množenje realnim brojevima po točkama dobivamo beskonačno dimenzionalni vektorski prostor.

Za $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ definirajmo:

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Lako je provjeriti da je $(\cdot|\cdot)$ skalarni produkt na $C([a,b],\mathbb{R})$.

1.2. Normirani prostori

U ovoj ćemo točki proučavati isključivo realne vektorske prostore. Pri tome ne postavljamo ograničenja na dimenziju prostora.

1.2.1. Euklidska norma na $\mathbb{R}^n$

Neka je $(\cdot|\cdot)$ euklidski skalarni produkt. Svakom vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ možemo pridružiti nenegativan realan broj

$$\|\mathbf{x}\| := \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Tako definirana funkcija $||\cdot|| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zove se euklidska norma na $\mathbb{R}^n$ i ima ova svojstva:

(N1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ (nenegativnost),

(N2) $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (strogost, definitnost),

(N3) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{x}\|$ (homogenost) i

(N4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (nejednakost trokuta).

Lako je provjeriti svojstva (N1) - (N3). Nadalje, pomoću Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve (CSB) nejednakosti lako je dokazati nejednakost trokuta (N4). Dokaz ostavljamo čitatelju za vježbu. Prisjetimo se, CSB nejednakost glasi:

Za bilo koja dva vektora $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ vrijedi

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ kolinearni.

1.4. Primjedba

CSB nejednakost može se dokazati na više načina (vidi i zadatak 5). Navedimo dva vrlo jednostavna i elegantna načina:

1. Uvedimo oznake:

$$a = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad b = \sum_{i=1}^{n} y_i^2, \quad c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

i uočimo da je

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{b}\, x_i - \frac{c}{\sqrt{b}}\, y_i\right)^2 = ab - 2c^2 + c^2 = ab - c^2,$$

odakle korjenovanjem dobivamo CSB nejednakost.

2. Korištenjem jednakosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2,$$

slijedi CSB nejednakost. Provjerite!

1.2.2. Norma na vektorskom prostoru

Gore navedena svojstva euklidske norme uzimaju se za definiciju općeg pojma norme na vektorskom prostoru:

1.5. Definicija
Neka je $(X, +, \cdot)$ bilo koji realan vektorski prostor. Norma na X svako je preslikavanje $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ koje zadovoljava svojstva (N1)-(N4). Uređeni par $(X, \|\cdot\|)$ nazivamo normirani prostor.

1.6. Primjedba
Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Uočimo da iz svojstava (N2)-(N4) slijedi svojstvo (N1). Zaista, pomoću (N2)-(N4) za svaki $\mathbf{x} \in X$ dobivamo

$$0 = \|\mathbf{0}\| = \|\mathbf{x} + (-\mathbf{x})\| \le \|\mathbf{x}\| + \| - \mathbf{x}\| = 2\|\mathbf{x}\|,$$

odakle slijedi svojstvo (N1).

1.7. Primjer (Prostor omeđenih funkcija). Skup $B(S, \mathbb{R})$ svih omeđenih realnih funkcija definiranih na skupu S uz uobičajeno zbrajanje funkcija i uobičajeno množenje funkcije skalarom realan je vektorski prostor. Funkcija $||\cdot||_\infty : B(S, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definirana s

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x)|$$

norma je na $B(S, \mathbb{R})$ (provjerite!). Normu $||\cdot||_\infty$ zovemo uniformna norma ili norma supremuma (kraće: sup-norma).

Opravdanje naziva uniformna norma može se naći u točki 3.2., gdje se obrađuje uniformna konvergencija nizova funkcija.

1.8. Primjer. Na skupu $C([a, b], \mathbb{R})$ svih neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$ formulom

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

definirana je norma (provjerite svojstva norme!).

1.2.3. Inducirana norma

Neka je $(X, (\cdot|\cdot))$ unitaran vektorski prostor. Koristeći svojstva skalarnog produkta lako je pokazati da funkcija $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in X$$

predstavlja normu na X. Za tu normu kažemo da je inducirana skalarnim produktom.

1.9. PRIMJEDBA
Uočite da je euklidska norma na $\mathbb{R}^n$ inducirana euklidskim skalarnim produktom.

1.10. PRIMJER. Formulom

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}, \qquad f \in C([a,b],\mathbb{R})$$

definirana je norma na $C([a,b],\mathbb{R})$ koja je inducirana skalarnim produktom iz primjera 1.3.

1.11. PRIMJEDBA
U svakom unitarnom vektorskom prostoru X vrijedi Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost:

$$|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \le ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X,$$

pri čemu jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ kolinearni.
Za dokaz te tvrdnje vidi zadatak 5.

1.2.4. Različite norme na $\mathbb{R}^n$

Na $\mathbb{R}^n$ u uporabi je najčešće euklidska norma, dok je nešto općenitija tzv. p-norma ($1 \le p < \infty$) definirana izrazom

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Lako je provjeriti da se radi o normi na $\mathbb{R}^n$, tj. da funkcija $||\cdot||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana gornjim izrazom ima svojstva (N1)-(N4). Zaista, svojstva (N1)-(N3) očigledna su, a nejednakost trokuta nije ništa drugo negoli tzv. nejednakost Minkowskog koja glasi:
Neka su $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. *Za* $p \ge 1$ *vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i + y_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^p\right)^{1/p}.$$

Ako je $0 < p < 1$, onda vrijedi suprotna nejednakost. U obama slučajevima jednakost nastupa onda i samo onda ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ kolinearni vektori (vidi npr. [3]).

Uočite da specijalno za $p = 2$ dobivamo euklidsku normu, dok za $p = 1$ dobivamo tzv. normu jedan:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Lako je provjeriti da i funkcija $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, zadana formulom

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

ima svojstva norme (N1)-(N4). Zovemo je norma beskonačno ili uniformna norma ili Chebyshevljeva norma.

1.12. Primjedba
Pokazuje se da prostori $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ za $1 \le p \le \infty$, $p \neq 2$, nisu unitarni, tj. nemaju skalarni produkt koji bi inducirao normu (vidi zadatak 3) , a prostor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ jest unitaran.

1.13. Primjedba
Interesantno je da vrijedi (dokažite!)

$$\lim_{p\to\infty} \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{x}\|_\infty,$$

što donekle opravdava notaciju za normu $\|\cdot\|_\infty$.

Osim toga, vrijede nejednakosti

$$\|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_2 \le \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty. \tag{1.1}$$

Zaista, očito je $|x_i| = \sqrt{x_i^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = \|\mathbf{x}\|_2$, odakle slijedi prva nejednakost. Druga nejednakost dobiva se ovako:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\max_j |x_j|)^2} = \sqrt{n\|\mathbf{x}\|_\infty^2} = \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_\infty.$$

1.14. Primjedba
Osim na $\mathbb{R}^n$, i na svakom konačno dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru moguće je definirati p-normu ($1 \le p < \infty$) i ∞-normu. Zaista, neka je X konačno dimenzionalan realan prostor dimenzije n. Odaberimo (fiksirajmo) proizvoljnu bazu $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ prostora X. Za $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i$, stavimo

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{b},p} = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p},$$

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{b},\infty} = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Lako je provjeriti da su tako definirane funkcije norme na X.

1.2.5. Ekvivalentne norme

Za razumijevanje pojmova limesa i neprekidnosti funkcije moramo definirati pojam okoline, tj. moramo znati kad su točke blizu jedna drugoj. Upravo nam to omogućava norma, a pojam ekvivalencije normi važan je jer je pojam „bliskosti” sačuvan radi li se o ekvivalentnim normama. Preciznije, kao što će poslije biti pokazano, ekvivalentne norme induciraju iste topologije. Navedimo definiciju:

1.15. Definicija

Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ norme na vektorskom prostoru $(X,+,\cdot)$. Kažemo da je norma $\|\cdot\|$ **ekvivalentna** s normom $\|\cdot\|'$ ako postoje realni brojevi $m, M > 0$ takvi da za svaki $\mathbf{x} \in X$ vrijedi

$$m\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|' \leq M\|\mathbf{x}\|.$$

Lako je pokazati da je ekvivalencija normi relacija ekvivalencije.

1.16. Primjedba

Iz (1.1) slijedi da su $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalentne norme na $\mathbb{R}^n$. Može se pokazati (vidi zadatak 7.(a)) da su norme (na $\mathbb{R}^n$) $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ ekvivalentne. Budući da je ekvivalencija normi relacija ekvivalencije, zaključujemo da su i norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalentne.

1.17. Primjedba

Može se pokazati da su na konačno dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru sve norme ekvivalentne (vidi teorem 6.34.).

Ilustrirajmo primjerom da ta tvrdnja ne vrijedi za beskonačno dimenzionalne vektorske prostore. U tu svrhu, neka je $C([-1,1],\mathbb{R})$ skup svih neprekidnih realnih funkcija na segmentu $[-1,1]$, tj.

$$C([-1,1],\mathbb{R}) = \{f : [-1,1] \to \mathbb{R} : f \text{ neprekidna}\}.$$

Uz zbrajanje i množenje realnim brojevima po točkama dobivamo beskonačno dimenzionalni vektorski prostor.

Formulama

$$\|f\|_1 = \int_{-1}^{1} |f(x)|dx,$$
$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx}$$

definirane su norme na $C([-1,1],\mathbb{R})$ (vidi primjer 1.8. i primjer 1.10.). Lako je provjeriti da je i formulom

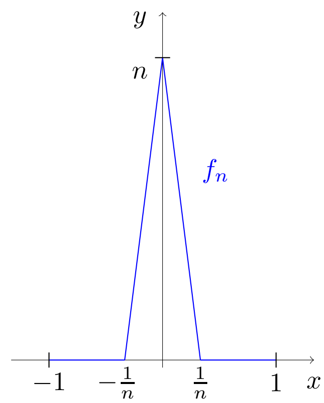
$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$$

zadana jedna norma na $C([-1,1],\mathbb{R})$.

Pokažimo da nikoje dvije od navedenih normi nisu ekvivalentne. U tu svrhu, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definirajmo formulom

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, -1/n] \cup [1/n, 1] \\ n^2 x + n, & x \in [-1/n, 0] \\ -n^2 x + n, & x \in [0, 1/n] \end{cases}$$

neprekidnu funkciju na $[-1, 1]$.



Slika 1. Graf funkcije f_n.

Lako se izračuna da vrijedi:

$$\|f_n\|_1 = 1, \quad \|f_n\|_2 = \sqrt{\frac{2n}{3}}, \quad \|f_n\|_\infty = n.$$

Dakle, niz (f_n) ograničen je u normi $\|\cdot\|_1$, ali nije ograničen u drugim dvjema normama. Zato ne mogu postojati brojevi M i N za koje bi vrijedilo $\|f\|_\infty \leq M\|f\|_1$, odnosno $\|f\|_2 \leq N\|f\|_1$ za sve $f \in C([-1, 1], \mathbb{R})$. Time smo pokazali da $\|\cdot\|_1$ norma nije ekvivalentna ni s jednom od drugih dviju normi. Preostaje dokazati da norme $\|\cdot\|_2$ i $\|\cdot\|_\infty$ nisu elvivalentne. U tu svrhu definirajmo

$$g_n := \sqrt{\frac{3}{2n}} f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $\|g_n\|_2 = 1$ i $\|g_n\|_\infty = \sqrt{\frac{3n}{2}}$. Zato ne može postojati broj $K > 0$ takav da bude $\|f\|_\infty \leq K\|f\|_2$ za sve $f \in C([-1, 1], \mathbb{R})$.

Ako, nadalje, na skupu $\mathbb{R}^n$ ne specificiramo normu, onda uvijek mislimo na euklidsku normu koju ćemo označavati s $\|\cdot\|$.

1.3. Metrički prostori

Metrički prostor skup je na kojem je definirana metrika (udaljenost) između njegovih elemenata. Metrika se definira kao funkcija koja ima svojstva koja mi očekujemo i na koja smo navikli da ima uobičajena udaljenost među točkama. Nama najbliži metrički prostor je 3-dimenzionalni euklidski prostor.

1.3.1. Euklidska metrika na $\mathbb{R}^n$

Neka je $\|\cdot\|$ euklidska norma na $\mathbb{R}^n$. Preslikavanje $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadano formulom

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$$

zove se euklidska udaljenost ili euklidska metrika na skupu $\mathbb{R}^n$.

Euklidska metrika ima sljedeća svojstva:

(EM1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ (nenegativnost),

(EM2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (strogost, definitnost),

(EM3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (simetričnost) i

(EM4) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ (nejednakost trokuta).

1.3.2. Metrika

Gore navedena svojstva euklidske metrike uzimaju se za definiciju općeg pojma metričkog prostora:

1.18. Definicija

Neka je X bilo koji neprazan skup. Metrika na skupu X jest bilo koja funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

(M1) $d(x, y) \geq 0$,

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$ i

(M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Kažemo da je d funkcija udaljenosti ili razdaljinska funkcija, odnosno metrika na skupu X. Uređeni par (X, d) nazivamo metrički prostor, a uvjete (M1)-(M4) aksiomi metrike.

1.19. PRIMJEDBA
Neka je (X, d) metrički prostor. Uočimo da iz svojstava (M2)-(M4) slijedi svojstvo (M1). Zaista, ako u nejednakost trokuta stavimo da je $y = x$ i iskoristimo svojstva (M2) i (M3), dobivamo

$$0 \leq d(x, z).$$

1.20. PRIMJER (DISKRETNA METRIKA). Neka je $X \neq \emptyset$ bilo koji skup, a $d : X \times X \to \mathbb{R}$ preslikavanje definirano formulom:

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y. \end{cases}$$

Lako je provjeriti da funkcija d ima svojstva (M1) - (M3). Svojstvo (M4) lako je provjeriti ako se posebno razmotre slučajevi $x \neq y$ i $x = y$. Dakle, d je metrika na X, zovemo ju diskretna metrika, a (X, d) diskretni metrički prostor.

Diskretni metrički prostori često služe kao kontraprimjeri za neku intuitivnu ideju. Javljaju se i u mnogim kombinatornim problemima.

1.21. PRIMJER. Neka je $\varphi : X \to \mathbb{R}$ bilo koja nenegativna injekcija. Funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$d(x, y) := \begin{cases} \max\{\varphi(x), \varphi(y)\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

metrika je na X.

Zaista, lako je provjeriti da d ima svojstva (M1) - (M3), dok se svojstvo (M4) provjerava na sličan način kao u prethodnom primjeru, tj. dovoljno je posebno razmotriti slučajeve $x \neq y$ i $x = y$.

1.22. DEFINICIJA
Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Kažemo da preslikavanje $f : X \to Y$ čuva udaljenost ako je

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \qquad \text{za sve } x_1, x_2 \in X.$$

Ako je preslikavanje f još i bijekcija, onda kažemo da je f izometrija.

Kažemo da je metrički prostor (X, d_X) metrički ekvivalentan ili izometričan sa metričkim prostorom (Y, d_Y) i pišemo $X \cong Y$ ako postoji bar jedna izometrija sa X na Y.

Izometrija metričkih prostora relacija je ekvivalencije. Lako je provjeriti da je svako preslikavanje $f : X \to Y$ koje čuva udaljenost injekcija.

Primjeri izometrija su translacije i rotacije u ravnini, dok su homotetije i inverzije primjeri funkcija koje obično nisu izometrije.

1.3.3. Inducirana metrika

Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Koristeći svojstva norme lako je pokazati da je $d : X \times X \to \mathbb{R}$,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

metrika na X. Za tu metriku d kažemo da je inducirana normom $\|\cdot\|$.

1.23. PRIMJER. Za svaki $1 \leq p < \infty$ funkcija $d_p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana formulom:

$$d_p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}.$$

metrika je na $\mathbb{R}^n$. Ta je metrika inducirana p-normom na $\mathbb{R}^n$.

I formulom

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max\{|x_1 - y_1|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

zadana je metrika na $\mathbb{R}^n$, koja je inducirana uniformnom normom na $\mathbb{R}^n$.

1.24. PRIMJER. Na skupu $B(S, \mathbb{R})$ (skup svih omeđenih realnih funkcija definiranih na S) formulom

$$d_\infty(f, g) := \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in S} |f(x) - g(x)|$$

definirana je metrika (vidi primjer 1.7.). Ta metrika naziva se sup-metrika ili uniformna metrika.

1.25. PRIMJER. Kao i do sada, neka je $C([a, b], \mathbb{R})$ skup svih neprekidnih realnih funkcija na $[a, b]$.

a) Metrika

$$d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

na $C([a, b], \mathbb{R})$ inducirana je normom iz primjera 1.8. Naziva se L_1-metrika.

c) Metrika

$$d_2(f, g) = \sqrt{\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}$$

na $C([a, b], \mathbb{R})$ inducirana je normom iz primjera 1.10. Naziva se L_2-metrika.

1.3.4. Ekvivalentne metrike

Ekvivalentnost metrika definira se slično kao ekvivalentnost normi. Ponekad se u tom slučaju govori i o uniformnoj ekvivalenciji.

1.26. Definicija
Neka su d_1 i d_2 dvije metrike na istom skupu X. Kažemo da je metrika d_1 ekvivalentna s metrikom d_2 i pišemo $d_1 \sim d_2$ ako postoje realni brojevi $m, M > 0$ takvi da za sve $x, y \in X$ vrijedi

$$m\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq M\, d_1(x,y). \tag{1.2}$$

Lako je pokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije na skupu svih metrika na X. Nadalje, ako je X vektorski prostor te ako su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ dvije ekvivalentne norme na X, onda su i njihove inducirane metrike ekvivalentne.

Na ovom mjestu samo ćemo napomenuti da skup svih metrika na nepraznom skupu X dopušta još jednu vrstu ekvivalencije, koja daje grublju klasifikaciju od uniformne ekvivalencije. Riječ je o tzv. topološkoj ekvivalenciji metrika (vidi 29. zadatak na str. 37). Ekvivalentne su metrike uvijek i topološki ekvivalentne; međutim, u općem slučaju obrat ne vrijedi. Zato će u topološkoj ekvivalenciji biti manje klasa ekvivalencije, tj. radi se o grubljoj klasifikaciji. Nešto malo više o topološkoj ekvivalenciji može se naći u zadacima za vježbu.

1.27. Definicija
Neka je A podskup metričkog prostora (X, d). Nenegativan broj

$$\operatorname{diam} A := \sup\{d(x,y) : x, y \in A\}$$

nazivamo dijametrom skupa A. Po definiciji uzimamo da je $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.

Za metriku d kažemo da je omeđena ili ograničena ako je $\operatorname{diam} X < \infty$.

Iz (1.2) direktno slijedi da ekvivalentne metrike definirane na istom skupu moraju biti istovremeno ili omeđene ili neomeđene (dokažite!).

1.28. Primjer. Neka je d metrika na X. Tada je funkcija ϱ zadana s

$$\varrho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}, \qquad \forall x, y \in X,$$

također metrika na X (vidi primjer 12), koja je omeđena jer je $\varrho(x,y) < 1$. Zato, ako su d i ϱ ekvivalentne, onda i d mora biti omeđena.

Npr. ako na $X = \mathbb{R}^n$ uzmemo euklidsku metriku d, onda d i ϱ nisu ekvivalentne, a ako je d diskretna metrika, onda su d i ϱ ekvivalentne metrike (provjerite!).

1.3.5. Udaljenost skupova u metričkom prostoru

Pomoću metrike d u mogućnosti smo mjeriti i „udaljenosti” između različitih objekata zadanog skupa X, a ne samo između njegovih elemenata.

Neka je x_0 točka iz metričkog prostora (X, d) i neka je $A \subseteq X$ neprazan skup. Udaljenost točke x_0 od skupa A, u oznaci $d(x_0, A)$, definira se formulom

$$d(x_0, A) = \inf\{d(x_0, a) : a \in A\}.$$

Primijetimo da iz $x_0 \in A$ slijedi $d(x_0, A) = 0$. Obrnuto ne vrijedi; npr. za $X = \mathbb{R}$, $A = (0, 1]$ i x_0=0 je $d(0, A) = 0$, ali $0 \notin A$.

1.29. PROPOZICIJA

Za svaki neprazan skup A, $A \subseteq X$ i za sve $x, y \in X$ vrijedi nejednakost

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \tag{1.3}$$

Dokaz. Za svaki $a \in A$ pomoću nejednakosti trokuta dobivamo

$$d(x, A) \leq d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a),$$

odakle je

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a).$$

Zato je

$$d(x, A) - d(x, y) \leq \inf\{d(y, a) : a \in A\} = d(y, A),$$

tj.

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y).$$

Zamijenimo li uloge točaka x i y, dobivamo

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y).$$

Iz prethodnih dviju nejednakosti slijedi (1.3). ■

1.30. DEFINICIJA

Neka je (X, d) metrički prostor, a A i B dva neprazna podskupa od X. Nenegativan broj

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

zovemo udaljenost skupova A i B.

Funkcija $(A, B) \mapsto d(A, B)$ definirana je na $(\mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\})\times(\mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\})$, gdje je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup od X. Primijetimo da ta funkcija zadovoljava samo prvi i treći od aksioma metrike.

1.31. DEFINICIJA

Za skup A iz metričkog prostora (X, d) kažemo da je omeđen ili ograničen ako je $\operatorname{diam} A < \infty$.

1.32. PROPOZICIJA
Za bilo koja dva skupa A i B iz metričkog prostora (X, d) vrijedi:

a) ako je $A \subseteq B$, onda je $\operatorname{diam} A \le \operatorname{diam} B$*;*

b) $\operatorname{diam}(A \cup B) \le \operatorname{diam} A + d(A, B) + \operatorname{diam} B$.

Dokaz. *a)* Dokaz je trivijalan. *b)* Po definiciji udaljenosti $d(A, B)$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoje točke $a_\varepsilon \in$ i $b_\varepsilon \in B$ takve da je

$$d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) < d(A, B) + \varepsilon.$$

Zato za sve $a \in A$, $b \in B$ i za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} d(a, b) &\le d(a, a_\varepsilon) + d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) + d(b_\varepsilon, b) \\ &< \operatorname{diam} A + d(A, B) + \operatorname{diam} B + \varepsilon. \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti broja $\varepsilon > 0$ dobivamo

$$d(a, b) \le \operatorname{diam} A + d(A, B) + \operatorname{diam} B, \qquad \text{za sve } a \in A,\ b \in B.$$

Primijetimo da ta jednakost vrijedi i za sve $a, b \in A \cup B$, odakle lako slijedi tražena nejednakost. ■

1.33. KOROLAR
Vrijedi:

a) Svaki podskup omeđenog skupa i sâm je omeđen. Specijalno, presjek konačno mnogo omeđenih skupova omeđen je skup.

b) Unija od konačno mnogo omeđenih skupova omeđen je skup.

1.34. PRIMJER. Neka je $I = [-a, a]$ segment u $\mathbb{R}$. n-kocka stranice $2a$ sa središtem u ishodištu $\mathbf{0}$ euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ je skup

$$K_a = \underbrace{I \times I \times \ldots \times I}_{n \text{ puta}}.$$

Izračunajmo $\operatorname{diam} K_a$. Ako su $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ iz K_a, onda je

$$-a \le x_i \le a \quad \& \quad -a \le y_i \le a, \qquad \forall\, i = 1, \ldots, n,$$

pa je $|x_i - y_i| \le 2a$. Zato je

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \le \sqrt{n(2a)^2} = 2a\sqrt{n},$$

odakle slijedi

$$\operatorname{diam} K_a = \sup\{d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K_a\} \leq 2a\sqrt{n}.$$

Međutim, za točke $\mathbf{x}_0 = (-a, -a, \ldots, -a)$ i $\mathbf{y}_0 = (a, a, \ldots, a)$ jest $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 2a\sqrt{n}$, stoga je

$$\operatorname{diam} K_a = 2a\sqrt{n}.$$

Primijetimo da je

$$\operatorname{diam}(\mathbf{b} + K_a) = \operatorname{diam} K_a, \quad \forall\, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n,$$

gdje je po definiciji

$$\mathbf{b} + K_a = \{\mathbf{b} + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in K_a\}.$$

Sljedeće jednostavno opažanje trebat će nam u daljnjem tekstu. Neka je $k \in \mathbb{N}$. Podijelimo segment I na $2k$ podsegmenata iste duljine:

$$I_i = \left[\frac{a}{k}(i-1), \frac{a}{k}i\right], \quad i = -(k-1), \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, k$$

i formirajmo manje kocke

$$I_{i_1} \times I_{i_2} \times \ldots \times I_{i_n}, \quad i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{-(k-1), \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, k\}.$$

Takvih manjih kocaka ima $(2k)^n$ i očito je da njihova unija daje polaznu kocku K_a. Osim toga, prema već dokazanom jest

$$\operatorname{diam}(I_{i_1} \times I_{i_2} \times \ldots \times I_{i_n}) = \frac{a}{k}\sqrt{n}.$$

Da bi definirali još jedan pojam vezan za ograničenost skupova u metričkim prostorima, potreban nam je pojam pokrivača skupa.

1.35. Definicija
Neka je (X, d) metrički prostor, a $S \subseteq X$.

(i) Familija $\mathcal{V} = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ podskupova V_λ skupa X **pokrivač** je skupa S ako je $S \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$.

(ii) Pokrivač $\mathcal{V}$ **konačan** je ako je skup Λ konačan, a prebrojiv ako je skup Λ prebrojiv.

(iii) **Potpokrivač** pokrivača $\mathcal{V}$ svaka je podfamilija $\mathcal{V}' = \{V_\lambda : \lambda \in \Lambda'\}$, $\Lambda' \subseteq \Lambda$, koja je i sama pokrivač skupa S.

1.36. Definicija
Neka je (X, d) metrički prostor. Za skup $S \subseteq X$ kažemo da je **potpuno omeđen** ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačan pokrivač od S čiji su članovi dijametra manjeg od ε.

Ako je S potpuno omeđen, onda je S i omeđen, što lako slijedi iz tvrdnje b) propozicije 1.32. Obrat općenito ne vrijedi, tj. omeđen skup ne mora biti i potpuno omeđen. Npr. ako je (X, d) beskonačan diskretan metrički prostor i $S = X$, onda je S omeđen, ali nije potpuno omeđen jer ne postoji konačan pokrivač čiji bi elementi bili dijametra manjeg od 1. Međutim, obrat vrijedi u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

1.37. Teorem

Svaki omeđen podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ je potpuno omeđen.

Dokaz. Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ omeđen. Tada je omeđen i skup $S \cup \{\mathbf{0}\}$, pa postoji realan broj $a = \operatorname{diam}(S \cup \{\mathbf{0}\})$. Neka je $I = [-a, a]$, a $K_a = I \times I \times \ldots \times I$ n-kocka stranice $2a$ sa središtem u ishodištu (vidi primjer 1.34.). Očito je $S \subseteq K_a$ i zato je dovoljno pokazati da je kocka K_a potpuno omeđena.

Neka je zadan $\varepsilon > 0$. Odaberimo $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k > \frac{a\sqrt{n}}{\varepsilon}$, a zatim razbijmo kocku K_a na $(2k)^n$ manjih kocaka dijametra $\frac{a}{k}\sqrt{n}$ na način kao u primjeru 1.34. Te manje kocke čine konačan pokrivač od K_a i dijametar im je manji od ε. ■

U sljedećoj točki pokazat ćemo kako se omeđenost i potpuna omeđenost mogu definirati na ekvivalentan i vrlo intuitivan način pomoću otvorenih kugli (propozicija 1.43.).

1.3.6. Pseudometrika

Iz dosadašnjih kolegija poznato nam je da je u $\mathbb{R}^n$ (s euklidskom metrikom) limes konvergentnog niza jedinstven. Jedinstvenost limesa imamo i u metričkom prostoru, što ćemo poslije dokazati. Međutim, kao što će također poslije biti ilustrirano primjerom, u proizvoljnom topološkom prostoru limes konvergentnog niza nije nužno jedinstven. Za konstrukciju takvog primjera koristit ćemo pojam pseudometrike.

1.38. Definicija

Neka je X bilo koji neprazan skup. Pseudometrika na skupu X jest bilo koja funkcija $\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:

(1) $\varrho(x, y) \geq 0$,

(2) $x = y \Rightarrow \varrho(x, y) = 0$,

(3) $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ i

(4) $\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$.

Uređeni par (X, ϱ) zovemo pseudometrički prostor.

Očito je svaka metrika ujedno i pseudometrika. Obrat ne mora vrijediti, kao što nam ilustrira sljedeći primjer:

1.39. Primjer. Provjerite da je preslikavanje $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirano formulom

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|$$

pseudometrika na $\mathbb{R}^2$, ali nije metrika.

Prethodni primjer može se generalizirati:

1.40. Primjer. Neka je (X, d) metrički prostor, a Y bilo koji skup s barem dvama elementima. Stavimo $Z := X \times Y$. Preslikavanje $\varrho : Z \times Z \to \mathbb{R}$ definirano formulom

$$\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := d(x_1, x_2), \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in Z \times Z$$

jest pseudometrika, ali nije metrika.

1.4. Topološki prostori

1.4.1. Topološka struktura

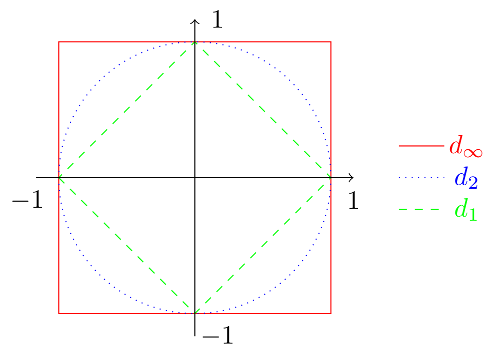
U ovoj točki pokazat ćemo kako se pojam metričkog prostora može još dalje poopćiti do pojma topološkog prostora. Pri tome najviše pažnje posvećujemo topologiji na euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$.

1.41. Definicija
Neka je (X, d) metrički prostor, $x_0 \in X$ točka i $r > 0$. Skup

$$K(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

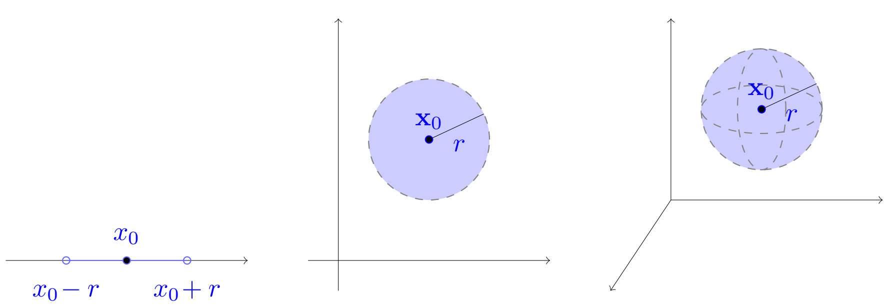
zovemo otvorena kugla sa središtem u točki x_0 radijusa r.

Na slici 2 prikazane su jedinične otvorene kugle u $\mathbb{R}^2$ u različitim metrikama d_1, d_2 i d_∞.



Slika 2. *Jedinične kugle s centrom u ishodištu u metrikama d_1, d_2 i d_∞ na $\mathbb{R}^2$.*

1.42. Primjer. Na slici 3 prikazane su otvorene kugle $K(\mathbf{x}_0, r)$ u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ za $n = 1, 2, 3$.



Slika 3. Otvorene kugle u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ za $n = 1, 2, 3$.

1.43. PROPOZICIJA
Neka je (X, d) metrički prostor i $S \subseteq X$ neprazan skup. Vrijedi:

a) Skup S omeđen je onda i samo ako postoje točka $x_0 \in X$ i realan broj $r > 0$ takav da je $S \subseteq K(x_0, r)$.

b) Skup S potpuno je omeđen onda i samo ako ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_k \in S$ takvih da je $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(x_i, \varepsilon)$.

Dokaz. *a)* Ako je S omeđen, tj. $\operatorname{diam} S < \infty$, odaberimo bilo koju točku $x_0 \in S$ i stavimo $r := \operatorname{diam} S + 1$. Tada je $S \subseteq K(x_0, r)$, jer očito je $d(x, x_0) \leq \operatorname{diam} S < r$ za svaku točku $x \in S$. Obratno, pretpostavimo da je $S \subseteq K(x_0, r)$, gdje je $x_0 \in X$. Tada pomoću nejednakosti trokuta za bilo koje dvije točke $x, y \in S$ dobivamo

$$d(x, y) \leq d(x, x_0) + d(x_0, y) < r + r = 2r$$

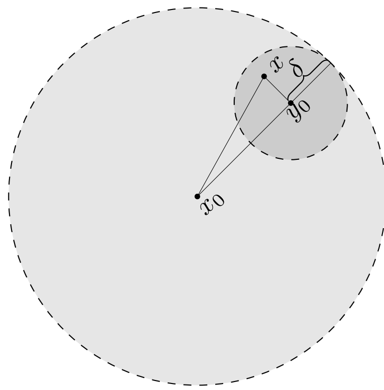
i zato je $\operatorname{diam} S = \sup\{d(x, y) : x, y \in S\} \leq 2r$.
b) Prvo pretpostavimo da je S potpuno omeđen. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada po definiciji potpune omeđenosti skup S možemo pokriti s konačno mnogo skupova dijametra strogo majeg od ε. Neka su to skupovi $V_i \subseteq X$, $i = 1, \ldots, k$. Dakle, $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i$ i $\operatorname{diam} V_i < \varepsilon$ za svaki i. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $S \cap V_i \neq \emptyset$ za svaki $i = 1, \ldots, n$ (u suprotnom izostavimo skup V_i). U svakom V_i odaberimo točku $x_i \in S \cap V_i$. Lako je pokazati da je $V_i \subseteq K(x_i, \varepsilon)$. Zaista, za svaki $x \in V_i$ imamo $d(x, x_i) \leq \operatorname{diam} V_i < \varepsilon$. Zato je $S \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} K(x_i, \varepsilon)$. Dokaz obratne tvrdnje jest očigledan. ■

1.44. PRIMJEDBA
Lako je pokazati da će skup $S \subseteq X$ iz metričkog prostora (X, d) biti omeđen onda i samo onda ako za svaku točku $x_0 \in X$ postoji realan broj $r > 0$ takav da je $S \subseteq K(x_0, r)$. Dokaz ostavljamo za vježbu.

1.45. DEFINICIJA
Skup $U \subseteq X$ iz metričkog prostora (X, d) otvoren je ako za svaku točku $x_0 \in U$ postoji $r > 0$ takav da je $K(x_0, r) \subseteq U$. Prazan skup $\emptyset$ također smatramo otvorenim.

1.46. PROPOZICIJA
Otvorena kugla $K(x_0, r)$ iz metričkog prostora (X, d) otvoren je skup.

Dokaz. Neka je $y_0 \in K(x_0, r)$. Treba pokazati da postoji $\delta > 0$ takav da je $K(y_0, \delta) \subset K(x_0, r)$. U tu svrhu stavimo $\delta := r - d(x_0, y_0)$ (vidi sliku 4).



Slika 4.

Za svaki $x \in K(y_0, \delta)$ jest $d(x, y_0) < \delta$, pa pomoću nejednakosti trokuta dobivamo

$$d(x, x_0) \leq d(x, y_0) + d(y_0, x_0) < \delta + d(y_0, x_0) = r,$$

što dokazuje da je $K(y_0, \delta) \subset K(x_0, r)$. ■

Sljedeći primjer govori nam da svojstvo otvorenosti ovisi o tome u kojem prostoru promatramo zadani skup.

1.47. Primjer. Skup $(a, b) \times \{0\}$ otvoren je u $\mathbb{R} \times \{0\}$, ali nije otvoren u $\mathbb{R}^2$ (s obzirom na euklidsku metriku).

1.48. Primjer.
a) Skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$ otvoren je u $\mathbb{R}^2$. Je li taj skup otvoren u $\mathbb{R}^3$?
b) Je li skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ otvoren u $\mathbb{R}^2$?

1.49. Propozicija
Skup $U \subseteq X$ iz metričkog prostora (X, d) otvoren je onda i samo onda ako se može prikazati kao unija neke familije otvorenih kugli.

Dokaz. Neka je U otvoren skup. Prema definiciji otvorenog skupa za svaku točku $x \in U$ postoji otvorena kugla $K(x, r_x) \subseteq U$. Tada je očito $\bigcup_{x \in U} K(x, r_x) \subseteq U$. S druge je strane $U = \bigcup_{x \in U}\{x\} \subseteq \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$. Dakle, $U = \bigcup_{x \in U} K(x, r_x)$.

Obrnuto, pretpostavimo da je $U = \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha$, gdje je $\{K_\alpha : \alpha \in A\}$ neka familija otvorenih kugli. Tada za svaki $x \in U$ postoje barem jedan $\alpha \in A$ takav da je $x \in K_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha = U$. ■

1.50. PRIMJER. Produkt intervala $I := (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n) \subseteq \mathbb{R}^n$ zovemo otvoreni paralelepiped.

Za točku $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in I$ stavimo

$$r := \min\{|x_i - a_i|, |x_i - b_i| \;:\; i = 1, \ldots, n\}.$$

Lako je pokazati da je $K(\mathbf{x}, r) \subseteq I$, što povlači da je I otvoren skup.

1.51. PROPOZICIJA
Neka je $\mathcal{U}$ familija svih otvorenih skupova u metričkom prostoru (X, d). Familija $\mathcal{U}$ ima sljedeća svojstva:

(T1) *unija svake familije članova iz $\mathcal{U}$ član je iz $\mathcal{U}$,*

(T2) *presjek konačno članova iz $\mathcal{U}$ član je iz $\mathcal{U}$,*

(T3) $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.

Dokaz. (T1) Navedeno svojstvo posljedica je propozicije 1.49.
(T2) Neka su $U_1, \ldots, U_n$ otvoreni skupovi i $U := \bigcap_{i=1}^n U_i$. Nadalje, neka je $x_0 \in U$. Treba pokazati da postoji otvorena kugla oko x_0 koja će biti sadržana u U. Kako su skupovi $U_1, \ldots, U_n$ otvoreni, po definiciji postoje otvorene kugle

$$K(x_0, r_i) \subseteq U_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Neka je $r_0 := \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Tada je

$$K(x_0, r_0) \subseteq K(x_0, r_i) \subseteq U_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

pa je $K(x_0, r_0) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i = U$.
(T3) Prazan skup otvoren je po definiciji. Cijeli skup X jest otvoren jer je svaka otvorena kugla oko točke $x \in X$ sadržana u X. ■

Familija $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova metričkog prostora (X, d) zove se topološka struktura ili topologija prostora (X, d).

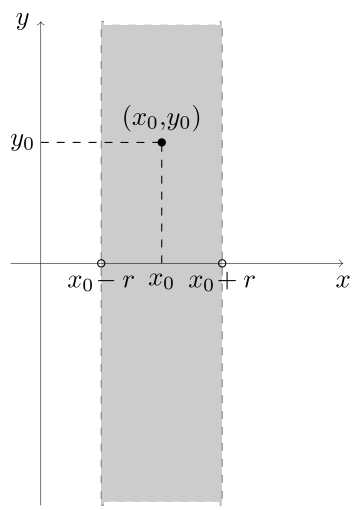
1.52. PRIMJEDBA
Ilustrirajmo jednostavnim primjerom da presjek otvorenih skupova ne mora biti otvoren. U $\mathbb{R}$ s euklidskom metrikom jedini su otvoreni skupovi $\emptyset$, intervali i njihove unije. Budući da se jednočlani skup

$$\{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\Big)$$

ne može prikazati kao unija intervala, on nije otvoren.

1.53. Primjedba
Ako je (X, ϱ) pseudometrički prostor, otvorene kugle i otvorene skupove definiramo na isti način kao u slučaju metričkog prostora (samo zamijenimo metriku d s pseudometrikom ϱ). Lako je vidjeti da propozicije 1.49. i 1.51. vrijede i za pseudometriku ϱ.

1.54. Primjer. Neka je $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|$ pseudometrika na $\mathbb{R}^2$ (vidi primjer 1.39.). Na slici 5 prikazana je otvorena kugla $K((x_0, y_0), r)$ u pseudometričkom prostoru (X, ϱ).



Slika 5.

Svojstva familije $\mathcal{U}$ svih otvorenih skupova u metričkom prostoru navedena u propoziciji 1.51. uzimaju se za definiciju topološkog prostora:

1.55. Definicija
Neka je X neprazan skup. Familija $\mathcal{U}$ podskupova od X sa svojstvima (T1) - (T3) zove se topološka struktura ili topologija na X. Uređeni par $(X,\mathcal{U})$ zove se topološki prostor. Članove familije $\mathcal{U}$ zovemo otvoreni skupovi.

Dakle, svaki metrički prostor (X, d) [odnosno, pseudometrički prostor (X, ϱ)] jest ujedno i topološki prostor. Pritom, za njegovu topologiju $\mathcal{U}$ kaže se da je definirana ili inducirana metrikom d [odnosno, pseudometrikom ϱ].

1.56. Primjer. Neka je X bilo koji neprazan skup, a $\mathcal{U}$ njegov partitivni skup. Lako je provjeriti da familija $\mathcal{U}$ ima svojstva (T1) - (T3). Ta se topologija naziva diskretnom topologijom, a $(X,\mathcal{U})$ diskretnim topološkim prostorom. Nije teško provjeriti da je diskretna topologija inducirana diskretnom metrikom.

1.4.2. Nutrina, zatvarač, granica i gomilište skupa

1.57. DEFINICIJA
Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Nutrina ili interior skupa A, u oznaci $\operatorname{Int} A$, unija je svih otvorenih skupova koji su sadržani u A.

Uočimo da je $\operatorname{Int} A$ najveći otvoreni skup iz X koji je sadržan u A.

1.58. DEFINICIJA
Okolina točke $x_0 \in X$ svaki je skup $O \subseteq X$ sa svojstvom da je x_0 u njegovoj nutrini, tj. $x_0 \in \operatorname{Int} O$.

1.59. PRIMJER.

1. $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{IntA} = (a, b)$; $A = [a, b) \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{IntA} = (a, b)$;
   $A = (a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{IntA} = (a, b)$; $A = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{IntA} = (a, b)$.
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, $\operatorname{Int} A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
3. $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\operatorname{Int} A = \emptyset$.
4. $A = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, $\operatorname{Int} A = \emptyset$.

1.60. TEOREM
Interior ima sljedeća svojstva:

(a) $\operatorname{Int} A \subseteq A$,

(b) $\operatorname{Int} X = X$,

(c) $A \subseteq B \Longrightarrow \operatorname{Int} A \subseteq \operatorname{Int} B$ (monotonost interiora),

(d) Skup A je otvoren onda i samo onda kada je $A = \operatorname{Int} A$,

(e) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$,

(f) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

Dokaz. Očito vrijede svojstva *(a)-(c)*.

(d) Ako je A otvoren skup, onda je A očito najveći otvoren skup sadržan u A, pa je $\operatorname{Int} A = A$. Obrnuto, ako je $\operatorname{Int} A = A$, onda je A otvoren skup jer je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup po definiciji.

(e) Slijedi iz *(d)*.

(f) Prema *(a)* jest $\operatorname{Int} A \subseteq A$ i $\operatorname{Int} B \subseteq B$, odakle dobivamo $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subseteq A \cap B$. Kako je $\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$ otvoren skup sadržan u $A \cap B$, prema definiciji interiora je

$$\operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B \subseteq \operatorname{Int}(A \cap B).$$

Nadalje, kako je $A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$, primjenom svojstva *(c)* dobivamo $\operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int} A$ i $\operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int} B$, odakle slijedi obratna inkluzija $\operatorname{Int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$. ■

1.61. Primjedba

Općenito je $\operatorname{Int}(A \cup B) \neq \operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B$. Npr. ako je $A = [0,1]$ i $B = [1,2]$, onda je $\operatorname{Int}(A \cup B) = (1,2)$, a $\operatorname{Int} A \cup \operatorname{Int} B = (0,1) \cup (1,2)$.

U metričkom prostoru vrijedi sljedeći kriterij pripadanja nutrini nekog skupa:

1.62. Propozicija

Neka je $A \subsetneq X$ podskup metričkog prostora (X,d) i $x_0 \in X$. Vrijedi: $x_0 \in \operatorname{Int} A$ onda i samo onda ako je $d(x_0, X \backslash A) > 0$. Dakle,

$$\operatorname{Int} A = \{x \in X : d(x, X \backslash A) > 0\}.$$

Dokaz. Neka je $x_0 \in \operatorname{Int} A$. Kako je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup, postoji $r > 0$ takav da je $x_0 \in K(x_0, r) \subseteq \operatorname{Int} A$. Zato je $d(x, x_0) \geq r$ za svaki $x \in X \backslash \operatorname{Int} A$. To pogotovo vrijedi za svaki $x \in X \backslash A \subseteq X \backslash \operatorname{Int} A$, pa stoga dobivamo

$$d(x_0, X \backslash A) = \inf\{d(x, x_0) : x \in X \backslash A\} \geq r > 0.$$

Obrnuto, pretpostavimo da je $r := d(x_0, X \backslash A) > 0$. Kako je za svaki $x \in X \backslash A$ udaljenost $d(x, x_0) \geq d(x_0, X \backslash A) = r$, točka $x \in X \backslash A$ ne može pripadati otvorenoj kugli $K(x_0, r)$. Time smo pokazali da je $K(x_0, r) \subseteq A$, pa je zato $x_0 \in K(x_0, r) \subseteq \operatorname{Int} A$. ■

1.63. Definicija

Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Za skup $F \subseteq X$ kažemo da je zatvoren ako je njegov komplement $F^c = X \backslash F$ otvoren.

1.64. Primjer.

1. U metričkom prostoru (X,d) svaka točka $x_0 \in X$ zatvoren je skup jer je skup $U := X \backslash \{x_0\}$ otvoren. To je zato jer za svaki $x \in U$ je $K(x, d(x, x_0)) \subseteq U$.
2. U metričkom prostoru (X,d) skup $\overline{K}(x_0, r) := \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$ jest zatvoren. Zovemo ga zatvorena kugla sa središtem u točki x_0 radijusa r.
3. Svaki segment $[a,b]$ zatvoren je u $\mathbb{R}$.

Pomoću de Morganovih formula

$$\Big(\bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha\Big)^c = \bigcap_{\alpha \in A} F^c \qquad \& \qquad \Big(\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha\Big)^c = \bigcup_{\alpha \in A} F^c$$

i svojstava (T1) - (T3) otvorenih skupova lako se dokaže sljedeći teorem:

1.65. Teorem
Familija svih zatvorenih skupova ima sljedeća svojstva:

(T1)' *presjek svake familije zatvorenih skupova zatvoren je skup,*

(T2)' *unija konačno zatvorenih skupova zatvoren je skup,*

(T3)' $\emptyset$ *i* X *zatvoreni su skupovi.*

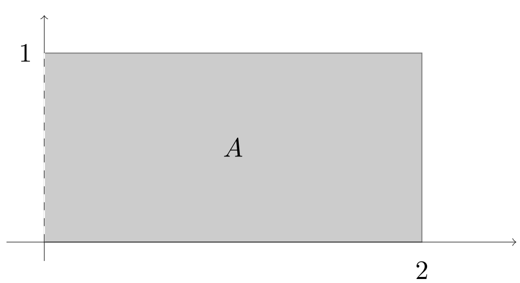
1.66. Primjedba
Navedimo primjer da unija zatvorenih skupova ne mora biti zatvoren skup. U $\mathbb{R}$ s euklidskom metrikom, skupovi $\left[0, 2 - \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, zatvoreni su, ali njihova unija

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[0, 2 - \tfrac{1}{n}\right] = [0, 2)$$

nije zatvoren skup (niti je otvoren).

1.67. Primjedba
Navedimo još nekoliko primjera skupova koji nisu ni otvoreni ni zatvoreni:

1. Primjer jednog takvog skupa jest $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$. S druge strane, skupovi $\emptyset$ i $\mathbb{R}$ jesu i otvoreni i zatvoreni.
2. Skup $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ nije zatvoren niti je otvoren.



Slika 6.

1.68. Definicija
Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Zatvarač ili zatvorenje (clausura) skupa A, u oznaci $\operatorname{Cl} A$, presjek je svih zatvorenih skupova koji sadrže A.

Uočimo da je $\operatorname{Cl} A$ najmanji zatvoreni skup iz X koji sadrži A.

1.69. PRIMJER.

1. $A = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$, ClA $= [a,b]$; $A = [a,b) \subseteq \mathbb{R}$, ClA $= [a,b]$;
   $A = (a,b] \subseteq \mathbb{R}$, ClA $= [a,b]$; $A = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, ClA $= [a,b]$.
2. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$, $\mathrm{Cl}\, A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
3. $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{Cl}\, A = \mathbb{R}$.
4. $A = \mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathrm{Cl}\, A = \mathbb{R}$.

1.70. TEOREM
Zatvarač ima sljedeća svojstva:

(a) $A \subseteq \mathrm{Cl}\, A$,

(b) $\mathrm{Cl}\, X = X$,

(c) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathrm{Cl}\, A \subseteq \mathrm{Cl}\, B$ *(*monotonost zatvarača*)*,

(d) skup A zatvoren je onda i samo onda kada je $A = \mathrm{Cl}\, A$,

(e) $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}\, A) = \mathrm{Cl}\, A$ *i*

(f) $\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}\, A \cup \mathrm{Cl}\, B$.

Dokaz. Dokaz prepuštamo čitatelju. ■

1.71. PRIMJEDBA
Općenito je $\mathrm{Cl}(A \cap B) \neq \mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}\, B$. Npr, ako je $A = (0,1)$ i $B = (1,2)$, onda je $\mathrm{Cl}\,(A \cap B) = \emptyset$, dok je $\mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}\, B = \{1\}$.

1.72. TEOREM
Neka je X topološki prostor, a $A \subseteq X$ *proizvoljan podskup. Tada jest:*

a) $\mathrm{Cl}\, A = X \backslash \mathrm{Int}\,(X \backslash A)$ *i*

b) $\mathrm{Int}\, A = X \backslash \mathrm{Cl}\,(X \backslash A)$.

Dokaz. *a)* Kako je $\mathrm{Int}\,(X\backslash A) \subseteq (X\backslash A)$, komplementiranjem dobivamo $A \subseteq X\backslash \mathrm{Int}\,(X\backslash A)$, odakle monotonost zatvarača daje inkluziju $\mathrm{Cl}\, A \subseteq X\backslash \mathrm{Int}\,(X\backslash A)$. Obratno, $X\backslash \mathrm{Cl}\, A$ otvoren je skup sadržan u $X\backslash A$. Zato je $X\backslash \mathrm{Cl}\, A \subseteq \mathrm{Int}\,(X\backslash A)$, odakle komplementiranjem dobivamo $\mathrm{Cl}\, A \supseteq X\backslash \mathrm{Int}(X\backslash A)$.
(b) Postupite slično kao pod *a)*. ■

1.73. TEOREM
Neka je A podskup topološkog prostora X. Tada je $x_0 \in \mathrm{Cl}\, A$ *onda i samo onda ako je*

$$A \cap O \neq \emptyset$$

za svaku okolinu O točke x_0.

Dokaz. Neka je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$ i O bilo koja okolina od x_0. Treba pokazati da je $A \cap O \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $A \cap O = \emptyset$. Tada je, zbog $\operatorname{Int} O \subseteq O$, $A \cap \operatorname{Int} O = \emptyset$, pa je zato $A \subseteq X \backslash \operatorname{Int} O$. Kako je $X \backslash \operatorname{Int} O$ zatvoren skup, prema tvrdnjama (c) i (d) teorema 1.70. jest

$$\operatorname{Cl} A \subseteq \operatorname{Cl}(X \backslash \operatorname{Int} O) = X \backslash \operatorname{Int} O,$$

odakle slijedi $\operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Int} O = \emptyset$. To je kontradikcija jer je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$ i $x_0 \in \operatorname{Int} O$.

Obratno, pretpostavimo da svaka okolina točke x_0 siječe skup A i pokažimo da je $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. U suprotnom bismo imali $x_0 \in X \backslash \operatorname{Cl} A$, pa bi skup $U := X \backslash \operatorname{Cl} A$ bio otvorena okolina točke x_0. To je kontradikcija s pretpostavkom da svaka okolina točke x_0 siječe skup A jer je

$$U \cap A \subseteq (X \backslash \operatorname{Cl} A) \cap \operatorname{Cl} A = \emptyset.$$

Dakle, $x_0 \in \operatorname{Cl} A$. ■

Osim gornjeg kriterija, u metričkim prostorima imamo i drugi kriterij pripadnosti zatvaraču skupa:

1.74. Propozicija

Neka je (X, d) metrički prostor i A neprazan podskup od X. Vrijedi: $x_0 \in \operatorname{Cl} A$ onda i samo onda ako je $d(x_0, A) = 0$. Dakle,

$$\operatorname{Cl} A = \{x \in X : d(x, A) = 0\}.$$

Dokaz. $x_0 \in \operatorname{Cl} A \overset{\text{teorem 1.72.}}{\Longleftrightarrow} x_0 \notin \operatorname{Int}(X \backslash A) \overset{\text{propozicija 1.62.}}{\Longleftrightarrow} d(x_0, A) = 0.$ ■

1.75. Definicija

Neka je A podskup topološkog prostora X. Rub (granica ili fronta) skupa A, u oznaci ∂A, jest skup

$$\partial A = \operatorname{Cl} A \cap \operatorname{Cl}(X \backslash A).$$

Iz definicije vidimo da je $\partial A = \partial(X \backslash A)$.

1.76. Primjer.

1. Ako je $X = \mathbb{R}$ i $A = (a, b]$, onda je

$$\partial A = \operatorname{Cl}((a, b]) \cap \operatorname{Cl}((-\infty, a] \cup (b, \infty)) = [a, b] \cap ((-\infty, a] \cup [b, \infty)) = \{a, b\}.$$

2. Ako je $X = \mathbb{R}$ i $A = \mathbb{Q}$, onda je $\partial A = \operatorname{Cl} \mathbb{Q} \cap \operatorname{Cl}(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$.

3. Neka je $K(\mathbf{x}_0, r)$ otvorena kugla u $\mathbb{R}^n$. Tada je

$$\partial K(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = r\}.$$

1.77. DEFINICIJA
Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor i $A \subseteq X$. Točka $x_0 \in X$ **gomilište** je (ili **točka gomilanja**) skupa A ako svaka okolina točke x_0 sadrži barem jednu točku iz A različitu od x_0.

Za točku skupa A koja nije njegovo gomilište kažemo da je **izolirana točka** skupa A.

Primijetimo da gomilište skupa A ne mora pripadati skupu A, dok izolirana točka mora.

Skup svih gomilišta skupa A označavat ćemo s A'.

1.78. PRIMJER.

1. Ako je $A = (0,1] \cup \{3\}$, onda je $A' = [0,1]$. Točka $x_0 = 3$ izolirana je točka.
2. Jedino gomilište skupa $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$ jest 0.
3. Jednočlan skup $A = \{\mathbf{x}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ nema gomilišta.
4. $A = \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, $A' = \emptyset$.
5. $A = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $A' = \mathbb{R}$.

Sljedeći korolar posljedica je teorema 1.73., a iz njega slijedi tvrdnja korolara 1.80.

1.79. KOROLAR
$\mathrm{Cl}\, A = A \cup A'$.

1.80. KOROLAR
Skup A zatvoren je onda i samo onda ako sadrži sva svoja gomilišta.

Dokaz. Prema tvrdnji (d) teorema 1.70. skup A zatvoren je onda i samo onda ako je $A = \mathrm{Cl}\, A$, a zbog korolara 1.79. to je onda i samo onda ako je $A' \subseteq A$. ■

1.81. DEFINICIJA
Kažemo da je skup $D \subseteq X$ **gust** na prostoru X ako je $\mathrm{Cl}\, D = X$.

1.82. PRIMJER. Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ gust je na $\mathbb{R}$ jer je $\mathrm{Cl}\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$. Je li skup iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$ gust na $\mathbb{R}$?

1.4.3. Relativna topologija

Prije nego što opišemo ovu topologiju, za motivaciju krenimo od nekih razmatranja u metričkom prostoru (X, d). Neka je $Y \subseteq X$ bilo koji podskup od X. Suženjem metrike $d : X \times X \to \mathbb{R}$ na $Y \times Y$, tj. s funkcijom

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}, \qquad d_Y(x, y) = d(x, y), \quad \forall, x, y \in Y,$$

dobivamo novi metrički prostor (Y, d_Y). Kažemo da je (Y, d_Y) metrički potprostor ili kratko potprostor metričkog prostora (X, d) i pišemo $(Y, d_Y) \subseteq (X, d)$. Radi jednostavnosti zapisivanja indeks (subscript) uz metriku d_Y najčešće se izostavlja, tj. za metriku d_Y na potprostoru Y koristi se ista oznaka, d, kao i za metriku na prostoru X, pa se govori o potprostoru (Y, d) prostora (X, d).

Postavlja se prirodno pitanje u kakvom su odnosu topologija $\mathcal{U}_X$ metričkog prostora (X, d) i topologija $\mathcal{U}_Y$ njegova potprostora (Y, d). Kao prvo, uočimo da za svaki $x_0 \in Y$ i za sve $r > 0$ vrijedi:

$$K_Y(x_0, r) = K_X(x_0, r) \cap Y,$$

gdje su

$$K_Y(x_0, r) = \{y \in Y : d(y, x_0) < r\}$$

otvorena kugla u Y sa središtem u točki x_0 radijusa r, a

$$K_X(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

otvorena kugla u X sa središtem u točki x_0 radijusa r.

Sad kad znamo kako izgledaju otvorene kugle u Y, znamo kako izgledaju otvoreni i zatvoreni skupovi u Y. O tome nam govori sljedeća propozicija.

1.83. Propozicija
Neka je (Y, d) potprostor metričkog prostora (X, d). Vrijedi:

a) Skup $V \subseteq Y$ otvoren je u prostoru (Y, d) onda i samo onda ako postoji skup $U \subseteq X$ otvoren u (X, d) takav da je

$$V = U \cap Y.$$

b) Skup $F \subseteq Y$ zatvoren je u prostoru (Y, d) onda i samo onda ako postoji skup $G \subseteq X$ zatvoren u (X, d) takav da je

$$F = G \cap Y.$$

Dokaz. *a)* Neka je $V \subseteq Y$ otvoren u Y. Po definiciji otvorenog skupa, tada za svaki $x \in V$ postoji otvorena kugla

$$K_Y(x, r_x) = K_X(x, r_x) \cap Y$$

u prostoru Y takva da je

$$x \in K_Y(x, r_x) \subseteq V.$$

Skup

$$U := \bigcup_{x \in V} K_X(x, r_x)$$

otvoren je u X. Kako je

$$V = \bigcup_{x \in V} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in V} K_Y(x, r_x) = U \cap Y \subseteq \bigcup_{x \in V} V = V,$$

dobivamo $V = U \cap Y$.

Obratno, Neka je $V = U \cap Y$, gdje je skup U otvoren u X. Kako je $V \subseteq U$ i U otvoren u X, za svaki $x \in V$ postoji kugla $K_X(x, r_x)$ otvorena u X takva da je $x \in K_X(x, r_x) \subseteq U$. Tada je $x \in K_X(x, r_x) \cap Y \subseteq U \cap Y = V$. Međutim, $K_X(x, r_x) \cap Y = K_Y(x, r_x)$, pa je V otvoren u Y.

b) Dokaz ostavljamo za vježbu. ■

Prethodna propozicija pokazuje nam kako treba definirati topologiju na podskupu Y proizvoljnog topološkog prostora $(X, \mathcal{U})$. Lako je provjeriti da familija

$$\mathcal{U}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$$

ima svojstva (T1), (T2) i (T3) iz definicje apstraktnog topološkog prostora, pa je $\mathcal{U}_Y$ topologija na Y.

1.84. Definicija

Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, a $Y \subseteq X$ podskup od X. Topološki prostor $(Y, \mathcal{U}_Y)$, gdje je $\mathcal{U}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$, zovemo potprostor prostora X, a za $\mathcal{U}_Y$ kažemo da je relativna topologija na Y.

1.4.4. Baza topologije

U svakom metričkom prostoru otvoreni skup može se prikazati kao unija neke familije otvorenih kugala (propozicija 1.49.). Motivirani tom činjenicom, uvodimo sljedeću definiciju:

1.85. Definicija

Baza topologije svaka je podfamilija topologije koja generira topološku strukturu. Preciznije, neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Baza topologije $\mathcal{U}$ podfamilija je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ otvorenih skupova koja ima svojstvo da se svaki otvoreni skup $U \in \mathcal{U}$ može prikazati kao unija neke familije elemenata iz $\mathcal{B}$.

1.86. Propozicija
Baza $\mathcal{B}$ topološkog prostora $(X,\mathcal{U})$ ima sljedeća dva svojstva:

(B1) *$\mathcal{B}$ je pokrivač od X.*

(B2) *Ako su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i ako je $x_0 \in B_1 \cap B_2$, onda postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x_0 \in B \subseteq B_1 \cap B_2$.*

Dokaz. (B1) Kako je X otvoren, po definiciji baze, X se može dobiti kao unija elemenata iz $\mathcal{B}$, tj. $\mathcal{B}$ je pokrivač skupa X.

(B2) Za $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ je $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{U}$, pa se taj presjek može dobiti kao unija nekih elemenata iz baze $\mathcal{B}$. Dakle, ako je $x_0 \in B_1 \cap B_2$, onda postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x_0 \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. ■

Primijetimo da se drugo svojstvo (B2) može iskazati ekvivalentno i ovako:

(B2)' Presjek bilo kojih dvaju članova od $\mathcal{B}$ unija je članova od $\mathcal{B}$.

1.87. Teorem
Neka familija $\mathcal{B}$ podskupova skupa X ima svojstva (B1) *i* (B2). *Tada postoji jedna i samo jedna topologija $\mathcal{U}$ na X sa svojstvom da je $\mathcal{B}$ baza te topologije $\mathcal{U}$. Elementi topologije $\mathcal{U}$ podskupovi su od X koji se mogu dobiti kao unije elemenata iz $\mathcal{B}$.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{U}$ familija svih unija elemenata iz $\mathcal{B}$. Pomoću svojstava (B1) i (B2) lako je provjeriti da je $\mathcal{U}$ topologija na X. Zaista, $\emptyset \in \mathcal{U}$ jer je prazan skup unija prazne familije članova od $\mathcal{B}$, a $X \in \mathcal{U}$ zbog svojstva (B1). Aksiom (T1) zadovoljen je jer je unija skupova koji su unije članova od $\mathcal{B}$ i sama (jedna velika) unija članova od $\mathcal{B}$. Aksiom (T2) svojstvo je (B2)'.

Iz definicije baze topologije jasno je da je $\mathcal{B}$ baza od $\mathcal{U}$ i da je $\mathcal{U}$ jedina topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. ■

1.88. Primjer. Neka je $X = \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ prošireni skup realnih brojeva, a $\mathcal{B}$ familija sastavljena od svih otvorenih skupova u $\mathbb{R}$ i skupova oblika

$$(a, \infty] := (a, \infty) \cup \{\infty\} \quad \text{i} \quad [-\infty, a) := \{-\infty\} \cup (-\infty, a), \qquad a < b.$$

Lako je provjeriti da familija $\mathcal{B}$ ima svojstva (B1) i (B2). Prema tome, postoji jedinstvena topologija $\overline{\mathcal{U}}$ na $\overline{\mathbb{R}}$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Tako definirana topologija $\overline{\mathcal{U}}$ na $\overline{\mathbb{R}}$ važna je u teoriji mjere kod izučavanja izmjerivih funkcija.

Poučno je uočiti da se svaki skup otvoren u $\overline{\mathbb{R}}$ može zapisati u jednom od sljedećih četiriju oblika:

$$U, \quad U \cup \{-\infty\}, \quad U \cup \{\infty\}, \quad U \cup \{-\infty, \infty\}, \qquad \text{gdje je } U \text{ otvoren u } \mathbb{R}.$$

Obratno ne mora vrijediti. Npr. skup $(a, b) \cup \{\infty\}$ ima traženi oblik, ali on nije otvoren u $\overline{\mathbb{R}}$.

Zadaci za vježbu

1. Za vektor $\mathbf{x} = (3, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ odredite $\|\mathbf{x}\|_1$, $\|\mathbf{x}\|_2$ i $\|\mathbf{x}\|_\infty$.

2. Neka je X realan vektorski prostor sa skalarnim produktom $(\cdot|\cdot)$. Dokažite da norma $\|\cdot\|$ inducirana tim skalarnim produktom zadovoljava tzv. jednakost paralelograma
$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2\big(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2\big)$$
i tzv. polarizacijsku formulu
$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \tfrac{1}{4}(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2).$$
(Uputa:
$$\|\mathbf{x} \pm \mathbf{y}\|^2 = (\mathbf{x} \pm \mathbf{y}|\mathbf{x} \pm \mathbf{y} = (\mathbf{x}|\mathbf{x}) \pm 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + (\mathbf{y}|\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 \pm 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + \|\mathbf{y}\|^2.$$
Zbrajanjem i oduzimanjem dviju jednadžbi koje se kriju u gornjoj relaciji, dobivamo jednakost paralelograma i polarizacijsku formulu.)

3. Neka je $1 \le p \le \infty$. Pokažite primjerom da u $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ jednakost paralelograma vrijedi jedino za $p = 2$. Dakle, norme $\|\cdot\|_p$, $p \neq 2$, nisu inducirane skalarnim produktom.

   (Uputa: Norma $\|\cdot\|_2$ inducirana je skalarnim produktom pa za nju vrijedi jednakost paralelograma. Za $p \neq 2$ promotrite vektore $\mathbf{x} = (1, 0, \ldots, 0)$ i $\mathbf{y} = (0, 1, 0, \ldots, 0)$.)

4. (P. Jordan-J. von Neumannov teorem, 1935). Neka je X realan vektorski prostor s normom $\|\cdot\|$ koja zadovoljava jednakost paralelograma. Dokažite da je s polarizacijskom formulom
$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) := \frac{1}{4}\big(\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2\big)$$
definiran skalarni produkt na X koji inducira normu $\|\cdot\|$, tj. da vrijedi $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})}$.

5. Dokažite da u svakom unitarnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$ vrijedi Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost:
$$|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X.$$
Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ kolinearni vektori.

   (Uputa: Promotrimo kvadratnu funkciju
$$f(t) = (t\mathbf{x} + \mathbf{y}|t\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{x})t^2 + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y})t + (\mathbf{y}|\mathbf{y}).$$

Ona poprima samo nenegativne vrijednosti, pa zato njezina diskriminanta nije pozitivna. Zato mora biti

$$4(\mathbf{x}|\mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{x}|\mathbf{x})(\mathbf{y}|\mathbf{y}) \leq 0,$$

a to je upravo CSB nejednakost. Nadalje, lako je provjeriti da za kolinearne vektore vrijedi jednakost. Sad pretpostavimo da vrijedi jednakost i pokažimo da su vektori $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ kolinearni. Ako je $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, nema se što dokazivati. Zato nadalje pretpostavimo da je $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Tada kvadratna funkcija f vrijednost 0 prima samo u točki $t_0 = -(\mathbf{x}|\mathbf{y})/(\mathbf{x}|\mathbf{x})$, tj.

$$f(t_0) = (t_0\mathbf{x} + \mathbf{y}|t_0\mathbf{x} + \mathbf{y}) = 0,$$

odakle slijedi da je $\mathbf{y} = -t_0\mathbf{x}$.)

6. Dokažite da je ekvivalencija normi relacija ekvivalencije.

7. Dokažite da su norme $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ na $\mathbb{R}^n$ ekvivalentne.

   (Uputa: Neka je $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Aritmetičko-kvadratna nejednakost daje
   $$\frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{n} \leq \sqrt{\frac{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}{n}},$$
   odakle slijedi $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \sqrt{n}\|\mathbf{x}\|_2$. Nadalje, iz nejednakosti $|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \leq (|x_1| + \ldots + |x_n|)^2$ slijedi $\|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1$.)

8. Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran vektorski prostor. Dokažite da je zatvorena jedinična kugla $\overline{K}(0,1) = \{\mathbf{x} \in X : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ konveksan skup, tj.
   $$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \overline{K}(0,1),\ 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in \overline{K}(0,1).$$
   (Uputa: $\|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}\| \leq \|\lambda\mathbf{x}\| + \|(1-\lambda)\mathbf{y}\| = \lambda\|\mathbf{x}\| + (1-\lambda)\|\mathbf{y}\| \leq \lambda + (1-\lambda) = 1$.)

9. Dokažite da je konveksna kombinacija metrika ponovno metrika.

10. Dokazati da je formulom
   $$\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i - y_i|$$
   zadana metrika na $\mathbb{R}^n$. Dokaz napraviti bez pozivanja na činjenicu da je ϱ inducirana normom $\|\cdot\|_\infty$ na $\mathbb{R}^n$!

   (Uputa: Lako je provjeriti svojstva (M1)-(M3). Za provjeru svojstva (M4) iskoristite nejednakost trokuta $|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$, koja vrijedi za sve $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako se c nalazi između a i b.)

11. Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ i $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija.

(a) Pronađite uvjete na funkciju f tako da formulom $\varrho(x,y) := |f(x) - f(y)|$ bude definirana metrika na X.

(b) Za $x, y \in (0,\infty)$ definirajte $\varrho(x,y) = |1/x - 1/y|$. Je li ϱ metrika na $(0,\infty)$?

(c) Za $x, y \in \mathbb{R}$ definirajte

$$\varrho(x,y) = \left| \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}} - \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}} \right|.$$

Je li ϱ metrika na $\mathbb{R}$?

(d) Za $x, y \in \mathbb{R}$ definirajte

$$\varrho(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|.$$

Je li ϱ metrika na $\mathbb{R}$?

(Uputa: (a) Lako je provjeriti da ϱ ima svojstva (M1), (M3) i (M4). Nadalje, ako je $x = y$, onda je očito $\varrho(x,y) = 0$. Prema tome, ϱ će biti metrika na X onda i samo onda ako iz jednakosti $\varrho(x,y) = 0$ slijedi da je $x = y$, tj. ako je f injekcija. (b) Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,\infty)$, strogo pada, pa je injekcija. (c) Neka je $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}$. Pokažite da je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. (d) Funkcija $f : \mathbb{R} \to (-1,1)$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ jest bijekcija, pa je ϱ metrika.)

12. Neka je (X, ϱ) metrički prostor.

(a) Pokažite da je formulom

$$d(x,y) = \frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)}$$

zadana nova metrika na X. Primijetimo da je udaljenost bilo kojih dviju točaka x i y iz X u metrici d strogo manja od 1, tj. metrika d jest omeđena.

(b) Navedite primjer metrike d koja neće biti ekvivalentna s ϱ.

(Uputa: (a) Lako je provjeriti da d ispunjava uvjete (M1)-(M3). (M4) Funkcija $f(t) = \frac{t}{1+t}$ strogo raste na $[0,\infty)$ jer je $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$. Zato je $f(\varrho(x,y)) \le f(\varrho(x,z) + \varrho(z,y))$, tj.

$$\frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)} \le \frac{\varrho(x,z)+\varrho(z,y)}{1+\varrho(x,z)+\varrho(z,y)},$$

odakle dobivamo

$$\frac{\varrho(x,y)}{1+\varrho(x,y)} \le \frac{\varrho(x,z)+\varrho(z,y)}{1+\varrho(x,z)+\varrho(z,y)} \le \frac{\varrho(x,z)}{1+\varrho(x,z)} + \frac{\varrho(z,y)}{1+\varrho(z,y)}.$$

Dakle, $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$. (b) Ekvivalentne metrike istovremeno su ili omeđene ili neomeđene, a ϱ je omeđena)

13. (a) Neka je (X,d) metrički prostor, a $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ rastuća konkavna funkcija koja iščezava samo u nuli. Dokažite da je $\varrho = f\circ d : X\to[0,\infty)$ također metrika na X. Primjerice, $\varrho(x,y)=\operatorname{arctg}|x-y|$ metrika je na X jer je funkcija $t\mapsto \operatorname{arctg} t$ rastuća i konkavna na $[0,\infty)$ te iščezava samo u nuli.

    (b) Je li formulom $\varrho_1(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}$ zadana metrika na $\mathbb{R}$?

    (Uputa: (a) Lako je pokazati da za sve $a,b>0$ vrijedi $f(a)\geq \frac{a}{a+b}f(a+b)$ i $f(b)\geq \frac{b}{a+b}f(a+b)$, odakle slijedi

    $$f(a+b)\leq f(a)+f(b). \quad (\star)$$

    U tu svrhu uočite da je $a=\frac{b}{a+b}\cdot 0+\frac{a}{a+b}\cdot(a+b)$ i $b=\frac{a}{a+b}\cdot 0+\frac{b}{a+b}\cdot(a+b)$ i primijenite definiciju konkavnosti. Za provjeru nejednakosti trokuta iskoristite nejednakost $(\star)$.)

14. (a) Pokažite da je formulom

    $$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\sqrt{|x_1-x_2|}+\sqrt{|y_1-y_2|}$$

    zadana metrika na $\mathbb{R}^2$.

    (b) Pokažite da funkcija $\|(x,y)\|=\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$ nije norma na $\mathbb{R}^2$.

    (Uputa: (b) Funkcija $\|\cdot\|$ nema svojstvo (N3).)

15. Neka su x,y,u,z točke iz metričkog prostora (X,d). Dokažite:

    (a) $|d(x,z)-d(y,u)|\leq d(x,y)+d(z,u)$
    (b) $|d(x,z)-d(y,z)|\leq d(x,y)$.

    (Uputa: (a) Nejednakost trokuta daje $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,u)+d(u,z)$, odakle je $d(x,z)-d(y,u)\leq d(x,y)+d(u,z)$. Slično se pokaže da je $d(y,u)-d(x,z)\leq d(x,y)+d(u,z)$. (b) Slijedi iz (a).)

16. Neka je X skup svih $m\times n$ realnih matrica $A=[a_{ij}]$. Dokažite da je formulom

    $$d(A,B)=\max_{i,j}|a_{ij}-b_{ij}|$$

    zadana metrika na X.

17. Neka su $(X_1,d_1),(X_2,d_2),\ldots,(X_n,d_n)$ metrički prostori i $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$. Dokažite da je i (X,d) metrički prostor gdje je $d:X\times X\to\mathbb{R}$, za $x=(x_1,x_2,\ldots,x_y)$ i $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, zadana s

    $$d(x,y)=\max\{d_1(x_1,y_1),d_2(x_2,y_2),\ldots,d_n(x_n,y_n)\}.$$

18. Neka je X vektorski prostor s diskretnom metrikom d. Provjerite da d nije inducirana normom.

19. Postoje li topološki prostori koji nisu metrizabilni, tj. čija topologija nije inducirana nekom metrikom?

    (Uputa: Svaki metrički prostor je Hausdorffov (ili T_2 prostor), tj. ima svojstvo da se svake dvije različite točke mogu separirati disjunktnim otvorenim skupovima. Na skupu $X = \{0,1\}$ za topologiju uzmite $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{0,1\}, \{1\}\}$.)

20. Dokažite da je skup $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ zatvoren u $\mathbb{R}^2$.

21. Neka je $A = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Pokažite da se A može prikazati kao presjek otvorenih skupova.

    (Rješenje: $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \big)$.)

22. Neka je X neprazan skup, a $\mathcal{U}$ familija koja sadrži $\emptyset$ i sve podskupove od X čiji je komplement konačan. Pokažite da je $\mathcal{U}$ topologija na X, zovemo ju kofinitna topologija.

23. Neka je na $\mathbb{R}$ zadana familija $\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$.

    (a) Provjerite da je $\mathcal{U}$ topologija na $\mathbb{R}$.

    (b) Topološke prostore u kojima je svaka točka zatvoren skup zovemo T_1-prostori. Pokažite da $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ nije ni T_1-prostor ni T_2-prostor.

    (Uputa: Svaka otvorena okolina točke $x_0 \in \mathbb{R}$ oblika je (a,∞), $a < x_0$.)

24. Dokažite:

    (a) $\partial A = \mathrm{Cl}\, A \backslash \mathrm{Int}\, A$.

    (b) $\mathrm{Cl}\, A = A \cup \partial A$.

    (c) $X \backslash \mathrm{Cl}\, B = \mathrm{Int}\, (X \backslash B)$.

    (d) $X \backslash \mathrm{Int}\, B = \mathrm{Cl}\, (X \backslash B)$.

    (e) $\mathrm{Int}\, B = B \backslash \partial\, B$.

    (Uputa: Iskoristimo li teorem 1.72., dobivamo:
    (a) $\partial A = \mathrm{Cl}\, A \cap \mathrm{Cl}(X \backslash A) = \mathrm{Cl}\, A \backslash (X \backslash \mathrm{Cl}(X \backslash A)) = \mathrm{Cl}\, A \backslash \mathrm{Int}\, A$.
    (b) $\mathrm{Cl}\, A = X \backslash \mathrm{Int}\, (X \backslash A) = \big(A \cup (X \backslash A)\big) \backslash \mathrm{Int}\, (X \backslash A) = \big(A \backslash \mathrm{Int}\, (X \backslash A)\big) \cup \big((X \backslash A) \backslash \mathrm{Int}\, (X \backslash A)\big) = A \cup \partial (X \backslash A) = A \cup \partial A$.)

25. Neka je $A = [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Pokažite da je $\partial A = [0,1]$.

26. Neka je $K(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$ otvorena kugla u metričkom prostoru (X, d). Dokažite da je

    $$\mathrm{Cl}\, K(x_0, r) \subseteq \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} = \overline{K}(x_0, r)$$

    i primjerom ilustrirajte da jednakost općenito ne mora vrijediti.

    (Uputa: Uočite da je $\{x \in X : d(x, x_0) < r\} \subseteq \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\} = \overline{K}(x_0, r)$ i da je $\overline{K}(x_0, r)$ zatvoren skup. Zatim iskoristite svojstvo monotonosti zatvarača. Što se tiče primjera, u diskretnom metričkom prostoru pogledajte slučaj $r = 1$.)

27. Dokažite da za proizvoljan skup A u metričkom prostoru vrijedi $\operatorname{diam}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{diam} A$.

(Uputa: Neka su $x, y \in \operatorname{Cl} A$. Tada je $d(x, A) = d(y, A) = 0$ i zato za svaki $\varepsilon > 0$ postoje točke $x', y' \in A$ takve da je $d(x, x') < \varepsilon$ i $d(y, y') < \varepsilon$. Zato je

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) < 2\varepsilon + d(x', y') \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam} A,$$

odakle prvo zbog proizvoljnosti $x, y \in \operatorname{Cl} A$ slijedi $\operatorname{diam}(\operatorname{Cl} A) \leq 2\varepsilon + \operatorname{diam} A$, a zatim zbog proizvoljnosti od ε dobivamo $\operatorname{diam}(\operatorname{Cl} A) \leq \operatorname{diam} A$.)

28. Neka je S potpuno omeđen skup iz metričkog prostora (X, d). Dokažite da je $\operatorname{Cl} S$ potpuno omeđen skup.

(Uputa: Ako je $\mathrm{ClS} = S$, nemamo što dokazivati. Zato pretpostavimo da je $S \subset \operatorname{Cl} S$. Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots . x_k \in S$ takvih da je

$$S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(x_i, \varepsilon/2). \qquad (\star)$$

Uzmimo točku $y_0 \in \operatorname{Cl} S \backslash S$. Tada je $d(y_0, S) = 0$ i zato postoji točka $z_0 \in S$ takva da je $d(y_0, z_0) < \varepsilon/2$. Zbog $(\star)$ jest $z_0 \in K(x_{i_0}, \varepsilon/2)$ za neki index i_0. Zato je $d(y_0, x_{i_0}) \leq d(y_0, z_0) + d(z_0, x_{i_0}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, što znači da je $y_0 \in K(x_{i_0}, \varepsilon)$. Time je pokazano da je $\operatorname{Cl} S \subseteq \cup_{i=1}^{k} K(x_i, \varepsilon)$.)

29. Neka su d_1 i d_2 dvije metrike na istom skupu X. Kažemo da su one topološki ekvivalentne i pišemo $d_1 \underset{t}{\sim} d_2$ ako se topološka struktura $\mathcal{U}_1$ na metričkom prostoru (X, d_1) podudara s topološkom strukturom $\mathcal{U}_2$ na metričkom prostoru (X, d_2), tj. ako je $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$.

Dokažite da su metrike d_1 i d_2 topološki ekvivalentne onda i samo onda ako za svaki $x_0 \in X$ i za svaku otvorenu kuglu $K_1(x_0, r_1)$ u metrici d_1 postoji otvorena kugla $K_2(x_0, r_2)$ u metrici d_2 takva da je $K_2(x_0, r_2) \subseteq K_1(x_0, r_1)$, i obratno, ako za svaku otvorenu kuglu $K_2(x_0, r_2)$ u metrici d_2 postoji otvorena kugla $K_1(x_0, r_1)$ u metrici d_1 takva da je $K_1(x_0, r_1) \subseteq K_2(x_0, r_2)$.

(Uputa: $\Rightarrow$ Neka je $d_1 \underset{t}{\sim} d_2$. Pretpostavimo da je $K_1(x_0, r_1)$ otvorena kugla u metrici d_1. Onda je ta kugla otvoren skup u topologiji $\mathcal{U}_1$ pa je to (po pretpostavci $d_1 \underset{t}{\sim} d_2$) otvoren skup i u topologiji $\mathcal{U}_2$ i zato postoji otvorena kugla $K_2(x_0, r_2)$ u metrici d_2 takva da je $K_2(x_0, r_2) \subseteq K_1(x_0, r_1)$.

$\Leftarrow$ Neka je $U \in \mathcal{U}_1$ bilo koji otvoren skup u topološkoj strukturi na (X, d_1). Tada, po definiciji otvorenog skupa, za svaki $x \in U$ postoji otvorena kugla $K_1(x, r_1)$ u metrici d_1 takva da je $x \in K_1(x, r_1) \subseteq U$. Nadalje, prema pretpostavci postoji otvorena kugla $K_2(x, r_2)$ u metrici d_2, s istim središtem, takva da je $x \in K_2(x, r_2) \subseteq K_1(x, r_1) \subseteq U$. Kako je to istina za svaki $x \in U$, po definiciji je skup U otvoren u topologiji $\mathcal{U}_2$, tj. $U \in \mathcal{U}_2$, pa je $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$. Slično se dokaže da je $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$.)

30. Neka su ϱ i d metrike iz zadatka 12. Pokažite da je $d \underset{t}{\sim} \varrho$.

    (Uputa: Iskoristite zadatak 29. Neka je $K_d(x_0, r)$ bilo koja otvorena kugla u metrici d. Kako je $d(x, x_0) = \frac{\varrho(x,x_0)}{1+\varrho(x,x_0)} \leq \varrho(x, x_0)$, lako je pokazati da je $K_\varrho(x_0, r) \subseteq K_d(x_0, r)$, gdje je $K_\varrho(x_0, r)$ otvorena kugla u metrici ϱ. S druge strane, za proizvoljnu kuglu $K_\varrho(x_0, r)$ u (X, ϱ) jednostavno je pokazati da vrijedi $K_d(x_0, \frac{r}{1+r}) \subseteq K_\varrho(x_0, r)$. Zaista, ako je $x \in K_d(x_0, \frac{r}{1+r})$, tj. ako je

    $$d(x, x_0) = \frac{\varrho(x, x_0)}{1 + \varrho(x, x_0)} < \frac{r}{1 + r},$$

    budući da funkcija $f(t) = \frac{t}{1+t}$ strogo raste na $[0, \infty)$, slijedi $\varrho(x, x_0) < r$.)

31. Neka je $\varrho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

    $$\varrho(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|,$$

    metrika na $\mathbb{R}$ (vidi zadatak 11). Pokažite da je ϱ topološki ekvivalentna s euklidskom metrikom d, $d \underset{t}{\sim} \varrho$.

    (Uputa: Funkcija $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ rastuća je bijekcija i njezin inverz glasi $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$.

    Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Kako je $-1 < f(x_0) < 1$ i kako f strogo raste, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta \in (0, \varepsilon)$ takav da je

    $$-1 < f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) - \delta < f(x_0) < f(x_0) + \delta < f(x_0 + \varepsilon) < 1.$$

    Pomoću tih nejednakosti lako je pokazati da vrijedi:

    $$K_\varrho(x_0, \delta) \subset K_d(x_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \tag{1.4}$$
    $$x_0 \in \big(f^{-1}(f(x_0) - \delta), f^{-1}(f(x_0) + \delta)\big) \subseteq K_\varrho(x_0, \varepsilon), \tag{1.5}$$

    gdje indeks ϱ (odnosno index d) označava da se radi o otvorenoj kugli u metrici ϱ (odnosno d). Zaista, $x \in K_\varrho(x_0, \delta) \iff \varrho(x, x_0) = |f(x) - f(x_0)| < \delta \iff f(x_0) - \delta < f(x) < f(x_0) + \delta \iff f^{-1}(f(x_0) - \delta) < x < f^{-1}(f(x_0) + \delta) \Rightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, što dokazuje (1.4). Nejednakost (1.5) slijedi iz $f(x_0) - \delta < f(x_0) < f(x_0) + \delta$.

    Uočite da nam (1.4) govori da za svaku otvorenu kuglu $K_d(x_0, \varepsilon)$ postoji otvorena kugla $K_\varrho(x_0, \delta)$ koja je sadržana u $K_d(x_0, \varepsilon)$. Konačno, iz (1.5) slijedi da za svaku otvorenu kuglu $K_\varrho(x_0, \varepsilon)$ postoji otvorena kugla $K_d(x_0, r)$ nekog radijusa $r > 0$ takva da je $K_d(x_0, r) \subseteq K_\varrho(x_0, \varepsilon)$.)

32. Dokažite da su ekvivalentne metrike uvijek i topološki ekvivalentne.

    (Uputa: Opet ćemo iskoristiti zadatak 29. Neka su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike na X. Po definiciji, tada postoje realni brojevi $m, M > 0$ takvi da je

    $$m\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq M\, d_1(x, y), \qquad \forall x, y \in X.$$

Neka je zadana otvorena kugla $K_1(x_0, r)$ u (X, d_1). Tada je $K_2(x_0, mr) \subseteq K_1(x_0, r)$, gdje je $K_2(x_0, mr)$ otvorena kugla u (X, d_2). Nadalje, ako je zadana otvorena kugla $K_2(x_0, r)$ u (X, d_2), onda je $K_1(x_0, \frac{r}{M}) \subseteq K_2(x_0, r)$, gdje je $K_1(x_0, \frac{r}{M})$ otvorena kugla u (X, d_1).)

33. Neka su $(X, \mathcal{U})$ i $(Y, \mathcal{V})$ topološki prostori, a $\mathcal{B} = \{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.

    (a) Ilustrirajte primjerom da $\mathcal{B}$ nije topologija na $X \times Y$.

    (b) Pokažite da $\mathcal{B}$ ima svojstva (B1) i (B2) iz propozicije 1.86. i zato prema teoremu 1.87. postoji jedinstvena topologija na $X \times Y$ kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Kaže se da je $\mathcal{U}$ topologija direktnog produkta na $X \times Y$, a $(X \times Y, \mathcal{U})$ zove se direktni produkt topoloških prostora X i Y.

2. Konvergencija nizova

Niz u skupu X svaka je funkcija $x : \mathbb{N} \to X$. Vrijednost $x(k)$, $k \in \mathbb{N}$, zove se **opći** ili **k-ti član niza** i obično se označava s x_k. U skladu s tim, niz $x : \mathbb{N} \to X$ najčešće označavamo na jedan od sljedećih dvaju načina:

$$(x_k) \qquad \text{ili} \qquad x_1, x_2, \ldots, x_k \ldots$$

Podniz niza $x : \mathbb{N} \to X$ svaki je niz oblika $x \circ u : \mathbb{N} \to X$, gdje je $u : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ neka strogo rastuća funkcija (niz u $\mathbb{N}$). U skladu s našim dogovorom o označavanju nizova imamo

$$(x \circ u)(k) = x(u(k)) = x(u_k) = x_{u_k},$$

pa stoga podniz $x \circ u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kraće označavamo s (x_{u_k}).

2.1. Primjedba

Slikovito govoreći, podniz (x_{u_k}) dobiva se tako da se kroz listu

$$x_1, x_2, \ldots, x_k \ldots$$

stalno „krećemo" slijeva udesno bez vraćanja unazad (jer niz prirodnih brojeva u_k strogo raste!) i pri tome iz liste s pozicija $u_1, u_2, u_3, \ldots$ vadimo članove niza (x_k) i redom ih slažemo u novu listu $x_{u_1}, x_{u_2}, x_{u_3}, \ldots$.

$$\overset{\longrightarrow}{} \\ x_1, \ldots, x_{u_1}, \ldots, x_{u_2}, \ldots, x_{u_k}, \ldots$$

Nadalje, kako je funkcija u strogo rastuća, to je

$$\begin{aligned} &u_1 = u(1) \geq 1 \\ &u_2 = u(2) > u(1) \geq 1 \Rightarrow u_2 \geq 2 \\ &u_3 = u(3) > u(2) \geq 2 \Rightarrow u_3 \geq 3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

odakle induktivno zaključujemo da je

$$u_k \geq k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Najvažnije je svojstvo nizova konvergencija. No o tome je moguće govoriti jedino ako na skupu X imamo metriku ili topološku strukturu.

Nas će najviše zanimati nizovi u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. Prvo ćemo za motivaciju ponoviti osnovne činjenice o nizovima realnih brojeva, a zatim ćemo napraviti odgovarajuća poopćenja za metričke i topološke prostore.

2.1. Nizovi u $\mathbb{R}$

Kao što smo već rekli, najvažnije je svojstvo nizova konvergencija. Prisjetimo se definicije:

2.2. Definicija
Niz realnih brojeva je (x_k) konvergentan ako postoji realan broj $x_0 \in \mathbb{R}$ sa svojstvom da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $|x_k - x_0| < \varepsilon$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\ k \geq k_0 \Longrightarrow |x_k - x_0| < \varepsilon.$$

Pri tome realan broj x_0 zovemo limes ili granična vrijednost niza (x_k).

Da je x_0 limes niza (x_k) označavamo na jedan od sljedećih načina:

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k, \qquad x_0 = \lim x_k \qquad \text{ili kratko} \qquad x_k \to x_0.$$

Svaki konvergentan niz ima samo jedan limes. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je divergentan.

Kako je $|x_k - x_0| = d(x_k, x_0)$, gdje je d euklidska metrika na $\mathbb{R}$, definicija 2.2. može se iskazati na sljedeći ekvivalentan način:

2.3. Definicija
Niz realnih brojeva (x_k) konvergira prema $x_0 \in \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $d(x_k, x_0) < \varepsilon$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\ k \geq k_0 \Longrightarrow d(x_k, x_0) < \varepsilon.$$

Formalno, na isti se način definira konvergencija niza u metričkom prostoru (X, d), što ćemo napraviti u sljedećoj točki.

Za niz realnih brojeva (x_k) kažemo da monotono raste ako postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_k \leq x_{k+1} \qquad (\forall k \geq k_0).$$

Niz (x_k) monotono pada ako niz $(-x_k)$ monotono raste.

2.4. Propozicija
Svaki niz (x_k) realnih brojeva ima monoton podniz.

Dokaz. Neka je

$$A := \{k \in \mathbb{N} : x_m \geq x_k \text{ za svaki } m \geq k\}.$$

Tada je (a) A konačan skup ili je (b) A beskonačan.

(a) Odaberimo bilo koji prirodan broj $u_1 > \max A$. Kako je A konačan, takav u_1 postoji. Kako $u_1 \notin A$, prema definiciji skupa A postoji $u_2 > u_1$ takav da je $x_{u_2} < x_{u_1}$. Očito da $u_2 \notin A$ i zato postoji $u_3 > u_2$ takav da je $x_{u_3} < x_{u_2}$. Nastavljajući tu konstrukciju dobivamo strogo rastući niz (u_k) i odgovarajući strogo padajući podniz (x_{u_k}).

(b) Neka je u_1 bilo koji element skupa A. Kako je A beskonačan skup, postoji $u_2 \in A$ takav da je $u_1 < u_2$. Prema definiciji skupa A jest $x_{u_1} \leq x_{u_2}$. Odaberimo sada $u_3 \in A$ takav da je $u_2 < u_3$ i $x_{u_2} \leq x_{u_3}$. Nastavljajući taj postupak indukcijom dobivamo strogo rastući niz (u_k) i odgovarajući monotono rastući podniz (x_{u_k}). ■

Niz realnih brojeva (x_k) je omeđen ili ograničen ako je skup svih njegovih članova $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ omeđen. Prema primjedbi 1.44., niz će biti omeđen onda i samo onda ako postoji realan broj $M > 0$ takav da je $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq (-M, M)$.

2.5. PROPOZICIJA
Svaki monoton i omeđen niz realnih brojeva (x_k) jest konvergentan.

Dokaz. Radi određenosti pretpostavimo da (x_k) monotono raste. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x_k \leq x_{k+1}$ za svaki $k \geq 1$. Niz (x_k) omeđen je pa postoji $x_0 := \sup\{x_k : x \in \mathbb{N}\}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je supremum nekog skupa njegova najmanja gornja međa, broj $x_0 - \varepsilon$ nije gornja međa skupa $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Zato postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_0 - \varepsilon < x_{k_0} \leq x_0 < x_0 + \varepsilon.$$

Nadalje, kako (x_k) monotono raste, za svaki $k \geq k_0$ vrijedi

$$x_0 - \varepsilon < x_{k_0} \leq x_k \leq x_0 < x_0 + \varepsilon,$$

odakle vidimo da je $|x_k - x_0| < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$. ■

2.2. Nizovi u metričkom prostoru

Za realnu analizu najvažniji su nizovi u $\mathbb{R}^n$. Skup $\mathbb{R}^n$ s euklidskom metrikom jest metrički prostor. Zato ćemo nadalje konvergenciju nizova izučavati na razini metričkih i topoloških prostora.

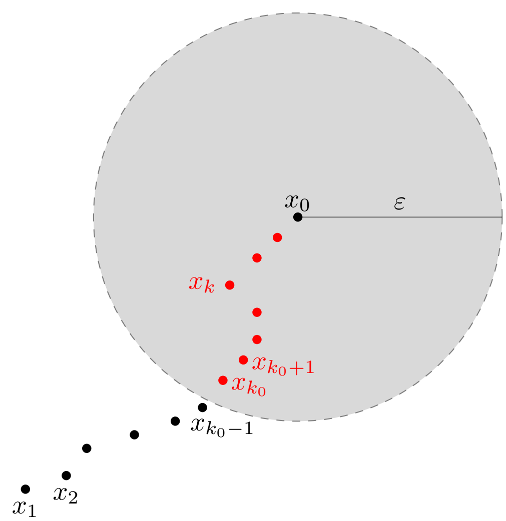
2.6. Definicija (Konvergencija niza u metričkom prostoru)
Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Kažemo da niz (x_k) **konvergira** prema točki $x_0 \in X$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $d(x_k, x_0) < \varepsilon$ (slika 7), tj. ako

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists k_0 \in \mathbb{N})\; k \geq k_0 \Longrightarrow d(x_k, x_0) < \varepsilon.$$

Pri tome točku x_0 zovemo **limes** ili **granična vrijednost** niza (x_k).

Da niz (x_k) konvergira prema x_0, označavamo na jedan od sljedećih načina:

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} x_k, \qquad x_0 = \lim x_k \qquad \text{ili kratko} \qquad x_k \to x_0.$$



Slika 7.

2.7. Primjedba

(a) Uočimo da niz (x_k) konvergira prema točki $x_0 \in X$ onda i samo onda ako niz realnih brojeva $\big(d(x_k, x_0)\big)$ konvergira k nuli.

(b) Uočimo da niz (x_k) konvergira prema $x_0 \in X$ onda i samo onda ako se u svakoj otvorenoj kugli $K(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, nalaze svi članovi toga niza, osim eventualno prvih nekoliko članova.

2.8. PRIMJEDBA
Neka su d_1 i d_2 dvije ekvivalentne metrike na skupu X. Pomoću definicije 2.6. lako je provjeriti da niz (x_k) konvergira prema x_0 u prostoru (X, d_1) onda i samo onda ako konvergira prema x_0 u prostoru (X, d_2).

Svaki normirani prostor $(X, \|\cdot\|)$ postaje na prirodan način metrički prostor preko metrike $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ inducirane normom $\|\cdot\|$, pa se u njemu može gledati konvergencija nizova.

2.9. DEFINICIJA
Neka je $(X, \|\cdot\|)$ normiran vektorski prostor. Za niz vektora $(\mathbf{x}_k)$ iz X kažemo da konvergira u normi $\|\cdot\|$ (kratko: konvergira) ako on konvergira u metričkom prostoru (X, d), gdje je d metrika na X inducirana normom $\|\cdot\|$.

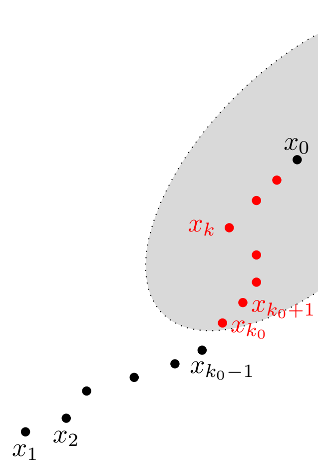
U topološkim prostorima općenito nemamo metriku, ali imamo otvorene skupove. Ako definiciju 2.6. želimo poopćiti na topološke prostore, moramo je iskazati na ekvivalentan način pomoću otvorenih skupova. O tome nam govori sljedeći teorem:

2.10. TEOREM
Niz (x_k) iz metričkog prostora (X, d) konvergira prema točki $x_0 \in X$ onda i samo onda ako za svaku otvorenu okolinu U točke x_0 postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in U$ za svaki $k \geq k_0$.

Dokaz. Neka $x_k \to x_0$ i neka je U bilo koja otvorena okolina točke x_0. Zbog otvorenosti skupa U postoji realan broj $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U$. Nadalje, kako $x_k \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $d(x_k, x_0) < \varepsilon$, tj. $x_k \in K(x_0, \varepsilon)$. Zato je $x_k \in U$ za svaki $k \geq k_0$.

Obratno, neka je zadan $\varepsilon > 0$. Kako je otvorena kugla $K(x_0, \varepsilon)$ otvoren skup, po pretpostavci postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in K(x_0, \varepsilon)$ za svaki $k \geq k_0$, tj. $d(x_k, x_0) < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$. ■

2.11. DEFINICIJA (KONVERGENCIJA NIZA U TOPOLOŠKOM PROSTORU)
Neka je (x_k) niz u topološkom prostoru $(X, \mathcal{U})$. Niz (x_k) konvergira prema točki $x_0 \in X$ ako za svaku otvorenu okolinu $U \in \mathcal{U}$ od x_0 postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in U$ za svaki $k \geq k_0$ (slika 8).



Slika 8.

2.12. Primjedba

Neka su d_1 i d_2 dvije topološki ekvivalentne metrike na skupu X. Iz definicije 2.11. jasno je da konvergencija niza (x_k) ovisi samo o topološkoj strukturi prostora X. Zato, niz (x_k) konvergira prema x_0 u prostoru (X, d_1) onda i samo onda ako konvergira prema x_0 u prostoru (X, d_2).

2.13. Teorem (O jedinstvenosti limesa niza u metričkom prostoru)

Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Ako (x_k) konvergira, onda mu je limes jedinstven.

Dokaz. Neka je $x_0 \in X$ limes niza (x_k). Treba pokazati da ni jedna druga točka $\hat{x}_0 \in X \backslash \{x_0\}$ ne može biti limes. U tu svrhu neka je $\varepsilon := \frac{1}{2} d(x_0, \hat{x}_0)$.

Prvo ćemo pokazati da se otvorene kugle $K(x_0, \varepsilon)$ i $K(\hat{x}_0, \varepsilon)$ ne sijeku. Neka je $x \in K(x_0, \varepsilon)$. Tada je $d(x, x_0) < \varepsilon$. Prema nejednakosti trokuta je $d(x_0, \hat{x}_0) \leq d(x_0, x) + d(x, \hat{x}_0)$, odakle slijedi

$$d(x, \hat{x}_0) \geq d(x_0, \hat{x}_0) - d(x_0, x) > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Time smo pokazali da je $K(x_0, \varepsilon) \cap K(\hat{x}_0, \varepsilon) = \emptyset$.

Prema definiciji 2.6. postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_0) < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$. Drugim riječima, za svaki $k \geq k_0$ je $x_k \in K(x_0, \varepsilon)$. Zbog toga se u otvorenoj kugli $K(\hat{x}_0, \varepsilon)$ može nalaziti najviše konačno mnogo članova niza (x_k). To znači da $\hat{x}_0$ nije limes niza (x_k) (primjedba 2.7.(b)). ■

2.14. PRIMJEDBA

(a) U topološkom prostoru limes ne mora biti jedinstven. Navedimo dva primjera:

1. Neka je $X = \{0, 1\}$, a $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ trivijalna topologija na X. Svaki niz u X ima i 0 i 1 za limes.
2. Vratimo se na topološki prostor $(\mathbb{R}^2, \mathcal{U})$ iz primjera 1.54. gdje su otvorene kugle i otvoreni skupovi definirani pomoću pseudometrike

$$\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := |x_1 - x_2|.$$

U tom topološkom prostoru svaka točka $(1, y)$, $y \in \mathbb{R}$, jest limes niza $\mathbf{x}_k = \left(1, \frac{1}{k}\right)$.

(c) U dokazu prethodnog teorema metrika je iskorištena jedino za konstrukciju disjunktnih otvorenih skupova $K(x_0, \varepsilon)$ i $K(\hat{x}_0, \varepsilon)$. Zato je lako pokazati da će limes (ukoliko postoji) biti jedinstven i u topološkim prostorima koji imaju svojstvo da se svake dvije različite točke mogu separirati disjunktnim otvorenim skupovima. Takve topološke prostore zovemo Hausdorffovi ili T_2-prostori.

Sljedeći teorem govori nam da se zatvoreni skupovi u metričkom prostoru mogu karakterizirati pomoću konvergentnih nizova. Kako je otvoren skup komplement zatvorenog skupa, to znači da konvergentni nizovi u potpunosti opisuju topološku strukturu metričkog prostora.

2.15. TEOREM

Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $F \subseteq X$ zatvoren je onda i samo onda ako svaki niz (x_k) u F koji konvergira u X ima limes u F.

Dokaz. Neka je $F \subseteq X$ zatvoren skup, a (x_k) niz u F (tj. $x_k \in F$ za svaki $k \in \mathbb{N}$) koji konvergira prema $x_0 \in X$. Treba pokazati da je $x_0 \in F$. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da je $x_0 \in X \backslash F$. Skup $X \backslash F$ je otvoren pa zato postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq X \backslash F$. Nadalje, kako (x_k) konvergira prema x_0, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq X \backslash F$ za svaki $k \geq k_0$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je (x_k) niz u F.

Obratno, pretpostavimo da $F \subseteq X$ sadrži limese svih konvergentnih nizova iz F i pokažimo da je F zatvoren. Pretpostavimo da F nije zatvoren, tj. da $X \backslash F$ nije otvoren. Tada postoji točka $x_0 \in X \backslash F$ takva da ni za jedan $r > 0$ otvorena kugla $K(x_0, r)$ nije cijela sadržana u $X \backslash F$, tj. $K(x_0, r) \cap F \neq \emptyset$. Zamjenjujući r redom s $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, dolazimo do točaka $x_k \in K(x_0, \frac{1}{k}) \cap F$. Očito da je (x_k) niz u F. Kako je $d(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$, to $x_k \to x_0 \in X \backslash F$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da F sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova. Dakle, F je zatvoren skup. ∎

2.16. DEFINICIJA

Za niz (x_k) u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je omeđen ako je skup svih njegovih članova omeđen.

Prema primjedbi 1.44., niz (x_k) bit će omeđen onda i samo onda ako postoje točka x_0 i realan broj $M > 0$ takav da je $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_0, M)$.

2.17. PROPOZICIJA
Svaki konvergentan niz u metričkom prostoru (X, d) jest omeđen.

Dokaz. Neka (x_k) konvergira prema x_0. Prema definiciji 2.6. za $\varepsilon = 1$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\{x_k : k \geq k_0\} \subseteq K(x_0, 1)$. Neka je

$$r := \max\{1, d(x_1, x_0), d(x_2, x_0), \ldots, d(x_{k_0-1}, x_0)\} + 1.$$

Tada je $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq K(x_0, r)$. ■

2.18. PROPOZICIJA
Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Ako niz (x_k) konvergira prema točki $x_0 \in X$, onda i svaki njegov podniz konvergira prema x_0.

Dokaz. Neka je (x_{u_k}) podniz niza (x_k). Prema definiciji limesa za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $d(x_k, x_0) < \varepsilon$. Prema (2.1) jest $u_k \geq k$ i zato je

$$d(x_{u_k}, x_0) < \varepsilon, \qquad k \geq k_0.$$

Time smo pokazali da podniz (x_{u_k}) konvergira prema x_0. ■

Svaki niz $(\mathbf{x}_k)$ iz euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ možemo zapisati u obliku

$$\mathbf{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n),$$

gdje su (x_k^i), $i = 1, \ldots, n$, tzv. koordinatni nizovi realnih brojeva.
Nizovi u $\mathbb{R}^n$ najčešće se zadaju pomoću općeg člana.

2.19. PRIMJER. Navedimo nekoliko primjera nizova u $\mathbb{R}^n$ zadanih općim članom:

1. $\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right)$ i $\mathbf{y}_k = \left((-1)^k, (1 + 1/k)^k\right)$ nizovi su u $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathbf{x}_k = \left(\frac{k+1}{k}, \frac{1}{2^k}, \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)$ jest niz u $\mathbb{R}^3$.
3. $\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \ldots, \frac{1}{k+n}\right)$ jest niz u $\mathbb{R}^n$.

Sljedeći teorem govori nam da niz u $\mathbb{R}^n$ konvergira onda i samo onda ako konvergira svaki njegov koordinatni niz. Čak više, on nam kaže da se računanje limesa niza u $\mathbb{R}^n$ svodi na računanje n limesa nizova realnih brojeva, što nam je dobro poznato.

2.20. TEOREM
U euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ niz $(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{x}_k = (x_k^1, x_k^2, \ldots, x_k^n)$, konvergira prema točki $\mathbf{x}_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n)$ onda i samo onda ako $x_k^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Dokaz. Pretpostavimo da $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$. Treba pokazati da $x_k^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada po definiciji 2.6. postoji $k_0 \in \mathbf{N}$ takav da je $d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$. Kako je

$$|x_k^i - x_0^i| \leq d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

za svaki $k \geq k_0$ dobivamo

$$|x_k^i - x_0^i| < \varepsilon, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

To znači da $x_k^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$.

Obratno, pretpostavimo da $x_k^i \to x_0^i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje brojevi $k_0^i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, n$, takvi da za sve $k \geq k_0^i$ vrijedi:

$$|x_k^i - x_0^i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Neka je $k_0 := \max\{k_0^1, \ldots, k_0^n\}$. Tada za svaki $k \geq k_0$ dobivamo

$$d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_k^i - x_0^i)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2} = \varepsilon,$$

što nam govori da niz $(\mathbf{x}_k)$ konvergira prema $\mathbf{x}_0$. ■

2.21. PRIMJER. Za nizove iz primjera 2.19. dobivamo:

1. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = (0, 0)$. Niz $(\mathbf{y}_k)$ nije konvergentan jer njegov prvi koordinatni niz (y_k^1), $y_k^1 = (-1)^k$ ne konvergira,
2. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}, \frac{1}{2^k}, \sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = (1, 0, 0)$,
3. $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k+2}, \ldots, \frac{1}{k+n}\right) = (0, 0, \ldots, 0)$.

Kako je $\mathbb{R}^n$ realan vektorski prostor, znamo zbrajati vektore i množiti ih skalarom. Osim toga, znamo ih i skalarno množiti. Kao i u slučaju $n = 1$ potrebno je istražiti odnos konvergencije niza i tih operacija. O tome nam govori sljedeći teorem:

2.22. KOROLAR
Neka su $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ konvergentni nizovi u $\mathbb{R}^n$, (α_k) konvergentan niz realnih brojeva i $\lambda \in \mathbb{R}$. Nadalje, neka $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_k \to \mathbf{y}_0$ i $\alpha_k \to \alpha$. Tada vrijedi:

(a) niz $(\mathbf{x}_k \pm \mathbf{y}_k)$ jest konvergentan i vrijedi:

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k \pm \mathbf{y}_k) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k \pm \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_0 \pm \mathbf{y}_0,$$

(b) niz $(\lambda \mathbf{x}_k)$ *konvergentan je i vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} (\lambda \mathbf{x}_k) = \lambda \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \lambda \mathbf{x}_0,$$

(c) niz $(\alpha_k \mathbf{x}_k)$ *konvergentan je i vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} (\alpha_k \mathbf{x}_k) = \lim_{k\to\infty} \alpha_k \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \alpha \mathbf{x}_0,$$

(d) ako je $\alpha_k \neq 0$ *za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *i* $\alpha \neq 0$*, niz* $\left(\frac{1}{\alpha_k}\mathbf{x}_k\right)$ *konvergentan je i vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} \left(\tfrac{1}{\alpha_k}\mathbf{x}_k\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\alpha_k} \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \frac{1}{\alpha}\mathbf{x}_0,$$

(e) niz $(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_k)$ *konvergentan je i vrijedi:*

$$\lim_{k\to\infty} (\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_k) = (\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k| \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k) = (\mathbf{x}_0|\mathbf{y}_0).$$

Dokaz. Dokaz slijedi iz teorema 2.20. i odgovarajućih pravila za računanje limesa nizova realnih brojeva. ■

2.23. Definicija

Neka je (x_k) niz u metričkom prostoru (X, d). Za točku $x_0 \in X$ kažemo da je **gomilište** ili **točka gomilanja** niza (x_k) ako svaka otvorena okolina točke x_0 sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_k).

2.24. Primjedba

(a) Primijetimo da je gomilište podniza (x_{u_k}) ujedno i gomilište niza (x_k). Pokažite primjerom da obrat ne vrijedi.

(b) Konvergentan niz u metričkom prostoru ima samo jedno gomilište. To je njegov limes. Za dokaz te tvrdnje dovoljno je oponašati dokaz teorema 2.13.

(c) Nije teško pokazati da je x_0 gomilište niza (x_k) onda i samo onda ako za svaku otvorenu okolinu U oko x_0 i za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji barem jedan $k' \in \mathbb{N}$, $k' > k$, takav da je $x_{k'} \in U$.

(d) Primijetimo da jednočlani skup $A = \{a\}$ nema gomilište, dok stacionaran niz $x_k = a$, $k \in \mathbb{N}$, ima gomilište.

2.25. Primjer.

1. Niz realnih brojeva $x_k = (-1)^k$, $k \in \mathbb{N}$, ima dva gomilišta: -1 i 1.

2. Niz $\mathbf{x}_k = \big((-1)^k, \frac{1}{k}\big)$, $k \in \mathbb{N}$, ima dva gomilišta: $(-1, 0)$ i $(1, 0)$.
3. Niz $\mathbf{x}_k = \big(\frac{1}{k}, k\big)$, $k \in \mathbb{N}$, nema gomilište.

2.26. TEOREM
Neka je (X, d) metrički prostor. Točka $x_0 \in X$ gomilište je niza (x_k) onda i samo onda ako postoji podniz (x_{u_k}) koji konvergira prema x_0.

Dokaz. Neka je x_0 gomilište niza (x_k). Definirat ćemo indukcijom strogo rastući niz prirodnih brojeva (u_k) takav da je $x_{u_k} \in K\big(x_0, \frac{1}{k}\big)$. To će značiti da podniz (x_{u_k}) konvergira k x_0 jer $d(x_{u_k}, x_0) \to 0$, što slijedi iz nejednakosti $0 \leq d(x_{u_k}, x_0) < \frac{1}{k}$.

Prema definiciji gomilišta postoji $u_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_{u_1} \in K(x_0, 1)$. Sada odaberimo $u_2 \in \mathbb{N}$ takav da je $u_2 > u_1$ i $x_{u_2} \in K\big(x_0, \frac{1}{2}\big)$. Takav u_2 postoji (vidi primjedbu 2.24.). Nastavljajući taj postupak dolazimo do traženog podniza (x_{u_k}).

Obratno, pretpostavimo da podniz (x_{u_k}) konvergira prema x_0. Neka je U bilo koja otvorena okolina točke x_0. Prema definiciji otvorenog skupa tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0, \varepsilon) \subseteq U$. Kako $x_{u_k} \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi

$$x_{u_k} \in K(x_0, \varepsilon) \subseteq U.$$

Time smo pokazali da U sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_k). Prema tome, x_0 gomilište je niza (x_k). ■

Sada možemo dokazati sljedeći važan teorem za nizove u $\mathbb{R}^n$:

2.27. TEOREM (BOLZANO-WEIERSTRASSOV TEOREM ZA NIZOVE)
Svaki omeđen niz u $\mathbb{R}^n$ ima konvergentan podniz.

Dokaz. Dokaz ćemo napraviti matematičkom indukcijom po dimenziji n prostora $\mathbb{R}^n$. Za $n = 1$ prema propoziciji 2.4. niz (x_k) ima monoton podniz (x_{u_k}) koji je konvergentan prema propoziciji 2.5.

Pretpostavimo da teorem vrijedi u $\mathbb{R}^n$ i dokažimo da tada vrijedi i u $\mathbb{R}^{n+1}$. Neka je $\mathbf{x}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n, x_k^{n+1})$, $k \in \mathbb{N}$, omeđen niz u $\mathbb{R}^{n+1}$. Tada je $\hat{\mathbf{x}}_k = (x_k^1, \ldots, x_k^n)$, $k \in \mathbb{N}$, omeđen niz u $\mathbb{R}^n$, pa po induktivnoj pretpostavci ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $(\hat{\mathbf{x}}_k)$ konvergentan niz. Na taj način ništa ne gubimo, a daljnji zapisi postaju jednostavniji. Nadalje, niz (x_k^{n+1}) omeđen je, ali on ne mora biti konvergentan. Prema već dokazanom slučaju $n = 1$, on ima konvergentan podniz $(x_{u_k}^{n+1})$. Kako je prema propoziciji 2.18. podniz konvergentnog niza i sâm konvergentan, to je $(\hat{\mathbf{x}}_{u_k})$ konvergentan niz u $\mathbb{R}^n$. Prema teoremu 2.20. tada jest konvergentan i podniz $(\mathbf{x}_{u_k})$. ■

2.28. PRIMJEDBA
Bolzano-Weierstrassov teorem ne vrijedi općenito u metričkim prostorima. Zaista, u $\mathbb{R}$ s diskretnom metrikom neki niz jest konvergentan onda i samo onda ako je stacionaran (konstantan od nekog člana pa nadalje). Zato niz (x_k), $x_k = k$, nema konvergentan podniz.

Zadaci za vježbu

1. Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ ekvivalentne norme na realnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$. Dokažite da niz $(\mathbf{x}_k)$ konvergira prema točki $\mathbf{x}_0 \in X$ u jednoj normi onda i samo onda ako i u drugoj normi konvergira prema $\mathbf{x}_0$.

   (Rješenje: Kako su norme ekvivalentne, postoje $m, M > 0$ takvi da je

   $$m\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|' \leq M\|\mathbf{x}\|, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in X.$$

   Radi određenosti pretpostavimo da $(\mathbf{x}_k)$ konvergira prema $\mathbf{x}_0$ u normi $\|\cdot\|$. Tada postoji $k_0 \in \mathbf{N}$ takav da je

   $$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| \leq \frac{\varepsilon}{M}, \quad \forall k \geq k_0.$$

   Zato za svaki $k \geq k_0$ dobivamo

   $$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|' \leq M\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| \leq M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon,$$

   što nam govori da $(\mathbf{x}_k)$ konvergira prema $\mathbf{x}_0$ i u normi $\|\cdot\|'$.)

2. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i $f : X \to Y$ izometrija. Dokažite da niz (x_k) konvergira u prostoru (X, d_X) onda i samo onda ako niz $(f(x_k))$ konvergira u prostoru (Y, d_Y).

3. Dokažite da u diskretnoj metrici niz konvergira onda i samo onda ako je nakon nekog člana konstanta.

4. Odredite gomilišta niza $\mathbf{x}_k = \left(((-1)^k + 1)2^k, \frac{1-2k^2}{k^2+3}\right)$, $k \in \mathbb{N}$.

5. Neka je na $X = \{a, b, c\}$ zadana topologija $\mathcal{U} = \{\emptyset, X, \{a, c\}\}$. Je li točka c gomilište niza $a, b, a, b, a, b, \ldots$ u toj topologiji? A je li točka c limes tog niza u diskretnoj topologiji na istom skupu X?

6. Neka je $(\mathbf{x}_k)$ niz u $\mathbb{R}^n$ takav da je $\lim_{k\to\infty} \|\mathbf{x}_k\| = 0$. Pokažite da je tada $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$.

   (Uputa: $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}_k\| = \big|\|\mathbf{x}_k\| - 0\big|$.)

7. Neka su $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ nizovi u $\mathbb{R}^n$ takvi da niz $(\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k)$ konvergira. Konvergiraju li tada nizovi $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$?

   (Uputa: Promotrite nizove $x_k = (-1)^k$ i $y_k = -(-1)^k$.)

8. Neka su $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ nizovi u $\mathbb{R}^n$. Definirajmo niz $(\mathbf{z}_k)$ na sljedeći način:

   $$\mathbf{z}_{2k} = \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{z}_{2k-1} = \mathbf{y}_k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Pokažite da je niz $(\mathbf{z}_k)$ konvergentan onda i samo onda ako su konvergentni nizovi $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ i ako pri tome vrijedi $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k$.

(Uputa: $\Rightarrow$ Neka $(\mathbf{z}_k)$ konvergira prema $\mathbf{z}_0$. Kako su $(\mathbf{x}_k)$ i $(\mathbf{y}_k)$ podnizovi od $(\mathbf{y}_k)$, oni također konvergiraju prema $\mathbf{z}_0$.
$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je $\lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k = \lim_{k\to\infty} \mathbf{y}_k = \mathbf{x}_0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoje $k_0^x, k_0^y \in \mathbb{N}$ takvi da

$$\begin{aligned} k \geq k_0^x &\Rightarrow d(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon \\ k \geq k_0^y &\Rightarrow d(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_0) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Neka je $k_0 := \max\{2k_0^x, 2k_0^y - 1\}$ i $k \geq k_0$. Ako je $k = 2m$, tada je $m \geq k_0^x$ i zato je $\|\mathbf{z}_k - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$. Ako je $k = 2m-1$, tada je $m \geq k_0^y$ i zato je $\|\mathbf{z}_k - \mathbf{x}_0\| = \|\mathbf{y}_m - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$.)

9. Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u metričkom prostoru (X, d) i neka (x_k) konvergira prema x_0. Pokažite da (y_k) konvergira prema x_0 onda i samo onda ako $d(x_k, y_k) \to 0$.

   (Rješenje: Kako $x_k \to x_0$, postoji $k_0^x \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_0) < \varepsilon/2$ za svaki $k \geq k_0^x$.
   $(\Rightarrow)$ Ako $y_k \to x_0$, onda postoji $k_0^y \in \mathbb{N}$ takav da je $d(y_k, x_0) < \varepsilon/2$ za svaki $k \geq k_0^y$. Neka je $k_0 := \max\{k_0^x, k_0^y\}$. Tada za svaki $k \geq k_0$ pomoću nejednakosti trokuta dobivamo $d(x_k, y_k) \leq d(x_k, x_0) + d(x_0, y_k) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. To znači da niz $d(x_k, y_k)$, $k \in \mathbb{N}$, konvergira prema nuli.
   $(\Leftarrow)$ Neka $d(x_k, y_k) \to 0$. Tada postoji $k_0^{xy} \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, y_k) < \varepsilon/2$ za svaki $k \geq k_0^{xy}$. Neka je $k_0 := \max\{k_0^x, k_0^{xy}\}$. Tada za svaki $k \geq k_0$ pomoću nejednakosti trokuta dobivamo $d(y_k, x_0) \leq d(y_k, x_k) + d(x_k, x_0) < \varepsilon$.)

10. Neka su (x_k) i (y_k) nizovi u metričkom prostoru (X, d) takvi da $x_k \to x_0$, a $y_k \to y_0$. Pokažite da $d(x_k, y_k) \to d(x_0, y_0)$.

    (Uputa: Iskoristite nejednakost $|d(x_k, y_k) - d(x_0, y_0)| \leq d(x_k, x_0) + d(y_k, y_0)$ iz zadatka 15 sa str. 35)

11. Pokažite da Bolzano-Weierstrassov teorem za nizove ne vrijedi u prostoru $\mathbb{R}^n$ s diskretnom topologijom.

    (Uputa: $\mathbb{R}^n$ s diskretnom metrikom omeđen je, $\operatorname{diam} \mathbb{R}^n = 1$, pa je i svaki niz omeđen. Niz $\mathbf{x}_k = (k, k, \ldots, k) \in \mathbb{R}^n$ nema konvergentan podniz jer u diskretnoj metrici niz konvergira onda i samo onda ako je nakon nekog člana konstanta.)

12. Neka je na $\mathbb{R}$ zadana topologija $\mathcal{U} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$. Je li niz (x_k), $x_k = k$, konvergentan, te ako jest, je li njegov limes jedinstven?

3. Konvergencija nizova funkcija

3.1. Konvergencija po točkama

3.1. Definicija
Neka je S bilo koji neprazan skup i (X, d) metrički prostor. Nadalje, neka su na skupu S definirani niz (f_k) funkcija $f_k : S \to X$ i funkcija $f : S \to X$. Kažemo da niz funkcija (f_k) **konvergira** prema funkciji f **u točki** $t_0 \in S$ **s obzirom na metriku** d ako niz $(f_k(t_0))$ konvergira prema $f(t_0)$.

Ako niz funkcija (f_k) konvergira prema funkciji f u svakoj točki $t \in S$, onda kažemo da (f_k) **konvergira po točkama** ili **obično** prema funkciji f na skupu S.

Vidimo da se obična konvergencija na skupu S može iskazati ovako:

$$\begin{aligned}&(\forall t \in S)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N})\\ &\quad k \geq k_0 \Rightarrow d(f_k(t), f(t)) < \varepsilon.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Konvergencija po točkama nije naročito korisna. Ona nam ne osigurava derivabilnost limesa niza derivabilnih funkcija niti nam osigurava integrabilnost (u Riemannovom smislu) limesa niza integrabilnih funkcija. Prema tome, derivacija i limes niza funkcija te integral i limes niza funkcija općenito ne „komutiraju”, tj. ne vrijede formule

$$\frac{d}{dx}(\lim_{k\to\infty} f_k) = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{d}{dx} f_k\right)$$

$$\int_a^b (\lim_{k\to\infty} f_k(x))\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx$$

jer lijeve strane u tim formulama općenito ne postoje. Čak i onda kad postoje lijeve strane, gornje formule općenito ne vrijede. Za ilustraciju navodimo jednostavne primjere:

3.2. Primjer.

a) Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definirajmo derivabilnu funkciju $f_k : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ formulom $f_k(x) = |x|^{1+\frac{1}{k}}$. Niz funkcija (f_k) konvergira k funkciji $f(x) = |x|$ koja nije derivabilna u točki $x = 0$.

b) Poslažimo racionalne brojeve iz skupa $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ u niz $q_1, q_2, q_3, \ldots$. Kako je $\mathbb{Q}$ prebrojiv skup, to je moguće. Sada definirajmo funkcije $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in \{q_1, \ldots, q_k\} \\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ funkcija f_k integrabilna je jer ima konačno mnogo prekida i pri tome je $\int_0^1 f_k(x)\,dx = 0$. Međutim, granična funkcija $f = \lim_k f_k$ jest tzv. Dirichletova funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \text{ racionalan} \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan} \end{cases}$$

koja nije integrabilna.

c) Neka je za svaki $k \in \mathbb{N}$ zadana derivabilna funkcija $f_k : \mathbb{R} :\to \mathbb{R}$ formulom $f_k(x) = \frac{x}{1+kx^2}$. Niz funkcija (f_k) konvergira ka funkciji $f = 0$ i zato je

$$\frac{d}{dx}(\lim_{k\to\infty} f_k(x)) = 0.$$

Kako je $\frac{d}{dx} f_k(x) = \frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}$, to je

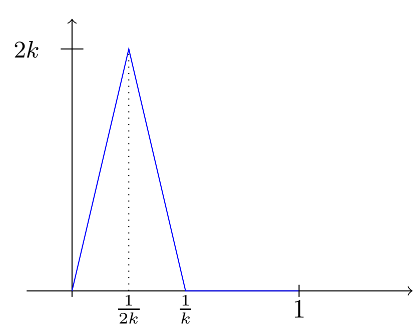
$$\lim_{k\to\infty} \frac{d}{dx} f_k(x) = \begin{cases} 1, \, x = 0 \\ 0, \, x \neq 0, \end{cases}$$

odakle vidimo da derivacija i limes ne „komutiraju” u točki $x = 0$.

d) Neka je za svaki $k \in \mathbb{N}$ formulom

$$f_k(x) = \begin{cases} 4k^2 x, & \text{ako je } 0 \leq x < \frac{1}{2k} \\ 4k - 4k^2 x, & \text{ako je } \frac{1}{2k} \leq x < \frac{1}{k} \\ 0, & \text{ako je } \frac{1}{k} < x \leq 1 \end{cases}$$

definirana integrabilna funkcija na segmentu $[0, 1]$.



Slika 9. Graf funkcije f_k.

Nije teško pokazati da niz funkcija (f_k) po točkama konvergira prema integrabilnoj nul funkciji, tj. $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = 0$ za svaki $x \in [0, 1]$. Kako je

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx = 1, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

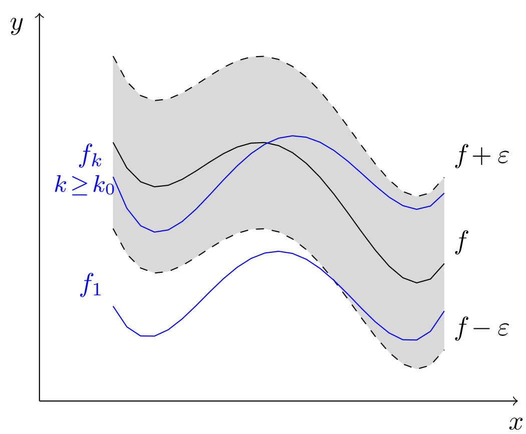
dobivamo
$$0 = \int_0^1 (\lim_{k\to\infty} f_k(x))\, dx \neq \lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)\, dx = 1.$$

3.2. Uniformna konvergencija

3.3. Definicija
Neka je S bilo koji neprazan skup, a (X, d) metrički prostor. Za niz (f_k) funkcija $f_k : S \to X$ kažemo da uniformno konvergira prema funkciji $f : S \to X$ na skupu S ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $k \geq k_0$ i za sve $t \in S$ vrijedi $d(f_k(t), f(t)) < \varepsilon$ (slika 10).

Uniformna se konvergencija na skupu S simbolički može zapisati kao

$$\begin{aligned}(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall t \in S)(\forall k \in \mathbb{N})\\ k \geq k_0 \Rightarrow d(f_k(t), f(t)) < \varepsilon.\end{aligned} \tag{3.2}$$



Slika 10.

Na prvi pogled izgleda da se (3.2) ne razlikuje od (3.1). No to nije točno, treba uočiti da se zagrada $(\forall t \in S)$ kod (3.1) nalazi na prvom mjestu, a kod (3.2) na trećem mjestu. Upravo zbog toga kod obične konvergencije (po točkama) broj k_0 općenito ovisi i o ε i o t, dok kod uniformne konvergencije ovisi samo o ε.

Očito je da uniformna konvergencija povlači običnu konvergenciju. Obratno ne vrijedi, kao što pokazuje sljedeći primjer.

3.4. Primjer. Neka je $S = [0, 1]$ i neka je niz funkcija (f_k) definiran formulom $f_k(t) = t^k$, $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$. Taj niz konvergira obično prema funkciji

$$f(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \leq t < 1 \\ 1, \ t = 1. \end{cases}$$

Pokažimo da konvergencija nije uniformna. U tu je svrhu dovoljno pokazati da za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $t \in [0, 1)$ takav da je $|f_k(t) - f(t)| = t^k \geq 1/2$, pa konvergencija ne može biti uniformna. Zaista, za svaki $t \in \left[1 - \frac{1}{2k}, 1\right)$ pomoću Bernoullijeve nejednakosti dobiva se $t^k = \big(1 + (t - 1)\big)^k \geq 1 + k(t - 1) \geq \frac{1}{2}$.

Bernoullijeva nejednakost glasi: za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki realan broj $x \geq -1$ vrijedi $(1+x)^n \geq 1 + nx$, pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $n = 1$ ili $x = 0$.

3.5. Primjer.

a) U primjeru 3.2.a) pokazali smo da niz (f_k) derivabilnih funkcija

$$f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = |x|^{1+\frac{1}{k}}$$

konvergira po točkama, na segmentu $[-1,1]$, prema funkciji $f(x) = |x|$ koja nije derivabilna. Pokažimo da taj niz funkcija konvergira i uniformno. U tu svrhu, neka je zadan $\varepsilon > 0$. Treba pokazati da postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f(x) - f_k(x)| < \varepsilon \quad \text{za sve } x \in [-1,1] \text{ i za sve } k \geq k_0.$$

Lako je pokazati da funkcija $u_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ zadana formulom $u(t) = t(1-t^{\frac{1}{k}})$, gdje je $k \in \mathbb{N}$, u točki $t_k = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}$ prima maksimalnu vrijednost

$$u_k(t_k) = \frac{1}{(1+\frac{1}{k})^k(1+k)} < \frac{1}{2(k+1)} < \frac{1}{k}.$$

Zato za svaki $x \in [-1,1]$ vrijedi

$$|f(x) - f_k(x)| = |x|(1-|x|^{\frac{1}{k}}) = u_k(|x|) < \frac{1}{k},$$

odakle se vidi da za traženi $k_0 \in \mathbb{N}$ možemo odabrati bilo koji prirodan broj veći od $\frac{1}{\varepsilon}$.

b) Niz funkcija (f_k) iz primjera 3.2.c) konvergira po točkama prema nul funkciji na cijelom $\mathbb{R}$. Taj niz fukcija i uniformno konvergira prema nul funkciji na cijelom $\mathbb{R}$. Zaista, iz nejednakosti $\frac{1+kx^2}{2} \geq \sqrt{k}|x|$ slijedi $|\frac{x}{1+kx^2}| \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$, odakle je lako zaključiti da se radi o uniformnoj konvergenciji na cijelom $\mathbb{R}$.

Dakle, to je primjer niza derivabilnih funkcija koji uniformno konvergira prema derivabilnoj funkciji, ali limes i derivacija ne „komutiraju".

3.6. Primjedba

Neka je S bilo koji neprazan skup, a (X,d) metrički prostor. Niz (f_k) funkcija $f_k : S \to X$ uniformno konvergira prema funkciji $f : S \to X$ na skupu S onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\sup_{t \in S} d(f_k(t), f(t)) < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0.$$

3.7. Primjedba

Prisjetimo se normiranog prostora $(B(S,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, tj. skupa $B(S,\mathbb{R})$ svih omeđenih realnih funkcija na S s uniformnom normom $\|\cdot\|_\infty$ koja je definirana formulom

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in S} |f(t)|, \quad f \in B(S,\mathbb{R}).$$

Neka je (f_k) niz u $B(S,\mathbb{R})$. Taj niz konvergira u normi $\|\cdot\|_\infty$ prema funkciji $f \in B(S,\mathbb{R})$ onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\|f_k - f\|_\infty = \sup_{t\in S} |f_k(t) - f(t)| < \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0,$$

a prema prethodnoj će propoziciji to biti onda i samo onda ako niz (f_k) uniformno konvergira prema f na S. Dakle, kratko rečeno, konvergencija u normi $\|\cdot\|_\infty$ jest zapravo uniformna konvergencija na skupu S.

Sljedeća definicija i teorem omogućavaju nam ispitati uniformnu konvergenciju niza realnih funkcija bez određivanja granične funkcije, analogno kao što se ima kod Cauchyjevog kriterija konvergencije nizova realnih brojeva.

3.8. Definicija

Neka je S bilo koji neprazan skup. Niz funkcija (f_k), $f_k : S \to \mathbb{R}$, je uniformno Cauchyjev na S ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_m(x) - f_k(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in S,\ \forall m,k \geq k_0. \tag{3.3}$$

3.9. Primjedba

Niz funkcija (f_k), $f_k : S \to \mathbb{R}$, je uniformno Cauchyjev na S onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sup_{x\in S} |f_m(x) - f_k(x)| < \varepsilon, \quad \forall m,k \geq k_0.$$

3.10. Teorem

Neka je S neprazan skup, a (f_k) niz funkcija $f_k : S \to \mathbb{R}$. Vrijedi:

a) Niz funkcija (f_k) uniformno konvergira na S (prema nekoj funkciji $f : S \to \mathbb{R}$) onda i samo onda ako je taj niz uniformno Cauchyjev na S.

b) Ako su sve funkcije f_k omeđene na S i ako niz funkcija (f_k) konvergira uniformno na S prema funkciji $f : S \to \mathbb{R}$, onda je funkcija f omeđena na S.

Dokaz. *a)* Pretpostavimo da (f_k) konvergira uniformno na S prema $f : S \to \mathbb{R}$. Neka je zadan $\varepsilon > 0$. Tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in S,\ \forall k \geq k_0.$$

Zato za sve $k, m \geq k_0$ i za svaki $x \in S$ vrijedi

$$|f_m(x) - f_k(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

iz čega slijedi da je (f_k) uniformno Cauchyjev niz na S.

Obratno, pretpostavimo da je (f_k) uniformno Cauchyjev niz na S. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_m(x) - f_k(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in S, \ \forall m, k \geq k_0, \tag{3.4}$$

odakle vidimo da je niz realnih brojeva $(f_k(x))$ Cauchyjev za svaki $x \in S$, pa je zato i konvergentan. Definirajmo funkciju f na S tako da stavimo

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_k(x), \quad x \in S.$$

Ako u (3.4) fiksiramo $k \geq k_0$ i zatim napravimo granični prijelaz po m, dobivamo

$$|f(x) - f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall x \in S, \ \forall k \geq k_0, \tag{3.5}$$

što pokazuje da (f_k) konvergira uniformno prema f na S.

b) Iz (3.5) slijedi da je za $k \geq k_0$ funkcija $f - f_k$ omeđena na S. Kako je $f = (f - f_k) + f_k$ te kako su $f - f_k$ i f_k omeđene funkcije na S, na skupu S omeđena je i funkcija f. ■

Tvrdnja b) teorema 3.10. govori nam da uniformna konvergencija čuva omeđenost. Zato vrijedi sljedeći korolar.

3.11. KOROLAR
Ako niz omeđenih funkcija konvergira po točkama ka neomeđenoj funkciji, tada taj niz ne konvergira uniformno.

3.12. PRIMJER. Neka je (f_k) niz funkcija $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiran s $f_k(x) = \frac{k}{1+kx}$. Kako je

$$|f_k(x)| \leq k, \quad \forall\, x \in (0,1),$$

funkcija f_k omeđena je na intervalu $(0,1)$. Budući da niz (f_k) konvergira po točkama na $(0,1)$ ka neomeđenoj funkciji $f(x) = \frac{1}{x}$, ta konvergencija nije uniformna.

Kao što smo vidjeli u primjeru 3.2.b), konvergencija po točkama niza integrabilnih funkcija ne osigurava integrabilnost granične funkcije. Sljedeći teorem govori nam da uniformna konvergencija niza integrabilnih funkcija osigurava integrabilnost granične funkcije te pri tome limes i integral „komutiraju".

3.13. TEOREM
Neka je (f_k) niz integrabilnih funkcija $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ koji na $[a,b]$ uniformno konvergira prema funkciji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

(a) Funkcija f integrabilna je na $[a,b]$.

(b) Integral i limes niza funkcija „komutiraju", tj. vrijedi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Dokaz.
(a) Treba pokazati da je f ograničena na $[a,b]$, te da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji subdiviziju P_0 segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f,P_0) - s(f,P_0) < \varepsilon$, gdje su $S(f,P_0)$ gornja, a $s(f,P_0)$ donja Darbouxova suma funkcije f pridružena subdiviziji P_0.

Neka je zadan $\varepsilon > 0$. Zbog uniformne konvergencije postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \qquad \text{za svaki } k \geq k_0 \text{ i za sve } x \in [a,b],$$

tj., ekvivalentno,

$$f_k(x) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} < f(x) < f_k(x) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall\, k \geq k_0,\ \forall x \in [a,b]. \tag{3.6}$$

Budući da je f_k ograničena na $[a,b]$, iz (3.6) slijedi ograničenost funkcije f na $[a,b]$.

Neka je $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bilo koja subdivizija segmenta $[a,b]$. Nadalje, neka je

$$\begin{aligned} m_i(f) &:= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad & m_i(f_k) &:= \inf\{f_k(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i(f) &:= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \qquad & M_i(f_k) &:= \sup\{f_k(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}. \end{aligned}$$

Tada iz (3.6) slijedi

$$m_i(f_k) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leq m_i(f),\ M_i(f) \leq M_i(f_k) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}, \quad \forall\, k \geq k_0,$$

odakle dobivamo

$$M_i(f) - m_i(f) \leq M_i(f_k) - m_i(f_k) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad \forall\, k \geq k_0.$$

Zato je

$$\begin{aligned} S(f,P) - s(f,P) &= \sum_{i=1}^n [M_i(f) - m_i(f)](x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left[M_i(f_k) - m_i(f_k) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right](x_i - x_{i-1}) \\ &= S(f_k,P) - s(f_k,P) + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Kako je funkcija f_k, $k \geq k_0$, integrabilna na segmentu $[a,b]$, postoji subdivizija P_0 segmenta $[a,b]$ takva da je $S(f_k,P_0) - s(f_k,P_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Zato je $S(f,P_0) - s(f,P_0) < \varepsilon$.

(b) Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog uniformne konvergencije postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \text{za sve } k \geq k_o \text{ i za sve } x \in [a,b].$$

Zato za sve $k \geq k_0$ vrijedi

$$\begin{aligned}\Big|\int_a^b f_k(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big| &= \Big|\int_a^b (f_k(x) - f(x))\,dx\Big| \\ &\leq \int_a^b \big|f_k(x) - f(x)\big|\,dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Time smo pokazali da je

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

■

U matematičkoj analizi od posebnog je interesa uniformna konvergencija redova funkcija. Neka je S neki skup i $\sum f_k$ red realnih funkcija $f_k : S \to \mathbb{R}$. Kažemo da red $\sum f_k$ konvergira [odnosno, uniformno konvergira] prema funkciji $f : S \to \mathbb{R}$ na skupu S ako niz parcijalnih suma (s_k), $s_k = \sum_{i=1}^k f_i$, konvergira [odnosno, uniformno konvergira] prema f.

Konvergentan red funkcija može se, uz određene uvjete, integrirati član po član. Slična je situacija i s deriviranjem. Za dokaz tih tvrdnji treba nam sljedeća lema.

3.14. Lema

Neka je (f_k) niz funkcija $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ na $[a,b]$. Ako je svaka od funkcija f_k neprekidna u točki $x_0 \in [a,b]$, onda je i granična funkcija f neprekidna u x_0.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema definiciji uniformne konvergencije postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svaki } x \in [a,b] \text{ i za svaki } k \geq k_0. \tag{3.7}$$

Kako je f_{k_0} neprekidna u točki x_0, postoji $\delta > 0$ takav da je

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x0 + \delta) \cap [a,b])\ |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.8}$$

Sada za svaki $k \geq k_0$ i za svaki $x \in (x_0 - \delta, x0 + \delta) \cap [a,b])$ pomoću (3.7) i (3.8) dobivamo

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

što dokazuje da je f neprekidna u točki x_0. ■

Sljedeći korolar teorema 3.13. govori nam kada se konvergentni redovi funkcija smiju integrirati član po član.

3.15. Korolar

Neka red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ *neprekidnih funkcija* $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uniformno konvergira prema funkciji* f *na* $[a,b]$. *Tada za svaki* $x \in [a,b]$ *red* $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(t)\,dt$ *konvergira i suma mu je* $\int_a^x f(t)\,dt$, *tj.*

$$\int_a^x \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\Big)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_a^k f_k(t)\,dt\Big).$$

Dokaz. Parcijalne sume $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$ tvore niz neprekidnih funkcija na $[a,b]$ koji uniformno konvergira prema funkciji f ($f = \lim_{k\to\infty} s_k$). Prema lemi 3.14., f jest neprekidna na $[a,b]$. Zato su f i sve funkcije s_k neprekidne i na svakom segmentu $[a,x]$, $x \in [a,b]$, pa su stoga i integrabilne na $[a,x]$. Prema teoremu 3.13. jest

$$\int_a^x f(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_a^x s_k(t)\,dt,$$

tj.

$$\int_a^x \Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\Big)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\int_a^k f_k(t)\,dt\Big).$$

■

Teorem 3.13. govori nam da uniformna konvergencija niza integrabilnih funkcija osigurava integrabilnost granične funkcije i „komutiranje" limesa i integrala. Međutim, što se tiče derivabilnosti, situacija je suptilnija. Kao što nam ilustrira primjer 3.5.a), uniformna konvergencija niza derivabilnih funkcija nije dovoljna za derivabilnost granične funkcije. Štoviše, čak i kad je derivabilna granična funkcija, derivacija i limes ne moraju „komutirati" (vidi primjer 3.5.b)).

Sljedeći teorem govori nam o komutiranju derivacije i limesa niza funkcija. Prvo se prisjetimo da je neka funkcija neprekidno derivabilna ako joj je derivacija neprekidna funkcija.

3.16. Teorem

Neka je (f_k) *niz neprekidno derivabilnih funkcija* $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ *koji na* $[a,b]$ *konvergira (obično) prema funkciji* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. *Ako niz derivacija* (f_k') *uniformno konvergira na* $[a,b]$ *prema funkciji* g, *onda je funkcija* f *derivabilna i* $f' = g$, *tj.*

$$\frac{d}{dx}(\lim_{k\to\infty} f_k) = \lim_{k\to\infty} \Big(\frac{d}{dx} f_k\Big).$$

Dokaz. Iz leme 3.14. slijedi neprekidnost funkcije g na segmentu $[a,b]$. Zato je ona integrabilna i na svakom segmentu $[a,x]$, $x \in (a,b]$. Prema teoremu 3.13., za svaki $x \in (a,b]$ dobivamo

$$\int_a^x g(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} \int_a^x f_k'(t)\,dt = \lim_{k\to\infty} [f_k(x) - f_k(a)] = f(x) - f(a),$$

odakle je

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Iz posljednje jednakosti zaključujemo da je f derivabilna i $f' = g$. ■ .

Sljedeći korolar govori nam kada se konvergentni redovi funkcija smiju derivirati član po član.

3.17. KOROLAR

Neka red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ neprekidno derivabilnih funkcija $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergira prema funkciji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ i neka red $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ uniformno konvergira prema $g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Tada je $f' = g$ na $[a,b]$, tj.

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\Big)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'.$$

Dokaz. Parcijalne sume $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$ tvore niz neprekidno derivabilnih funkcija na $[a,b]$ koji konvergira prema funkciji f, a niz (s_k') uniformno konvergira prema funkcij g. Tvrdnja slijedi iz teorema 3.16. ■

Zadaci za vježbu

1. Neka je za $k \in \mathbb{N}$ funkcija $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f_k(x) = \begin{cases} -nx + 1, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

   (a) Pronađite funkciju f kojoj niz funkcija (f_k) konvergira po točkama.

   (b) Konvergira li niz (f_k) uniformno prema f?

   (Uputa: (b) Za zadani $\varepsilon > 0$ neka je $x_\varepsilon := \frac{2\varepsilon}{k}$, a zatim pogledajte razliku $|f_k(x_\varepsilon) - f(x_\varepsilon)|$.)

2. Pokažite da niz funkcija $f_k(x) = \frac{1+2\cos^2(kx)}{\sqrt{k}}$, $k \in \mathbb{N}$, uniformno konvergira na $\mathbb{R}$ prema 0.

   (Uputa: $|f_k(x) - 0| = \left|\frac{1+2\cos^2(kx)}{\sqrt{k}}\right| \le \frac{3}{\sqrt{k}}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{3}{\sqrt{k_0}} < \varepsilon$. Tada za svaki $k \ge k_0$ i za sve $x \in \mathbb{R}$ dobivamo $|f_k(x) - 0| < \varepsilon$.)

3. Neka je $f_k(x) = \frac{x}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, niz funkcija.

   (a) Pokažite da niz funkcija (f_k) uniformno konvergira na $[0,1)$.

   (b) Pokažite da niz funkcija (f_k) ne konvergira uniformno na $[0,\infty)$.

   (Uputa: Očito niz funkcija (f_k) konvergira obično prema 0. (a) Dokaz je jednostavan. (b) Treba pokazati da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $k_0 \in \mathbb{N}$

postoje $k \geq k_0$ i $x \in [0, \infty)$ takvi da je $|f_k(x) - 0| \geq \varepsilon$, što se dobiva negiranjem definicije uniformne konvergencije niza funkcija Neka je $\varepsilon = 1$ i $k_0 \in \mathbb{N}$. Za svaki $k \geq k_0$ možemo odabrati $x > k$, pa je tada $|f_k(x) - 0| = \frac{x}{k} > 1$.)

4. Dokažite da je uniformna konvergencija niza realnih funkcija metričko, a ne topološko svojstvo. Drugim riječima, pronađite dvije topološki ekvivalentne metrike na $\mathbb{R}$ te niz realnih funkcija koji u jednoj metrici uniformno konvergira, a ne konvergira uniformno u drugoj metrici. Je li isto moguće postići ako su metrike ekvivalentne?

   (Uputa: $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = x + \frac{1}{k}$, a metrike $d(x, y) = |x - y|$ i $\varrho(x, y) = |x - y| + |x^2 - y^2|$.)

4. Potpuni metrički prostori

4.1. DEFINICIJA
Za niz (x_k) u metričkom prostoru (X, d) kažemo da je Cauchyjev ili fundamentalan ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $d(x_m, x_k) < \varepsilon$ za sve $m, k \geq k_0$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists k_0 \in \mathbb{N})\ \ m, k \geq k_0 \Longrightarrow d(x_m, x_k) < \varepsilon.$$

4.2. PRIMJER. Neka je $x_k = \frac{1}{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, opći član niza u skupu $X = (0, 1)$ s euklidskom metrikom. Pokazat ćemo da je taj niz Cauchyjev. Neka su $m, k \in \mathbb{N}$. Bez smanjnja općenitosti, pretpostavimo da je $m > k$. Tada je

$$|x_m - x_k| = \Big|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{k+1}\Big| = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{m+1} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $k_0 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Tada za sve $m, k \geq k_0$ vrijedi $|x_m - x_k| < \varepsilon$. Time smo pokazali da je $\left(\frac{1}{k+1}\right)$ Cauchyjev niz.

Kako je $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$, taj niz ne konvergira u prostoru $X = (0, 1)$.

Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, Cauchyjev niz u metričkom prostoru općenito ne mora biti konvergentan u tom prostoru. Ipak vrijedi sljedeći teorem:

4.3. TEOREM
U metričkom prostoru (X, d) vrijedi:

(a) Svaki je konvergentan niz Cauchyjev.

(b) Svaki je Cauchyjev niz omeđen.

(c) Ako neki podniz Cauchyjeva niza konvergira prema x_0, onda i cijeli niz konvergira prema x_0.

Dokaz. *(a)* Neka $x_k \to x_0$. Po definiciji limesa tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $d(x_k, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ za svaki $k \geq k_0$. Zato za sve $m, k \geq k_0$ pomoću nejednakosti trokuta dobivamo:

$$d(x_m, x_k) \leq d(x_m, x_0) + d(x_0, x_k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dakle, (x_k) Cauchyjev je niz.
(b) Niz (x_k) Cauchyjev je pa specijalno za $\varepsilon = 1$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $d(x_k, x_{k_0}) < 1$ za sve $k \geq k_0$. Neka je

$$M := \max\{1, d(x_1, x_{k_0}), d(x_2, x_{k_0}), \ldots, d(x_{k_0-1}, x_{k_0})\} + 1.$$

Tada su svi članovi niza (x_k) sadržani u otvorenoj kugli $K(x_{k_0}, M)$, što znači da je niz omeđen.

(c) Pretpostavimo da podniz (x_{u_k}) konvergira prema x_0. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Niz (x_k) jest Cauchyjev, pa zato postoji $k_1 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_m, x_k) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{za sve } m, k \geq k_1. \tag{4.1}$$

Nadalje, kako je $\lim_{k\to\infty} x_{u_k} = x_0$, postoji $k_2 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_{u_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{za svaki } k \geq k_2. \tag{4.2}$$

Neka je $k_0 := \max\{k_1, k_2\}$. Tada za svaki $k \geq k_0$ vrijede nejednakosti (4.1) i (4.2). Nadalje, prema (2.1) jest $u_k \geq k$ i zato je

$$d(x_k, x_0) \leq d(x_k, x_{u_k}) + d(x_{u_k}, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

4.4. Primjedba

Prema prethodnom teoremu, kod Cauchyjeva niza konvergencija nekog podniza povlači konvergenciju cijelog niza. Da to općenito ne vrijedi pokazuje nam niz $0, 1, 0, 1, \ldots$.

4.5. Teorem

U n-dimenzionalnom euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$ svaki je Cauchyjev niz konvergentan.

Dokaz. Neka je $(\mathbf{x}_k)$ Cauchyjev niz u $(\mathbb{R}^n, d)$. Prema tvrdnji (b) teorema 4.3. $(\mathbf{x}_k)$ jest omeđen, pa prema teoremu 2.27. ima konvergentan podniz $(\mathbf{x}_{u_k})$ koji konvergira prema nekoj točki $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Sada prema tvrdnji (c) teorema 4.3. slijedi da i niz $(\mathbf{x}_k)$ konvergira prema $\mathbf{x}_0$. ■

Teoremi 4.3. i 4.5. daju sljedeći korolar:

4.6. Korolar

Niz $(\mathbf{x}_k)$ u euklidskom prostoru $(\mathbb{R}^n, d)$ je konvergentan onda i samo onda ako je on Cauchyjev niz.

4.7. Definicija

Za metrički prostor (X, d) kažemo da je potpun ako svaki Cauchyjev niz iz X konvergira prema nekoj točki iz X.

4.8. Primjer.

(a) $X = (0, 1)$ s euklidskom metrikom nije potpun prostor (vidi primjer 4.2.).

(b) Euklidski prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$ jest potpun.

Potpun normiran vektorski prostor zove se Banachov prostor, a za potpun unitaran vektorski prostor kažemo da je Hilbertov prostor.

4.9. Teorem
Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Skup $F \subseteq X$ zatvoren je onda i samo onda ako je (F, d) potpun metrički prostor.

Dokaz. Pretpostavimo da je $F \subseteq X$ zatvoren skup. Neka je (x_k) Cauchyjev niz u F. Tada je (x_k) ujedno i Cauchyjev niz u X, pa zbog potpunosti prostora (X, d) postoji točka $x_0 \in X$ prema kojoj (x_k) konvergira. Zbog zatvorenosti skupa F, prema teoremu 2.15. jest $x_0 \in F$, što pokazuje da (x_k) konvergira u (F, d).

Obratno, pretpostavimo da je (F, d) potpun metrički prostor. Prema teoremu 2.15. dovoljno je pokazati da svaki niz (x_k) iz F koji konvergira u X ima limes u F. Neka je (x_k) niz u F koji konvergira prema $x_0 \in X$. Tada je (x_k) ujedno i niz u X koji konvergira prema x_0. Prema teoremu 4.3. (x_k) Cauchyjev je niz, pa zbog potpunosti prostora (F, d) postoji točka $f_0 \in F$ prema kojoj on konvergira. Zbog jedinstvenosti limesa je $f_0 = x_0$. ■

4.10. Primjer.

(a) Segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ potpun je metrički prostor.

(b) Prostor racionalnih brojeva $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ nije zatvoren, pa nije ni potpun.

4.11. Teorem

a) Prostor $(B(S, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ jest Banachov.

b) Prostor $(C([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ jest Banachov.

Dokaz. *a)* Neka je (f_k) Cauchyjev niz u normiranom prostoru $(B(S, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Treba pokazati da je (f_k) konvergentan niz u prostoru $(B(S, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, tj. da konvergira u normi $\|\cdot\|_\infty$ prema nekoj omeđenoj funkciji $f : S \to \mathbb{R}$. Prema primjedbi 3.7., konvergencija u normi $\|\cdot\|_\infty$ prema f ekvivalentna je uniformnoj konvergenciji funkcije f na skupu S.

Kako je (f_k) Cauchyjev niz u prostoru $(B(S, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sup_{x \in S} |f_m(x) - f_k(x)| = \|f_m - f_k\|_\infty < \varepsilon, \quad \forall m, k \geq k_0.$$

To znači da je (f_k) uniformno Cauchyjev niz. Zato, prema tvrdnji a) teorema 3.10., niz (f_k) uniformno konvergira na S prema nekoj funkciji $f : S \to \mathbb{R}$. Budući da su sve funkcije f_k omeđene ($f_k \in B(S, \mathbb{R})$), prema tvrdnji b) teorema 3.10. funkcija f je omeđena na skupu S.

b) U ovom je slučaju $S = [a, b]$. Neka je (f_k) Cauchyjev niz u normiranom prostoru $(BC(S, \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$. Kako je $BC(S, \mathbb{R}) \subseteq B(S, \mathbb{R})$, (f_k) je Cauchyjev niz u prostoru $(B(S, \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$. Zato, prema već dokazanoj tvrdnji *a)*, niz (f_k) konvergira u normi $\| \cdot \|_\infty$ prema nekoj omeđenoj funkciji $f : S \to \mathbb{R}$. Neprekidnost funkcije f slijedi iz leme 3.14. ■

4.12. Primjedba
Navedimo bez dokaza da prostori $(C([a, b], \mathbb{R}), \| \cdot \|_1)$ i $(C([a, b], \mathbb{R}) \| \cdot \|_2)$ nisu potpuni. Za dokaz vidi npr. [1].

4.13. Definicija
Neka je (X, d_X) metrički prostor. Za par $\big((Y, d_Y), h\big)$ koji se sastoji od potpunog metričkog prostora (Y, d_Y) i izometrije $h : X \to Y$ kažemo da je **upotpunjenje prostora** X ako je $h(X)$ gust skup u prostoru Y.

4.14. Primjer. Upotpunjenje prostora $\mathbb{Q}$ racionalnih brojeva jest prostor $\mathbb{R}$ realnih brojeva zajedno s inkluzijom $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$.

4.15. Primjedba
Može se pokazati da za svaki metrički prostor postoji njegovo upotpunjenje (vidi [3]).

Zadaci za vježbu

1. Pokažite direktno iz definicije da su sljedeći nizovi Cauchyjevi:

   (a) $x_k = \frac{1}{k}$.

   (b) $x_k = \frac{k+1}{k}$.

   (c)$x_k = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}$.

   (Uputa: (a) Ako je $m > k$, onda je $|x_m - x_k| = \left| \frac{1}{m} - \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \leq \frac{1}{k}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberite $k_0 > 1/\varepsilon$. Tada za sve $m, k \geq k_0$ vrijedi $|x_m - x_k| < \varepsilon$. (b) Ako je $m > k$, onda je $|x_m - x_k| = \frac{m-k}{km} \leq \frac{1}{k}$. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberite $k_0 > 1/\varepsilon$. Tada za sve $m, k \geq k_0$ vrijedi $|x_m - x_k| < \varepsilon$. (c) Ako je $m > k$, onda je

   $$|x_m - x_k| = \sum_{i=k+1}^{m} \frac{1}{i!} < \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{i!} \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

   Odaberite $k_0 > 1 + \log_2(1/\varepsilon)$. Tada za sve $m, k \geq k_0$ vrijedi

   $$|x_m - x_k| < 2^{-k+1} \leq 2^{-k_0+1} < 2^{-\log_2(1/\varepsilon)} = \varepsilon.)$$

2. Neka je $s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$ k-ta parcijalna suma harmonijskog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Pokažite da (s_k) nije Cauchyjev niz, što će značiti da harmonijski red ne konvergira.

   (Uputa: $s_{2k+1} - s_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k+1} \geq \frac{k+1}{2k+1} > \frac{1}{2}$.)

3. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i $f : X \to Y$ izometrija. Dokažite da je niz (x_k) Cauchyjev u prostoru (X, d_X) onda i samo onda ako je niz $(f(x_k))$ Cauchyjev u prostoru (Y, d_Y).

4. Neka su $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|'$ ekvivalentne norme na realnom vektorskom prostoru $(X, +, \cdot)$.

   (a) Dokažite da je niz $(\mathbf{x}_k)$ Cauchyjev u prostoru $(X, \|\cdot\|)$ onda i samo onda ako je Cauchyjev u prostoru $(X, \|\cdot\|')$.

   (b) Dokažite da je prostor $(X, \|\cdot\|)$ potpun onda i samo onda ako je $(X, \|\cdot\|')$ potpun.

   (Rješenje: Kako su norme ekvivalentne, postoje $m, M > 0$ takvi da je

   $$m\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}\|' \leq M\|\mathbf{x}\|, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in X.$$

   (a) Radi određenosti, neka je $(\mathbf{x}_k)$ Cauchyjev niz u $(X, \|\cdot\|')$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

   $$\|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k\|' < \varepsilon m, \quad \forall\, k, l \geq k_0,$$

   odakle dobivamo da je

   $$\|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}_k\| < \varepsilon, \quad \forall\, k, l \geq k_0,$$

   što nam govori da je $(\mathbf{x}_k)$ Cauchyjev niz u $(X, \|\cdot\|)$.

   (b) Radi određenosti, pretpostavimo da je $(X, \|\cdot\|')$ potpun. Neka je $(\mathbf{x}_k)$ Cauchyjev niz u $(X, \|\cdot\|)$. Prema tvrdnji (a) tada je $(\mathbf{x}_k)$ Cauchyjev i u $(X, \|\cdot\|')$. Zbog potpunosti prostora $(X, \|\cdot\|')$, postoji točki $x_0 \in X$ prema kojoj taj niz konvergira u $\|\cdot\|'$ normi. Tada $(\mathbf{x}_k)$ konvergira prema $\mathbf{x}_0$ i u normi $\|\cdot\|$ (vidi zadatak 1 na str. 52.)

5. Neka su d_1 i d_2 ekvivalentne metrike na skupu X. Dokažite da je niz (x_k) Cauchyjev u prostoru (X, d_1) onda i samo onda ako je Cauchyjev u prostoru (X, d_2). To znači da je prostor (X, d_1) potpun onda i samo onda ako je (X, d_2) potpun.

6. Neka je (X, d) potpun metrički prostor. Pretpostavimo da je (A_n) niz nepraznih zatvorenih podskupova od X sa sljedećim dvama svojstvima:

   (i) niz (A_n) silazan je, tj. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$.

   (ii) $\lim_{k\to\infty} \operatorname{diam} A_k = 0$.

(a) Dokažite da je $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \neq \emptyset$.

(b) Navedite primjer silaznog niza (B_k) podskupova u potpunom metričkom prostoru X tako da bude $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$.

(Uputa: Konstruirajte niz (x_k) na sljedeći način: Neka je $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2 \backslash A_1, \ldots, x_k \in A_k \backslash A_{k-1}, \ldots$. Kako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\operatorname{diam} A_k < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$, to je $d(x_m, x_k) < \varepsilon$ za sve $m, k \geq k_0$. Dakle, (x_k) Cauchyjev je niz. Neka je x_0 njegov limes. Kako je $\{x_k : k \geq 1\} \subseteq A_1$ i A_1 zatvoren skup, to je $x_0 \in A_1$. Kako je A_2 zatvoren skup i $\{x_k : k \geq 2\} \subseteq A_2$, to je $x_0 \in A_2$, itd. Dakle, $x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. (b) $B_k = (-\infty, -k]$, $k \in \mathbb{N}$.)

7. Dokazati da je diskretan metrički prostor (X, d) potpun.

   (Uputa: U diskretnom metričkom prostoru svaki Cauchyjev niz jest stacionaran, tj. konstantan od nekog člana pa nadalje.)

8. Potpunost metričkog prostora nije topološko svojstvo, već bitno ovisi o metrici. Zato je moguće da na X imamo dvije topološki ekvivalentne metrike te da je X u jednoj metrici potpun, a u drugoj nije. Npr. metrika ϱ iz 31. zadatka na str. 38 topološki je ekvivalentna s euklidskom metrikom na $\mathbb{R}$. Niz brojeva $(x_k) = (k)$ Cauchyjev je niz u $(\mathbb{R}, \varrho)$ jer je

$$\varrho(x_{k+p}, x_k) = \frac{p}{(1+k+p)(1+k)} < \frac{1}{1+k}.$$

   Unatoč tome, taj niz ne konvergira u $(\mathbb{R}, \varrho)$ jer ne konvergira u $(\mathbb{R}, d)$. To pokazuje da prostor $\mathbb{R}$ u metrici ϱ nije potpun iako je potpun u topološki ekvivalentnoj euklidskoj metrici d. Osim toga, budući da ekvivalentne metrike čuvaju Cauchyjevo svojstvo nizova, te dvije metrike nisu ekvivalentne iako su topološki ekvivalentne.

9. Neka je (x_k) Cauchyjev niz u metričkom prostoru (X, d). Dokažite da za svaki niz (ε_k) pozitivnih realnih brojeva postoji poniz (ε_{u_k}) takav da je

$$d(x_{u_{k+1}}, x_{u_k}) < \varepsilon_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

   (Uputa: Najprije nađimo $u_1 \in \mathbb{N}$ takav da $m, k \geq u_1 \Rightarrow d(x_m, x_k) < \varepsilon_1$. Dalje, postoji $u_2 > u_1$ takav da $m, k \geq u_2 \Rightarrow d(x_m, x_k) < \varepsilon_2$. Dalje, postoji $u_3 > u_2$ takav da $m, k \geq u_2 \Rightarrow d(x_m, x_k) < \varepsilon_3$. Dokaz završava primjenom principa matematičke indukcije.)

5. Kompaktnost

Kompaktni skupovi imaju važnu ulogu u matematičkoj analizi jer omogućuju da se u određenim situacijama „beskonačno zamijeni konačnim”.

5.1. Definicija
Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ **kompaktan** je ako svaki niz u K ima konvergentan podniz čiji je limes u K.

Ta definicija se prirodno proširuje na metričke prostore:

5.2. Definicija
Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $K \subseteq X$ **kompaktan** je ako svaki niz u K ima konvergentan podniz čiji je limes u K.

Sljedeći teorem govori nam da se kompaktnost prenosi na zatvorene podskupove.

5.3. Teorem
Neka je K kompaktan skup iz metričkog prostora, a $F \subseteq K$ zatvoren podskup. Tada je i F kompaktan.

Dokaz. Neka je (x_k) niz u F. Kako je $F \subseteq K$, to je (x_k) ujedno i niz u K, pa zbog kompaktnosti skupa K on ima konvergentan podniz (x_{u_k}) koji konvergira prema $x_0 \in K$. Zbog zatvorenosti skupa F jest $x_0 \in F$ (teorem 2.15.). ■

5.4. Teorem
Neka je K kompaktan skup iz metričkog prostora (X, d). Tada je K potpuno omeđen.

Prije nego što nastavimo s dokazom, prisjetimo se da je u metričkom protoru (X, d) neki skup $K \subseteq X$ potpuno omeđen onda i samo onda ako ga možemo prekriti s konačno mnogo kugli unaprijed zadanog malenog radijusa, čija središta pripadaju skupu K. Preciznije (vidi propoziciju 1.43.), skup K je potpuno omeđen onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji konačno mnogo točaka $x_1, \ldots, x_k \in K$ takvih da je $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} K(x_i, \varepsilon)$. Prisjetite se također da je svaki potpuno omeđen skup ujedno i omeđen.

Dokaz teorema 5.4. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da K nije potpuno omeđen. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da se K ne može prekriti sa konačno mnogo ε-kugala. Neka je $x_1 \in K$ proizvoljna točka. Kako $K \nsubseteq K(x_1, \varepsilon)$, to postoji točka $x_2 \in K \backslash K(x_1, \varepsilon)$. Budući da $K \nsubseteq K(x_1, \varepsilon) \cup K(x_2, \varepsilon)$, postoji točka $x_3 \in K \backslash \Big(K(x_1, \varepsilon) \cup K(x_2, \varepsilon)\Big)$. Nastavljajući taj postupak dolazimo do niza (x_k) u K sa svojstvom

$$d(x_m, x_k) \geq \varepsilon, \qquad \forall k, m \in \mathbb{N}.$$

Zbog toga nijedan podniz od (x_k) nije Cauchyjev, stoga (x_k) nema konvergentnog podniza. To je u kontradikciji s pretpostavkom da je K kompaktan. ■

5.5. Korolar
Kompaktan skup K iz metričkog prostora (X, d) omeđen je i zatvoren.

Dokaz. Prema prethodnom teoremu skup K je potpuno omeđen, pa je stoga i omeđen. Preostaje pokazati da je K zatvoren skup. Prema teoremu 2.15. dovoljno je pokazati da svaki konvergentan niz (x_k) iz K ima limes u K. Neka je (x_k) niz u K koji konvergira prema $x_0 \in X$. Kako je K kompaktan skup, niz (x_k) ima konvergentan podniz (x_{u_k}) čiji je limes u K. Kako je prema propoziciji 2.18. $\lim_{k\to\infty} x_{u_k} = x_0$, zaključujemo da je $x_0 \in K$. ■

Obrat prethodnog korolara ne vrijedi (vidi primjer 6 na str. 78). Međutim, u euklidskim prostorima imamo sljedeću važnu karakterizaciju kompaktnosti:

5.6. Korolar (Borel-Lebesque)
Skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktan je onda i samo onda ako je omeđen i zatvoren.

Dokaz. Ako je K kompaktan, tvrdnja slijedi iz koralara 5.5.

Obratno, pretpostavimo da je K omeđen i zatvoren skup. Neka je (x_k) niz u K. Taj niz je omeđen pa prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu (teorem 2.27.) ima konvergentan podniz. Zbog zatvorenosti skupa K taj limes pripada skupu K. ■

5.7. Primjer.

(a) Skup $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ nije kompaktan.

(b) Skup $[1, 3] \cup [7, 9]$ jest kompaktan.

(c) Otvorena kugla $K(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ nije kompaktan skup. Zatvorena kugla $\bar{K}(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$ jest kompaktan skup.

(d) Sfera $S^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ jest kompaktan skup.

(e) Skup $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ jest kompaktan.

Prije nego što damo nužan i dovoljan uvjet za kompaktnost u metričkom prostoru, dokazat ćemo jednu lemu.

5.8. Lema
Neka je (X, d) potpuno omeđen metrički prostor. Tada svaki niz (x_k) ima podniz (x_{u_k}) koji je Cauchyjev.

Dokaz. Neka je (x_k) niz u X. Zbog potpune omeđenosti skupa X, za svaki $r > 0$ skup X možemo prekriti s konačno otvorenih kugli radijusa manjeg od r. Zato barem jedna od tih kugli, označimo je s K_r, sadrži beskonačno članova niza (x_k), tj. skup $\{k : x_k \in K_r\}$ jest beskonačan.

Sad ćemo iskoristiti gornji zaključak. Za $r = 1$ postoji barem jedna otvorena kugla radijusa 1, označimo je s K_1, koja sadrži beskonačno članova niza (x_k). Zato je skup

$$N_1 := \left\{k \in \mathbb{N} : x_k \in K_1\right\}$$

beskonačan. Za $r = \frac{1}{2}$ mora postojati barem jedna otvorena kugla radijusa manjeg od $\frac{1}{2}$, označimo je s K_2, koja sadrži beskonačno članova skupa $\{x_k : k \in N_1\}$. Skup

$$N_2 := \{k \in N_1 : x_k \in K_2\}$$

je beskonačan i $N_1 \supseteq N_2$. Nastavljajući taj postupak dobivamo monotono silazan niz beskonačnih skupova

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots \supseteq N_k \supseteq \ldots$$

i otvorenih kugli K_k radijusa manjeg od $\frac{1}{k}$. Kako je svaki od skupova N_k beskonačan, moguće je odabrati strogo rastući niz (u_k) prirodnih brojeva takav da je $u_k \in N_k$. Tvrdimo da je dobiveni podniz (x_{u_k}) Cauchyjev. Zaista, neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$. Neka su $m, k \geq k_0$, takvi da je $m > k$. Kako je tada (vidi (2.1))

$$u_m > u_k \geq k \geq k_0,$$

to je

$$N_{u_m} \subseteq N_{u_k} \subseteq N_{k_0}.$$

Zato je

$$\{u_m, u_k\} \subset N_{k_0},$$

pa je

$$\{x_{u_m}, x_{u_k}\} \subseteq K_{k_0},$$

odakle slijedi $d(x_{u_m}, x_{u_k}) < \operatorname{diam} K_{k_0} = \frac{2}{k_0} < \varepsilon$. Time smo pokazali da je podniz (x_{u_k}) Cauchyjev. ■

5.9. Teorem

Skup K iz metričkog prostor (X, d) kompaktan je onda i samo onda ako je potpun i potpuno omeđen.

Dokaz. Pretpostavimo da je K kompaktan. Tada je prema teoremu 5.4. K potpuno omeđen. Za dokaz potpunosti pretpostavimo da je (x_k) Cauchyjev niz u K. Zbog kompaktnosti skupa K taj niz ima podniz (x_{u_k}) koji konvergira nekoj točki $x_0 \in K$. Prema tvrdnj c) teorema 4.3. i sam niz (x_k) konvergira prema $x_0 \in K$.

Obratno, pretpostavimo da je K potpun i potpuno omeđen. Treba pokazati da svaki niz (x_k) u K ima konvergentan podniz čiji je limes u K. Prema lemi 5.8. niz (x_k) ima podniz (x_{u_k}) koji je Cauchyjev, pa zbog potpunosti skupa K niz (x_{u_k}) konvergira nekoj točki iz K. ■

Sada ćemo pokazati da se kompaktnost može opisati bez nizova i metrike, samo pomoću otvorenih skupova. To će nas dovesti do definicije kompaktnosti u topološkim prostorima. Prvo ćemo uvesti pojam otvorenog pokrivača, a prije toga je korisno prisjetiti se pojma pokrivača skupa koji smo uveli definicijom 1.35.

5.10. Definicija

Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor, $S \subseteq X$ i $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ pokrivač skupa S. Za pokrivač $\mathcal{V}$ kažemo da je otvoren pokrivač ako su svi članovi $V_\alpha \in \mathcal{V}$ otvoreni skupovi.

5.11. Primjer. Familija $\mathcal{V} = \{K\big((x,0),1\big) : x \in \mathbb{R}\}$ otvoreni je pokrivač x-osi u $\mathbb{R}^2$. Ona ima prebrojiv potpokrivač $\{K\big((n,0),1\big) : n \in \mathbb{Z}\}$, no nema konačan potpokrivač.

5.12. Definicija

Neka je (X,d) metrički prostor, a $\mathcal{V}$ pokrivač skupa $S \subseteq X$. Ako postoji broj $\lambda > 0$ takav da za svaki neprazan podskup $A \subseteq S$ za koji je $\operatorname{diam} A \leq \lambda$ postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $A \subseteq V$, onda λ zovemo Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{V}$.

5.13. Teorem (O Lebesgueovom broju)

Neka je (X,d) metrički prostor, a $K \subseteq X$ kompaktan skup. Tada za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ od K postoji Lebesgueov broj.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Zato pretpostavimo da postoji otvoreni pokrivač $\mathcal{V}$ od K za koji ne postoji Lebesgueov broj. Tada za svaki $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k}$ nije Lebesgueov broj pokrivača $\mathcal{V}$. To znači da postoji skup $A_k \subseteq K$ takav da je $\operatorname{diam} A_k \leq \frac{1}{k}$ i da A_k nije sadržan ni u jednom članu pokrivača $\mathcal{V}$.

U svakom A_k odaberimo jednu točku $x_k \in A_k$. Budući da je K kompakt, niz (x_k) ima konvergentan podniz (x_{u_k}) s limesom $x_0 \in K$. Kako je $\mathcal{V}$ pokrivač od K, postoji $V \in \mathcal{V}$ takav da je $x_0 \in V$. Zbog otvorenosti skupa V postoji $r > 0$ takav da je $x_0 \in K(x_0, r) \subseteq V$. Kako $x_{u_k} \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$d(x_{u_k}, x_0) < \frac{r}{2} \qquad \text{za svaki } k \geq k_0.$$

Neka je $k \geq \max\{k_0, 2/r\}$. Tada za svaku točku $x \in A_{u_k}$ vrijedi

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_{u_k}) + d(x_{u_k}, x_0) < \operatorname{diam} A_{u_k} + \frac{r}{2}.$$

Kako je $\operatorname{diam} A_{u_k} \leq \frac{1}{u_k}$ i $u_k \geq k$, dobivamo

$$d(x, x_0) \leq \frac{1}{u_k} + \frac{r}{2} \leq \frac{1}{k} + \frac{r}{2} \leq r$$

pa je $A_{u_k} \subseteq K(x_0, r) \subseteq V \in \mathcal{V}$, što je u kontradikciji s izborom skupova A_k (A_k nije sadržan ni u jednom članu pokrivača $\mathcal{V}$). ■

5.14. Primjedba

Nekompaktni skupovi mogu imati pokrivače koji nemaju Lebesgueov broj. U tu svrhu promotrimo sljedeći pokrivač skupa $\mathbb{R}^+$:

$$\mathcal{V} = \{K(2n-1, 1) : n \in \mathbb{N}\} \cup \{K(2n, 1/n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

Za svaki $\lambda > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $2/n < \lambda$, pa je $K(2n, \lambda/2)$ skup dijametra λ koji nije sadržan ni u jednom članu od $\mathcal{V}$.

Sada ćemo okarakterizirati kompaktnost pomoću pokrivača. Osim što je važna u dokazima, ta se karakterizacija koristi za definiciju kompaktnosti u topološkim prostorima.

5.15. TEOREM (HEINE-BORELOV TEOREM)
Neka je (X, d) metrički prostor. Skup $K \subseteq X$ je kompaktan onda i samo onda ako svaki otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač.

Dokaz. Neka je K kompaktan skup i neka je $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ njegov otvoreni pokrivač. Prema teoremu 5.13. postoji Lebesgueov broj $\lambda > 0$ tog pokrivača. Nadalje, zbog potpune omeđenosti skupa K (teorem 5.4.) postoji konačno točaka $x_1, \ldots, x_k \in K$ takvih da je $\{K(x_i, \lambda/2) : i = 1, \ldots, k\}$ otvoren pokrivač za K. Kako je $\operatorname{diam}(K \cap K(x_i, \lambda/2)) \leq \lambda$, slijedi da je $K \cap K(x_i, \lambda/2)$ sadržan u nekom V_{α_i}. Zato je $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_k}\}$ konačan potpokrivač od K.

Obratno, pretpostavimo da svaki otvoreni pokrivač od K ima konačan potpokrivač. Neka je (x_k) niz u K. Treba pokazati da niz (x_k) ima konvergentan podniz čiji je limes u K, tj. ekvivalentno, treba pokazati da niz (x_k) ima gomilište u skupu K (vidi teorem 2.26.). Dokaz ćemo provesti kontradikcijom, pa zato pretpostavimo da nijedna točka $x \in K$ nije gomilište niza (x_k). Tada, po definiciji gomilišta, oko svake točke $x \in K$ postoji otvorena okolina V_x koja sadrži najviše konačno mnogo članova niza (x_k), tj. skup

$$\{k \in \mathbb{N} : x_k \in V_x\}$$

jest konačan. Familija $\{V_x : x \in K\}$ jest očito otvoreni pokrivač od K pa, po pretpostavci, postoji konačan potpokrivač $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_k}\}$. Dakle,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} V_{x_i}.$$

Kako je (x_k) niz u K te kako svaki od skupova V_{x_i}, $i = 1, \ldots, k$, sadrži konačno mnogo članova niza (x_k), dolazi se do kontradikcije s činjenicom da je skup $\mathbb{N}$ beskonačan. ■

5.16. DEFINICIJA
Neka je $(X, \mathcal{U})$ topološki prostor. Za skup $K \subseteq X$ kažemo da je kompaktan ako svaki otvoreni pokrivač od K ima konačan potpokrivač.

Zadaci za vježbu

1. Neka su $A, B \subseteq \mathbb{R}$ kompaktni skupovi. Dokažite da je kompaktan i skup $C := A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

   (Uputa: Neka je (x_k, y_k) bilo koji niz u C. Kako je A kompaktan, niz (x_k) ima konvergentan podniz (x_{u_k}) koji konvergira prema nekoj točki $x_0 \in A$.

Podniz (y_{u_k}) niz je u B, a B kompaktan, pa zato postoji konvergentan podniz $(y_{v_{u_k}})$ koji konvergira prema nekoj točki $y_0 \in B$. Budući da podniz konvergentnog niza konvergira istoj vrijednosti kao i niz, imamo $x_{v_{u_k}} \to x_0$. Dakle, $(x_{v_{u_k}}, y_{v_{u_k}}) \to (x_0, y_0) \in C$.)

2. Pretpostavimo da skup $A \subseteq \mathbb{R}$ nije kompaktan. Pokažite da postoji neomeđena neprekidna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$.

   (Uputa: Ako je A neomeđen skup, stavite $f(x) = x$. Ako A nije zatvoren, onda postoji niz (x_k) u A koji konvergira prema $x_0 \notin A$ (vidi teorem 2.15.) i zato je funkcija $f(x) = 1/(x - x_0)$ neomeđena.)

3. Neka je $A = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{R}$. Dokažite:

   (a) Skup A nije kompaktan.

   (b) Skup $A \cup \{0\}$ jest kompaktan.

   (Uputa: (a) Skup A nije zatvoren jer $(1/k)$ je niz u A čiji je limes $0 \notin A$ (vidi teorem 2.15.))

4. Dokažite da je skup $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^2 = 1\}$ kompaktan.

   (Uputa: Za $(x, y) \in A$ vrijedi $x^4 + y^2 = 1$, pa je $x^4, y^2 \leq 1$, odakle slijedi $|x|, |y| \leq 1$. Zato je $(x, y) \in K((0, 0), \sqrt{2})$, što nam govori da je A omeđen skup. Sada ćemo pokazati da je A zatvoren skup. Neka je (x_k, y_k) bilo koji niz u A koji konvergira prema $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Treba pokazati da je $(x_0, y_0) \in A$. Kako $(x_k, y_k) \to (x_0, y_0)$, to $x_k \to x_0$ i $y_k \to y_0$. Sada iz jednaksoti $x_k^4 + y_k^2 = 1$ dobivamo $x_0^4 + y_0^2 = 1$, tj. $(x_0, y_0) \in A$.)

5. Dokažite da je kompaktan svaki konačan podskup metričkog prostora.

   (Uputa: Svaki niz iz konačnog podskupa sadrži stacionaran podniz koji je konvergentan.)

6. Kompaktan skup K iz metričkog prostora (X, d) omeđen je i zatvoren. Ilustrirajte primjerom da obrat ne mora vrijediti.

   (Uputa: Neka je X beskonačan skup s diskretnom metrikom. Svaka točka $x_0 \in X$ otvoren je skup jer za $\varepsilon < 1$ jest $K(x_0, \varepsilon) = \{x_0\}$. Skup X jest očito omeđen i zatvoren. Kako je $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ te kako otvoreni pokrivač $\{\{x\} : x \in X\}$ nema konačan potpokrivač, skup X nije kompaktan.)

7. Lebegov broj pokrivača zavisi isključivo od metrike, ne i od topologije. Zaista, neka je $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $\mathcal{U}_{d_0}$ topologija na X inducirana diskretnom metrikom d_0 i $\mathcal{U}_{d_2}$ topologija na X inducirana s euklidskom metrikom d_2. Dokažite:

   (a) $(X, \mathcal{U}_{d_0})$ i $(X, \mathcal{U}_{d_2})$ diskretni su topološki prostori, tj. $\mathcal{U}_{d_0} = \mathcal{U}_{d_2} = \mathcal{P}(X)$, gdje je $\mathcal{P}(X)$ partitivni skup skupa X.

   (b) Otvoreni pokrivač $\mathcal{V} = \big\{\{x\} : x \in X\big\}$ skupa X u slučaju (X, d_0) ima Lebesgueov broj pokrivača $0 < \lambda \leq 1$, a u slučaju (X, d_2) Lebesgueov broj ne postoji.

(Uputa: (a) Lako je pokazati da je u metrici d_2 svaki jednočlani skup otvoren. (b) Za svaki $\lambda > 0$ postoje $n \in \mathbb{N}$ i skup $A = \left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}\right\}$ takav da je $\operatorname{diam} A = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \lambda$.

8. Neka su A i B kompaktni podskupovi iz prostora X. Dokažite:

   (a) Ako je X topološki prostor, onda je $A \cup B$ kompakt.

   (b) Ako je X metrički prostor, onda je $A \cap B$ kompakt.

9. Pokažite da sljedeći skupovi nisu kompaktni i to nalazeći otvoreni pokrivač koji nema konačan potpokrivač (vidi definicju 5.16.):

   (a) $\mathbb{R}^n$.

   (b) $K(\mathbf{0}, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$.

   (c) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$.

   (Uputa: (a) Neka je $U_k := K(\mathbf{0}, k) \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada je $\{U_k : k \in \mathbb{N}\}$ otvoreni pokrivač skupa $\mathbb{R}^n$ koji nema konačan potpokrivač. (b) Postupite slično kao pod (a). (c) Otvoreni pokrivač $\left\{(m - \frac{1}{4}, m + \frac{1}{4}) \subseteq \mathbb{R} : m \in \mathbb{Z}\right\}$ nema konačan potpokrivač.)

6. Neprekidna preslikavanja

Jedan od najvažnijih pojmova u matematičkoj analizi jest neprekidnost preslikavanja. U metričkim i topološkim prostorima neprekidna preslikavanja imaju jednako važnu ulogu kao što to imaju linearni operatori za vektorske prostore.

Nas će najviše zanimati vektorske funkcije više realnih varijabli. To su funkcije koje su definirane na skupu $D \subseteq \mathbb{R}^n$, a primaju vrijednosti u skupu $\mathbb{R}^m$. Neka je $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$, vektorska funkcija. Kako je $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$, možemo pisati

$$f(\mathbf{x}) = \big(f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})\big),$$

gdje su $f_1, \ldots, f_m : D \to \mathbb{R}$ tzv. komponentne ili koordinatne funkcije.

6.1. Neprekidnost

Prvo ćemo se prisjetiti Cauchyjeve definicije neprekidnosti realne funkcije jedne realne varijable:

6.1. Definicija

Preslikavanje $f : D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}$, je neprekidno ili kontinuirano u točki $x_0 \in D$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap D$, tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D)\ \ |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Pomoću euklidske metrike d na $\mathbb{R}$, svojstvo (6.1) možemo zapisati u obliku:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D)\ \ d(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Taj ekvivalentan zapis sugerira nam kako proširiti pojam neprekidnosti na preslikavanja metričkih prostora. Definira se:

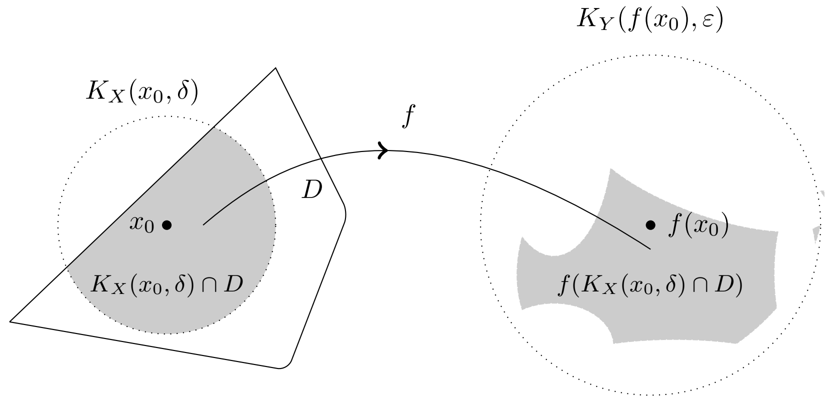
6.2. Definicija

Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f je neprekidno ili kontinuirano u točki $x_0 \in D$ ako za svaki realan broj $\varepsilon > 0$ postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ za svaki $x \in D$ za koji je $d_X(x, x_0) < \delta$ (slika 11), tj.

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D)\ \ d_X(x, x_0) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{6.2}$$

Uočimo da je preslikavanje f neprekidno u točki $x_0 \in D$ ako za svaku otvorenu kuglu $K_Y(f(x_0), \varepsilon)$ oko točke $f(x_0)$ (za svaki $\varepsilon > 0$!) postoji otvorena kugla $K_X(x_0, \delta)$ oko točke x_0 (postoji $\delta > 0$!) takva da se cijeli skup $K_X(x_0, \delta) \cap D$ preslika u $K_Y(f(x_0), \varepsilon)$ (slika 11). Dakle, svojstvo (6.2) možemo zapisati na ekvivalentan način:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0) \quad f(K_X(x_0, \delta) \cap D) \subseteq K_Y(f(x_0), \varepsilon).$$



Slika 11. $(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\quad f(K_X(x_0,\delta)\cap D)\subseteq K_Y(f(x_0),\varepsilon)$

Sljedeći teorem govori nam da se u definiciji neprekidnosti otvorene kugle oko točaka x_0 i $f(x_0)$ mogu zamijeniti s otvorenim skupovima koji sadrže te točke. Preciznije, vrijedi:

6.3. Teorem
Neka su (X,d_X) i (Y,d_Y) metrički prostori, $D\subseteq X$ i $f:D\to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f neprekidno je u točki $x_0\in D$ onda i samo onda ako za svaku otvorenu okolinu V točke $f(x_0)$ u Y postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je $f(U\cap D)\subseteq V$.

Dokaz. Neka je f neprekidno u točki $x_0\in D$, a $V\subseteq Y$ otvorena okolina točke $f(x_0)$. Kako je V otvoren skup, postoji realan broj $\varepsilon>0$ takav da je

$$K_Y(f(x_0),\varepsilon)=\{y\in Y: d_Y(y,f(x_0))<\varepsilon\}\subseteq V.$$

Zbog neprekidnosti preslikavanja f u točki x_0 postoji realan broj $\delta>0$ takav da je $d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ za svaki $x\in D$ za koji je $d_X(x,x_0)<\delta$. Dakle,

$$f\big(K_X(x_0,\delta)\cap D\big)\subseteq K_Y(f(x_0),\varepsilon),$$

gdje je $K_X(x_0,\delta)=\{x\in X: d_X(x,x_0)<\delta\}$ otvorena kugla u X oko x_0 radijusa δ. Stavimo li $U:=K_X(x_0,\delta)$, dobivamo $f(U\cap D)\subseteq V$.

Za dokaz obrata pretpostavimo da je $\varepsilon>0$. Kako je $V:=K_Y(f(x_0),\varepsilon)$ otvorena okolina točke $f(x_0)$ u Y, po pretpostavci postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je $f(U\cap D)\subseteq V$. Nadalje, kako je $x_0\in U$ i U otvoren skup, postoji $\delta>0$ takav da je $K_X(x_0,\delta)\subseteq U$. Zato je $f\big(K_X(x_0,\delta)\cap D\big)\subseteq V$, tj. $d_Y(f(x),f(x_0))<\varepsilon$ za svaki $x\in D$ za koji je $d_X(x,x_0)<\delta$. ∎

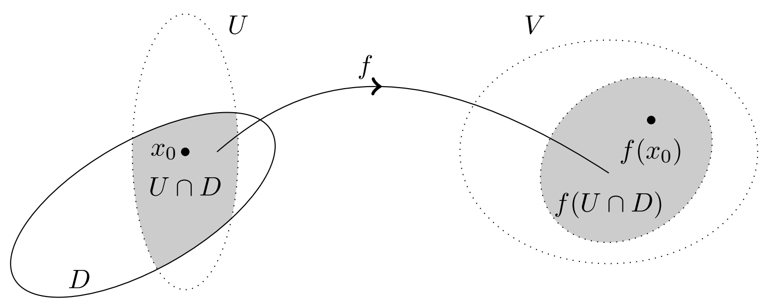
Prethodni teorem govori nam da se neprekidnost može opisati samo pomoću otvorenih skupova, tj. pomoću topologije prostora X i Y. To svojstvo služi za definiciju neprekidnosti u topološkim prostorima. Preciznije:

6.4. Definicija
Neka su $(X,\mathcal{U})$ i $(Y,\mathcal{V})$ topološki prostori, a $D \subseteq X$. Za preslikavanje $f : D \to Y$ kažemo da je neprekidno ili kontinuirano u točki $x_0 \in D$ ako za svaku otvorenu okolinu V točke $f(x_0)$ u Y postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je

$$f(U \cap D) \subseteq V.$$

U protivnom se kaže da je preslikavanje f prekidno ili diskontinuirano u točki $x_0 \in D$.

Preslikavanje $f : D \to Y$ je neprekidno na skupu $A \subseteq D$ ako je f neprekidno u svakoj točki skupa A. Preslikavanje f je neprekidno ukoliko je neprekidno na D.



Slika 12. $x_0 \in U \cap D$, $f(U \cap D) \subseteq V$

6.5. Primjedba
Ako je $f : D \to Y$ neprekidno preslikavanje i $A \subseteq D$, onda je očito neprekidna i restrikcija $f_{|A} : A \to Y$.

6.6. Primjer. Navedimo nekoliko jednostavnih primjera neprekidnih preslikavanja:

(i) Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Identiteta $1_X : X \to X$ definirana formulom $1_X(x) = x$, $x \in X$, neprekidna je na X. Zaista, neka je $x_0 \in X$ i V bilo koja otvorena okolina od $1_X(x_0)$. Prema definiciji 6.4. treba pronaći otvorenu okolinu U točke $1_X(x_0)$ takvu da je $1_X(U) \subseteq V$. Kako je $1_X(x_0) = x_0$, dovoljno je staviti $U := V$.

(ii) Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor i $D \subset X$. Funkciju $i : D \to X$ definiranu s $i(x) = x$, $x \in D$, zovemo inkluzija. Inkluzija je neprekidno preslikavanje.

(iii) Neka su $(X,\mathcal{U})$ i $(Y,\mathcal{V})$ topološki prostori i $y_0 \in Y$. Konstantno preslikavanje $c : X \to Y$ definirano formulom $c(x) = y_0$, $x \in X$, neprekidno je na X. Naime, ako je $x_0 \in X$ i V bilo koja otvorena okolina točke $c(x_0) = y_0$ u Y, tada za svaku otvorenu okolinu U oko x_0 u X vrijedi $f(U) = \{y_0\} \subseteq V$.

(iv) Koordinatne projekcije $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, definirane formulama

$$p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i, \qquad i = 1, \ldots, n$$

neprekidna su preslikavanja.

Neka je $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ i $\varepsilon > 0$. Treba pokazati da postoji $\delta > 0$ takav da je $d(p_i(\mathbf{x}), p_i(\mathbf{x}^0)) < \varepsilon$ za svaki $\mathbf{x} \in K(\mathbf{x}^0, \delta)$. Kako je

$$d(p_i(\mathbf{x}), p_i(\mathbf{x}^0)) = |x_i - x_i^0| \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0),$$

za $\delta > 0$ možemo uzeti bilo koji realan broj manji od ε.

(v) Neka je $(X, +, \cdot)$ realan vektorski prostor. Pokažimo da je norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje ako na X uzmemo metriku generiranu tom normom, a na $\mathbb{R}$ euklidsku metriku.

Neka je $x_0 \in X$. Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $\big|\, \|x\| - \|x_0\| \,\big| < \varepsilon$ za svaki $x \in X$ za koji je $\|x - x_0\| < \delta$.

Dovoljno je pokazati da za svaki $x \in X$ vrijedi nejednakost

$$\Big|\|x\| - \|x_0\|\Big| \leq \|x - x_0\|, \tag{6.3}$$

odakle se vidi da za traženi $\delta > 0$ možemo uzeti bilo koji realan broj manji od ε. Zaista, pomoću nejednakosti trokuta dobivamo

$$\|x\| = \|(x - x_0) + x_0\| \leq \|x - x_0\| + \|x_0\|,$$

odakle je $\|x\| - \|x_0\| \leq \|x - x_0\|$. Slično se pokaže da je $\|x_0\| - \|x\| \leq \|x - x_0\|$; za to je dovoljno zamijeniti ulogu točaka x i x_0. Time je dokazana nejednakost (6.3).

Prije sljedećeg primjera uputno je vratiti se na definiciju neprekidnosti i dobro razumjeti njezinu negaciju.

6.7. Primjer. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & , \text{ ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{ ako je } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Pokažimo da postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da za svaki $\delta > 0$ postoji točka $(x_\delta, y_\delta) \in K\big((0, 0), \delta\big)$ takva da je $d\big(f(x_\delta, y_\delta), f(0, 0)\big) \geq \varepsilon$. To će značiti da f nije neprekidna u točki $(0, 0)$.

Zaista, neka je $\varepsilon = \frac{1}{3}$. Za svaki $\delta > 0$ stavimo $(x_\delta, y_\delta) := (\delta/2, \delta/2)$. Tada je $d\big((x_\delta, y_\delta), (0, 0)\big) = \delta/\sqrt{2} < \delta$ i $d\big(f(x_\delta, y_\delta), f(0, 0)\big) = |f(\delta/2, \delta/2) - 0| = 1/2 > \varepsilon$.

Restrikcije te funkcije na koordinatne osi jesu konstante, pa su prema tome i neprekidne na $\mathbb{R}$. Kaže se da je ta funkcija „neprekidna po svakoj varijabli posebno”. Dakle, neprekidnost po svakoj varijabli posebno ne implicira neprekidnost funkcije.

Topološka struktura metričkog prostora određena je konvergentnim nizovima (teorem 2.15.). Zato ne iznenađuje što se i neprekidnost preslikavanja metričkih prostora može opisati pomoću konvergentnih nizova. O tome nam govori sljedeći teorem:

6.8. TEOREM (HEINEOVA KARAKTERIZACIJA NEPREKIDNOSTI)
Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f je neprekidno u točki $x_0 \in D$ onda i samo onda ako za svaki niz (x_k) u D koji konvergira prema x_0 niz funkcijskih vrijednosti $\big(f(x_k)\big)$ konvergira prema $f(x_0)$.

Dokaz. Neka je f neprekidno preslikavanje u točki $x_0 \in D$, a (x_k) bilo koji niz u D koji konvergira prema x_0. Treba pokazati da niz $\big(f(x_k)\big)$ konvergira prema $f(x_0)$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki x_0 postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f\big(D \cap K_X(x_0, \delta)\big) \subseteq K_Y(f(x_0), \varepsilon). \tag{6.4}$$

Nadalje, kako $x_k \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$x_k \in D \cap K_X(x_0, \delta), \qquad k \geq k_0. \tag{6.5}$$

Iz (6.5) i (6.4) dobivamo da je $f(x_k) \in K_Y(f(x_0), \varepsilon)$ za svaki $k \geq k_0$. To znači da niz $\big(f(x_k)\big)$ konvergira prema $f(x_0)$.

Obratno, pretpostavimo da f „čuva konvergenciju", tj. da $f(x_k) \to f(x_0)$ za svaki niz (x_k) iz D koji konvergira prema x_0. Treba pokazati da je f neprekidna u x_0. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da f ima prekid u točki x_0. Tada postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaki $\delta > 0$ postoji točka $x_\delta \in D$ takva da je $d_X(x_\delta, x_0) < \delta$ i $d_Y(f(x_\delta), f(x_0) \geq \varepsilon$. Specijalno, stavljajući $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, dolazimo do niza (x_k) u D takvog da je $d_X(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$ i $d_Y(f(x_k), f(x_0) \geq \varepsilon$. Tako dobiveni niz (x_k) konvergira prema x_0 (jer $d_X(x_k, x_0) \to 0$), ali odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_k))$ ne konvergira prema $f(x_0)$. To je kontradikcija s pretpostavkom da f „čuva konvergenciju". ■

6.9. PRIMJEDBA
Svojstvo iz Teorema 6.8. ponekad se uzima za definiciju neprekidnosti u metričkim prostorima. To je tzv. Heineova definicija neprekidnosti u metričkim prostorima. Može se pokazati da teorem 6.8. ne vrijedi općenito u Hausdorffovim prostorima (vidi [3, str. 188])

6.10. PRIMJER. Pokažimo da funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{x^8 + (y - x^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

ima prekid u točki $(0, 0)$.

Niz $(x_k, y_k) = \big(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\big)$, $k \in \mathbb{N}$, konvergira prema $(0, 0)$. Kako $f(x_k, y_k) = k^3$ ne konvergira prema $f(0, 0) = 0$, prema Heineovoj definiciji neprekidnosti zaključujemo da funkcija f nije neprekidna u točki $(0, 0)$.

6.2. Neka svojstva neprekidnih preslikavanja

Sljedeći teorem nam daje nekoliko korisnih karakterizacija neprekidnosti:

6.11. Teorem

Neka su X, Y topološki prostori, a $f : X \to Y$ preslikavanje. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(i) *f jest neprekidno preslikavanje.*

(ii) *Za svaki otvoreni skup $V \subseteq Y$ jest i skup $f^{-1}(V)$ otvoren u X.*

(iii) *Za svaki zatvoreni skup $F \subseteq Y$ jest i skup $f^{-1}(F)$ zatvoren u X.*

(iv) *Za svaki skup $A \subseteq X$ jest $f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A)$.*

Dokaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Neka je V otvoren skup iz Y. Treba pokazati da je $f^{-1}(V)$ otvoren skup u X. Neka je $x \in f^{-1}(V)$. Kako je V okolina točke $f(x)$, zbog neprekidnosti funkcije f postoji otvorena okolina U_x od x takva da je $f(U_x) \subseteq V$, odakle slijedi $U_x \subseteq f^{-1}(V)$. Zato je

$$f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} f^{-1}(V) = f^{-1}(V),$$

odakle dobivamo $f^{-1}(V) = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x$. Kako je proizvoljna unija otvorenih skupova opet otvoren skup, tvrdnja je dokazana.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Neka je $F \subseteq Y$ zatvoren skup. Tada je $Y \backslash F$ otvoren skup u Y, pa je prema *(ii)* skup $f^{-1}(Y \backslash F)$ otvoren u X. Kako je $f^{-1}(F) = X \backslash f^{-1}(Y \backslash F)$, slijedi da je $f^{-1}(F)$ zatvoren skup.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)* Prema *(iii)* skup $f^{-1}\big(\operatorname{Cl} f(A)\big)$ jest zatvoren. Osim toga, vrijedi

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}\big(\operatorname{Cl} f(A)\big).$$

Kako je $\operatorname{Cl} A$ najmanji zatvoreni skup koji sadrži A, iz gornje inkluzije dobivamo $\operatorname{Cl} A \subseteq f^{-1}\big(\operatorname{Cl} f(A)\big)$, odakle slijedi $f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A)$.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)* Neka je V otvorena okolina točke $f(x)$ u prostoru Y. Treba pokazati da postoji otvorena okolina U od x takva da je $f(U) \subseteq V$.

Neka je $A := f^{-1}(Y \backslash V) = X \backslash f^{-1}(V)$. Prvo ćemo pokazati da $x \notin \operatorname{Cl} A$. U suprotnom bi prema (iv) bilo

$$f(x) \in f(\operatorname{Cl} A) \subseteq \operatorname{Cl} f(A) = \operatorname{Cl} f\big(f^{-1}(Y \backslash V)\big) \subseteq \operatorname{Cl}(Y \backslash V),$$

odakle bi slijedilo da $f(x) \notin Y \backslash \operatorname{Cl}(Y \backslash V) = \operatorname{Int} V = V$ (za prvu jednakost vidi teorem 1.72.), što je kontradikcija.

Sada imamo

$$x \in X \backslash \operatorname{Cl} A = X \backslash \operatorname{Cl}(X \backslash f^{-1}(V)) = \operatorname{Int} f^{-1}(V),$$

pri čemu smo za drugu jednakost iskoristili teorem 1.72. To znači da je skup $U := \operatorname{Int} f^{-1}(V)$ otvorena okolina točke x. Očito je $f(U) \subseteq V$. ■

6.12. Teorem

Neka su $f, g : X \to Y$ neprekidna preslikavanja topološkog prostora X u Hausdorffov prostor Y. Tada vrijedi:

(i) Skup $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ jest zatvoren.

Nadalje, ako je $Y = \mathbb{R}$, onda vrijedi:

(ii) Skup $B := \{x \in X : f(x) \leq g(x)\}$ jest zatvoren.

(iii) Skup $C := \{x \in X : f(x) > g(x)\}$ jest otvoren.

Dokaz. *(i)* Treba pokazati da je skup $G := X \backslash A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ otvoren. Neka je $x \in G$. Kako je Y Hausdorffov prostor, postoje disjunktne otvorene okoline V_1 oko $f(x)$ i V_2 oko $g(x)$. Zbog neprekidnosti funkcija f i g postoje otvorene okoline U_1 i U_2 točke x takve da je $f(U_1) \subseteq V_1$, a $g(U_2) \subseteq V_2$. Skup $U_x := U_1 \cap U_2$ jest otvoren, sadrži točku x i vrijedi $f(U_x) \subseteq V_1$, $g(U_x) \subseteq V_2$. Zato je $U_x \subseteq G$, jer je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Očito vrijedi

$$G \subseteq \bigcup_{x \in G} U_x \subseteq \bigcup_{x \in G} G = G,$$

odakle slijedi $G = \bigcup\limits_{x \in G} U_x$. Kako je unija svake familije otvorenih skupova opet otvoren skup, G jest otvoren skup.

(ii) Stavite $G := X \backslash B = \{x \in X : f(x) > g(x)\}$. Dalje se postupa na potpuno isti način kao pod (i).

(iii) Prema *(ii)* skup B jest zatvoren. Po definiciji zatvorenog skupa to znači da je njegov komplement $X \backslash B = C$ otvoren. ■

6.13. Korolar

Ako se neprekidna preslikavanja $f, g : X \to Y$ topološkog prostora X u Hausdorffov prostor Y podudaraju na nekom gustom skupu $D \subseteq X$, onda je $f = g$.

Dokaz. Prema teoremu 6.12. skup $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ jest zatvoren. Po pretpostavci je $D \subseteq A$, pa je zato $X = \operatorname{Cl} D \subseteq \operatorname{Cl} A = A$. ■

Jedno od najvažnijih svojstava neprekidnih funkcija dano je u sljedećem teoremu:

6.14. Teorem (O neprekidnosti kompozicije)

Neka su X, Y, Z topološki prostori, $D \subseteq X$ i $E \subseteq Y$. Nadalje, neka su $f : D \to Y$ i $g : E \to Z$ funkcije takve da je $f(D) \subseteq E$, tj. da je definirana kompozicija $h = g \circ f : D \to Z$. Ako je f neprekidna u točki $x_0 \in D$, a g neprekidna u točki $f(x_0)$, onda je kompozicija $h = g \circ f$ neprekidna u točki x_0.

Dokaz. Neka je W proizvoljna otvorena okolina točke $h(x_0) = g(f(x_0))$ u Z. Treba pokazati da postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je $h(U \cap D) \subseteq W$. Kako je g neprekidna u točki $f(x_0)$, postoji otvorena okolina V točke $f(x_0)$ takva da je $g(V \cap E) \subseteq W$. Nadalje, zbog neprekidnosti funkcije f u točki x_0 postoji otvorena okolina U od x_0 takva da je $f(U \cap D) \subseteq V$. Kako je $f(U \cap D) \subseteq E$, to je $f(U \cap D) \subseteq V \cap E$. Zato je

$$h(U \cap D) = g(f(U \cap D)) \subseteq g(V \cap E) \subseteq W,$$

što dokazuje tvrdnju teorema. ∎

6.3. Neprekidnost vektorskih funkcija više varijabli

Sada ćemo malo više pažnje posvetiti neprekidnosti vektorskih funkcija više varijabli. Neka je $f : D \to \mathbb{R}^m$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, vektorska funkcija od n varijabli. Kao što već znamo, ovu funkciju f možemo zapisati u obliku $f = (f_1, \ldots, f_m)$, gdje su $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, tzv. koordinatne funkcije. Uočimo da je $f_i = p_i \circ f$, gdje je $p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ i-ta koordinatna projekcija.

Kako je vektorska funkcija f sastavljena od m realnih funkcija f_i, ne treba nas čuditi da se mnogi problemi o vektorskim funkcijama svode na odgovarajuće probleme za realne funkcije. To se jako lijepo vidi na problemu neprekidnosti.

6.15. Teorem
Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : D \to \mathbb{R}^m$ funkcija. Funkcija f neprekidna je u točki $\mathbf{x}_0 \in D$ onda i samo onda ako su sva koordinatna preslikavanja $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots . m$, neprekidna u točki $\mathbf{x}_0$.

Dokaz. Neka je f neprekidna u točki $x_0 \in D$. Kako su koordinatne projekcije $p_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, neprekidne na $\mathbb{R}^m$ (primjer 6.6.), prema teoremu 6.14. sve kompozicije $f_i = p_i \circ f$, $i = 1, \ldots, m$, neprekidne su u točki $\mathbf{x}_0$.

Obratno, pretpostavimo da su sva koordinatna preslikavanja $f_i : D \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, neprekidna u točki $\mathbf{x}_0 \in D$. Treba pokazati da je f neprekidna u $\mathbf{x}_0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Kako su sva preslikavanje $f_i : D \to \mathbb{R}$ neprekidna u $\mathbf{x}_0$, postoje realni brojevi $\delta_i > 0$ takvi da je

$$|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}, \qquad \forall \mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta_i) \cap D.$$

Neka je $\delta := \min\{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Tada za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ vrijedi

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}_0)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \big(f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{x}_0)\big)^2} < \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon,$$

pa je f neprekidna u točki $\mathbf{x}_0$. ■ .

6.16. Teorem
Neka su $f, g : D \to \mathbb{R}$ neprekidne funkcija u točki $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:

(i) Funkcija $f + g : D \to \mathbb{R}$ neprekidna je u x_0.

(ii) Funkcija $\lambda f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna je u x_0.

(iii) Funkcija $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ neprekidna je u x_0.

(iv) Ako je $g(x_0) \neq 0$, onda je funkcija $\frac{f}{g}$ definirana na nekoj okolini (u D) od x_0 i neprekidna je u x_0.

(v) Funkcija $|f| : D \to \mathbb{R}$ neprekidna je u x_0.

6.17. PRIMJEDBA

Zbog teorema 6.15. tvrdnje *(i)*-*(ii)* vrijede i za vektorske funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}^m$. Nadalje, tvrdnja *(iii)* vrijedi i za vektorske funkcije ako se za produkt uzme skalarni produkt. Zbog neprekidnosti norme tvrdnja *(v)* vrijedi i za vektorske funkcije ako se apsolutna vrijednost zamijeni s normom.

Za dokaz teorema 6.16. trebat će nam sljedeće dvije leme:

6.18. LEMA (O LOKALNOJ OMEĐENOSTI NEPREKIDNE FUNKCIJE)

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : D \to \mathbb{R}^m$ funkcija. Ako je f neprekidna u točki $\mathbf{x}_0 \in D$, onda je ona omeđena na nekoj okolini točke $\mathbf{x}_0$, tj. postoje brojevi $r > 0$ i $M > 0$ takvi da je $\|f(\mathbf{x})\| < M$ za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, r) \cap D$.

Dokaz. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki $\mathbf{x}_0$, za $\varepsilon = 1$ postoji $r > 0$ takav da je $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < 1$ za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, r) \cap D$. Neka je $M := 1 + \|f(\mathbf{x}_0)\|$. Sada za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, r) \cap D$ pomoću nejednakosti trokuta dobivamo

$$\begin{aligned}\|f(\mathbf{x})\| &= \|\big(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\big) + f(\mathbf{x}_0)\| \\ &\leq \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| + \|f(\mathbf{x}_0)\| \\ &< 1 + \|f(\mathbf{x}_0)\| = M.\end{aligned}$$

■

6.19. LEMA

Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f : D \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u točki $\mathbf{x}_0 \in D$. Tada vrijedi:

(i) Ako je $f(\mathbf{x}_0) > 0$, onda postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(\mathbf{x}) > \tfrac{1}{2} f(\mathbf{x}_0) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D.$$

(ii) Ako je $f(\mathbf{x}_0) < 0$, onda postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f(\mathbf{x}) < \tfrac{1}{2} f(\mathbf{x}_0) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D.$$

Dokaz. *(i)* Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2} f(\mathbf{x}_0) > 0$. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki $\mathbf{x}_0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ vrijedi

$$f(\mathbf{x}) \in (f(\mathbf{x}_0) - \varepsilon, f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon) = \big(\tfrac{1}{2} f(\mathbf{x}_0), \tfrac{3}{2} f(\mathbf{x}_0)\big).$$

Zato je $f(\mathbf{x}) > \frac{1}{2} f(\mathbf{x}_0) > 0$.

(ii) Neka je $\varepsilon = -\frac{1}{2} f(\mathbf{x}_0) > 0$. Tada zbog neprekidnosti od f u $\mathbf{x}_0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ vrijedi

$$f(\mathbf{x}) \in (f(\mathbf{x}_0) - \varepsilon, f(\mathbf{x}_0) + \varepsilon) = \big(\tfrac{3}{2} f(\mathbf{x}_0), \tfrac{1}{2} f(\mathbf{x}_0)\big).$$

Zato je $f(\mathbf{x}) < \frac{1}{2} f(\mathbf{x}_0) < 0$. ■

Dokaz teorema 6.16. *(i)* Neka je $\varepsilon > 0$. Treba pokazati da postoji $\delta > 0$ takav da je $|(f+g)(\mathbf{x}) - (f+g)(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$ za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$.

Zbog neprekidnosti funkcija f i g u $\mathbf{x}_0$ postoje $\delta_1, \delta_2 > 0$ takvi da je

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| &< \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta_1) \cap D, \\ |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| &< \tfrac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall\, \mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta_2) \cap D. \end{aligned}$$

Neka je $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za svaku točku $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ vrijedi

$$\begin{aligned} |(f+g)(\mathbf{x}) - (f+g)(\mathbf{x}_0)| &= |(f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)) + (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0))| \\ &\le |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| + |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(ii) Ako je $\lambda = 0$, onda je λf konstanta, pa je neprekidna. Zato nadalje pretpostavimo da je $\lambda \neq 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti od f u točki $\mathbf{x}_0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$ za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$. Sada se lako pokaže da za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ vrijedi $|(\lambda f)(\mathbf{x}) - (\lambda f)(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon$.

(iii) Za dokaz ove tvrdnje iskoristit ćemo nejednakost

$$\begin{aligned} |(fg)(\mathbf{x}) - (fg)(\mathbf{x}_0)| &= |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}_0)| \\ &= |f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)g(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}_0)| \\ &= |f(\mathbf{x})[g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)] + g(\mathbf{x}_0)[f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)]| \\ &\le |f(\mathbf{x})| \cdot |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| + |g(\mathbf{x}_0)| \cdot |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \end{aligned}$$

i lemu 6.18. Prema lemi 6.18. postoje $r > 0$ i $M > 0$ takvi da je $|f(\mathbf{x})| < M$ i $|g(\mathbf{x})| < M$ za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, r) \cap D$. Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti funkcija f i g u točki $\mathbf{x}_0$ postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ vrijedi

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \tfrac{\varepsilon}{2M} \quad \& \quad |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| < \tfrac{\varepsilon}{2M}.$$

Pri tome bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\delta \le r$. Sada za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ dobivamo

$$\begin{aligned} |(fg)(\mathbf{x}) - (fg)(\mathbf{x}_0)| &\le |f(\mathbf{x})| \cdot |g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| + |g(\mathbf{x}_0)| \cdot |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \\ &< M \cdot \tfrac{\varepsilon}{2M} + M \cdot \tfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

(iv) Kako je $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, prema lemi 6.19. postoji $\delta_1 > 0$ takav da je

$$|g(\mathbf{x})| > \tfrac{1}{2}|g(\mathbf{x}_0)| \qquad \text{za svaki } \mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta_1) \cap D. \tag{6.6}$$

To znači da je funkcija $\frac{f}{g}$ definirana na skupu $K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta_1) \cap D$, koji je okolina (u D) točke $\mathbf{x}_0$. Kako je $f \cdot g = f \cdot \frac{1}{g}$, zbog (iii) dovoljno je pokazati da je $\frac{1}{g}$ neprekidna u $\mathbf{x}_0$. U tu ćemo svrhu iskoristiti jednakost

$$\Big|\frac{1}{g(\mathbf{x})} - \frac{1}{g(\mathbf{x}_0)}\Big| = \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{|g(\mathbf{x})| \cdot |g(\mathbf{x}_0)|} \tag{6.7}$$

koja nam sugerira kako treba „uštimati” dokaz ove tvrdnje.

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti od g u $\mathbf{x}_0$ postoji $\delta_2 > 0$ takav da je

$$|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)| < \tfrac{1}{2}|g(\mathbf{x}_0)|^2 \quad \text{za svaki } \mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta_2) \cap D. \tag{6.8}$$

Neka je $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tada za svaki $\mathbf{x} \in K_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{x}_0, \delta) \cap D$ iz (6.7), (6.6) i (6.8) dobivamo $\left|\frac{1}{g(\mathbf{x})} - \frac{1}{g(\mathbf{x}_0)}\right| < \varepsilon$.

(v) Tvrdnja slijedi iz neprekidnosti norme i neprekidnosti kompozicije neprekidnih preslikavanja. ■

Pomoću teorema 6.15., teorema 6.16. i teorema o neprekidnosti kompozicije neprekidnih funkcija lako je dokazati sljedeći korolar:

6.20. Korolar

(i) Zbrajanje i množenje realnih brojeva neprekidne su funkcije s $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$.

(ii) Polinomi (jedne ili više varijabli) neprekidne su funkcije.

(iii) Racionalne funkcije neprekidne su u svakoj točki u kojoj su definirane.

(iv) Skup svih neprekidnih funkcija s $D \subseteq \mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^m$ realan je vektorski prostor.

Dokaz. Radi ilustracije dokazat ćemo samo tvrdnju *(i)*: Pomoću koordinatnih projekcija $p_1, p_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ možemo pisati

$$\begin{aligned} x + y &= p_1(x,y) + p_2(x,y) \\ x \cdot y &= p_1(x,y) \cdot p_2(x,y). \end{aligned}$$

Kako su p_1 i p_2 neprekidne funkcije, prema teoremu 6.16. zbrajanje i množenje realnih brojeva neprekidne su funkcije. ■

Na kraju ove točke spomenimo da je lako pokazati da tvrdnje teorema 6.15. i teorema 6.16. vrijede i za preslikavanja definirana na podskupu D iz topološkog prostora X. Za dokaz tih tvrdnji potrebno je samo malo modificirati leme 6.18. i 6.19. Primjerice, umjesto leme 6.18. lako je dokazati sljedeću njezinu generalizaciju:

6.21. Lema (Generalizacija leme 6.18.)

Neka je X topološki prostor, $D \subseteq X$ i $f : D \to \mathbb{R}^m$ funkcija. Ako je f neprekidna u točki $x_0 \in D$, onda je ona omeđena na nekoj okolini točke x_0, tj. postoje otvorena okolina U točke x_0 i realan broj $M > 0$ takvi da je $\|f(\mathbf{x})\| < M$ za svaki $x \in U \cap D$.

Za ilustraciju primjene generalizacije tvrdnji teorema 6.15. i teorema 6.16. na topološke prostore, dokazat ćemo sljedeći teorem. U dokazu ćemo koristiti činjenicu da su zbroj i kvocijent neprekidnih funkcija neprekidne funkcije. Taj teorem ima važnu ulogu u topologiji kod razmatranja problema neprekidnog proširenja realne funkcije sa zatvorenog skupa na čitav prostor. U ovom udžbeniku mi to nećemo raditi, ali budući da za dokaz tog teorema već imamo sve pripremljeno, navodimo ga.

6.22. Teorem (Urysonova lema)
Neka je (X, d) metrički prostor i neka su A i B neprazni zatvoreni disjunktni skupovi od X. Tada postoji neprekidno preslikavanje $f : X \to [0, 1] \to \mathbb{R}$ takvo da je $f(x) = 0$ za sve x iz A i $f(x) = 1$ za sve x iz B.

Dokaz. Preslikavanja $x \mapsto d(x, A)$ i $x \mapsto d(x, B)$ neprekidna su (primjer 6.28.). Budući da je skup A (odnosno skup B) zatvoren, to je $d(x, A) = 0$ (odnosno $d(x, B) = 0$) onda i samo onda ako je $x \in A$ (odnosno $x \in B$) (vidi propoziciju 1.74.). Kako je $A \cap B = \emptyset$, za svaki $x \in X$ jest $d(x, A) + d(x, B) > 0$, pa je zato formulom

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$$

dobro definirana neprekidna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$. Lako je provjeriti da je $f(x) = 0$ za sve x iz A i $f(x) = 1$ za sve x iz B. ■

6.4. Uniformna neprekidnost

6.23. DEFINICIJA
Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ preslikavanje. Preslikavanje f je uniformno neprekidno (ili jednoliko neprekidno) na skupu D ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ za sve $x', x'' \in D$ za koje je $d_X(x', x'') < \delta$.

Očito je da uniformna neprekidnost povlači neprekidnost. Obratno ne vrijedi (vidi primjer 6.24.). Razlika između tih dvaju pojmova jest u tome što kod obične neprekidnosti δ ovisi o ε i o točki x_0 u kojoj se definira neprekidnost, dok kod uniformne neprekidnosti δ ovisi samo o ε.

6.24. PRIMJER. Funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \frac{1}{x}$ neprekidna je, ali nije uniformno neprekidna na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Treba pokazati da postoji $\varepsilon > 0$ sa svojstvom da za svaki $\delta > 0$ postoje točke $x', x'' \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ takve da je $|x' - x''| < \delta$ i $\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| \geq \varepsilon$. Zaista, niz $\left(\frac{1}{k}\right)$ je konvergentan pa je i Cauchyjev. Zato za svaki $\delta > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{k}\right| < \delta, \qquad \forall\, k, m \geq k_0.$$

Stavimo $x' = \frac{1}{m}$, $x'' = \frac{1}{k}$, gdje su $m, k \geq k_0$ i $m > n$. Tada je $|x' - x''| < \delta$, ali je ipak $\left|\frac{1}{x'} - \frac{1}{x''}\right| = |m - k| \geq 1$. Dakle, ni za jedan $\varepsilon \leq 1$ ne može se zadovoljiti definiciju uniformne neprekidnosti.

U matematičkoj analizi vrlo važnu klasu uniformno neprekidnih funkcija tvore tzv. Lipschitzove funkcije.

6.25. DEFINICIJA
Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori. Za preslikavanje $f : X \to Y$ kažemo da je Lipschitzovo ili da ima Lipschitzovo svojstvo ako postoji konstanta (Lipschitzova konstanta) $\lambda \geq 0$ takva da za bilo koje dvije točke $x_1, x_2 \in X$ vrijedi

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda \cdot d_X(x_1, x_2).$$

Lipschitzovu funkciju s konstantom $\lambda < 1$ zovemo kontrakcija.

6.26. PRIMJER.

(a) Koordinatne projekcije $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ imaju Lipschitzovo svojstvo.

(b) Svaka derivabilna funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, takva da joj je derivacija f' omeđena na (a, b), ima Lipschitzovo svojstvo. U to se lako uvjeriti pomoću Lagrangeova teorema srednje vrijednosti.

6.27. Teorem

Neka je $f : X \to Y$ Lipschitzovo preslikavanje metričkih prostora. Tada je f uniformno neprekidna.

Dokaz. Ako je $\lambda = 0$, onda je f konstanta pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da je $\lambda > 0$. Neka je $\varepsilon > 0$. Za δ uzmimo bilo koji realan broj takav da je $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{\lambda}$. Tada za sve $x', x'' \in X$ takve da je $d_X(x', x'') < \delta$ vrijedi

$$d_Y(f(x'), f(x'')) \leq \lambda d_X(x', x'') < \lambda\delta < \varepsilon,$$

pa je f uniformno neprekidna na X. ∎

6.28. Primjer. Neka je (X, d) metrički prostor i $A \subseteq X$ neki neprazan skup. Funkcija $\varrho_A : X \to \mathbb{R}$ koja točki $x \in X$ pridružuje njezinu udaljenost od skupa A, tj. $\varrho_A(x) = d(x, A)$, uniformno je neprekidna na X.

Zaista, tvrdnja slijedi iz nejednakosti (1.3) koju možemo zapisati kao

$$|\varrho_A(x) - \varrho_A(y)| \leq d(x, y),$$

odakle vidimo da je ϱ_A Lipschitzova funkcija s konstantom $\lambda = 1$ i zato je uniformno neprekidna prema teoremu 6.27.

6.29. Primjer. U normiranom vektorskom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ norma $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ je uniformno neprekidna funkcija.

Zaista, tvrdnja izlazi iz nejednakosti (1.3) ako se stavi $A = \{\mathbf{0}\}$, jer tada je $\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0})$.

Isti zaključak može se dobiti i pomoću nejednakosti (6.3) dokazane u primjeru 6.6. Ta nejednakost glasi

$$\big|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\|\,\big| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in X,$$

odakle zaključujemo da je norma $\|\cdot\|$ Lipschitzovo preslikavanje.

6.30. Primjer. Neka je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linearni operator. Vrijedi:

(i) A jest ograničen u smislu da postoji realan broj $\lambda \geq 0$ takav da je

$$\|A(\mathbf{x})\| \leq \lambda \cdot \|\mathbf{x}\|, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) A ima Lipschitzovo svojstvo, pa je stoga uniformno neprekidan.

Zaista, neka je $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ standardna baza u $\mathbb{R}^n$. Stavimo

$$M := n \max\{\|A(\mathbf{e}_i)\| : i = 1, \ldots, n\}.$$

Tada za svaki vektor $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}\|A(\mathbf{x})\| &= \Big\|A\big(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i\big)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n x_i A(\mathbf{e}_i)\Big\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|A(\mathbf{e}_i)\| \\ &\leq \frac{M}{n}\sum_{i=1}^n |x_i| \leq \frac{M}{n}\sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}\| = M\|\mathbf{x}\|.\end{aligned}$$

Time smo dokazali tvrdnju (i). Za dokaz tvrdnje (ii) dovoljno je uočiti da je

$$\|A(\mathbf{x}-\mathbf{y})\| \leq M\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|, \quad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

6.5. Neprekidne funkcije na kompaktima

6.31. Teorem
Neka su X i Y topološki prostori, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je slika $f(K)$ kompaktan skup u Y.

Dokaz. Treba pokazati da svaki otvoreni pokrivač skupa $f(K)$ ima konačan potpokrivač. Neka je $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ otvoreni pokrivač skupa $f(K)$. Tada je $f(K) \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha$, pa je zato

$$K = f^{-1}(f(K)) = f^{-1}\big(\bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha\big) = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(V_\alpha).$$

Zbog neprekidnosti preslikavanja f, za svaki $\alpha \in A$ skup $f^{-1}(V_\alpha)$ je otvoren u K, tj. postoji skup U_α otvoren u X takav da je $f^{-1}(V_\alpha) = K \cap U_\alpha$. Zato je

$$K = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(V_\alpha) \subseteq \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha.$$

Dakle, familija $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ je otvoreni pokrivač skupa K. Zbog kompaktnosti skupa K ta familija ima konačan potpokrivač $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}\}$. Dakle, $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. Kako je $f(K \cap U_\alpha) = f(f^{-1}(V_\alpha)) \subseteq V_\alpha$, $\alpha \in A$, to je

$$f(K) = f\big(K \cap \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}\big) = f\big(\bigcup_{i=1}^n (K \cap U_{\alpha_i})\big) = \bigcup_{i=1}^n f(K \cap U_{\alpha_i}) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i},$$

što nam pokazuje da je $\{V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ konačan potpokrivač skupa $f(K)$. ■

Sljedeći korolar govori nam da svaka neprekidna realna funkcija f definirana na kompaktu K postiže i minimum i maksimum. Specijalno, ako je K kompaktan podskup od $\mathbb{R}$ i za funkciju f uzmemo inkluziju (restrikcija identitete na skup K), dobivamo da K ima minimum i maksimum.

6.32. Korolar (Weierstrassov teorem)
Neka je X topološki prostor, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Tada f ima minimum i maksimum, tj. postoje točke $x_1, x_2 \in K$ sa svojstvom

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \qquad \forall x \in K.$$

Dokaz. Prema teoremu 6.31. skup $f(K)$ jest kompaktan, pa je prema korolaru 5.6. omeđen i zatvoren. Zbog omeđenosti postoje $\inf f(K)$ i $\sup f(K)$.

Pokažimo da je $\inf f(K) \in f(K)$. Zaista, prema definiciji infimuma za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $y_k \in f(K)$ takav da je $\inf f(K) \leq y_k < \inf f(K) + \frac{1}{k}$. To znači da niz (y_k) konvergira prema $\inf f(K)$. Zbog zatvorenosti skupa $f(K)$ jest $\inf f(K) \in f(K)$ (teorem 2.15.). Slično se pokaže da je $\sup f(K) \in f(K)$.

Kako je $\inf f(K) \in f(K)$ i $\sup f(K) \in f(K)$, postoje točke $x_1, x_2 \in K$ takve da je $f(x_1) = \inf f(K)$, $f(x_2) = \sup f(K)$. Zato za svaki $x \in K$ vrijedi

$$f(x_1) = \inf f(K) \leq f(x) \leq \sup f(K) = f(x_2).$$

■

6.33. KOROLAR

Neka je X topološki prostor, $K \subseteq X$ kompaktan skup, a $f : K \to \mathbb{R}$ neprekidno preslikavanje. Ako je $f(x) > 0$ za svaki $x \in K$, onda postoji realan broj $c > 0$ takav da je $f(x) > c$ za svaki $x \in K$.

Dokaz. Dovoljno je staviti $c = \frac{1}{2} \inf f(K) = \frac{1}{2} \min f(K)$. ■

Sada ćemo koristeći Weierstrassov teorem prvo dokazati da su na konačno dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru sve norme ekvivalentne, a zatim ćemo dokazati potpunost konačno dimenzionalanog normiranog vektorskog prostora.

6.34. TEOREM

Sve norme na konačno dimenzionalnom realnom vektorskom prostoru jesu ekvivalentne.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\dim X = n$. Odaberimo neku bazu $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)$ prostora X. Neka je $\|\cdot\|_{\mathbf{b},2}$ norma na X definirana u primjedbi 1.14., tj. za $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i$, imamo

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{b},2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Kako je ekvivalentnost normi relacija ekvivalencije na skupu svih normi na X, dovoljno je pokazati da je proizvoljna norma $\|\cdot\|$ na X ekvivalentna s $\|\cdot\|_{\mathbf{b},2}$.

Stavimo

$$M := \max\{\|\mathbf{b}_i\| : i = 1, \ldots, n\}.$$

Tada za svaki vektor $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i \in X$ vrijedi

$$\|\mathbf{x}\| = \Big\| \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i \Big\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \cdot \|\mathbf{b}_i\| \leq M \sum_{i=1}^n |x_i| \leq nM \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{b},2}. \tag{6.9}$$

Zadnja nejednakost posljedica je nejednakosti $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq n \max\limits_{i=1,\ldots,n} |x_i| \leq n \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{b},2}$.

Promotrimo funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i \Big\|.$$

Prvo ćemo pokazati da je f neprekidna funkcija s euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ u euklidski prostor $\mathbb{R}$. Neka je zato $\boldsymbol{\alpha}_0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Za svaki $\varepsilon > 0$ treba pronaći $\delta > 0$ takav da je $\big|f(\boldsymbol{\alpha}) - f(\boldsymbol{\alpha}_0)\big| < \varepsilon$ za svaki $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ za koji je $\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0\|_2 < \delta$ (ovdje $\|\cdot\|_2$ označava euklidsku normu na $\mathbb{R}^n$!). U tu svrhu, neka je

$$\mathbf{x} := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_0 := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^0 \mathbf{b}_i.$$

Zamijenimo li u (6.9) $\mathbf{x}$ s $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, dobivamo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \le nM\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{b},2}$. Pomoću te nejednakosti i nejednakosti

$$\Big| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\| \Big| \le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|, \qquad \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in X,$$

čiji se dokaz može naći u primjeru 6.6., dobivamo

$$\begin{aligned} \big|f(\boldsymbol{\alpha}) - f(\boldsymbol{\alpha}_0)\big| &= \Big| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\| \Big| \\ &\le \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \\ &\le nM\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{b},2} \\ &= nM\|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}_0\|_2, \end{aligned}$$

odakle vidimo da za traženi broj $\delta > 0$ možemo uzeti bilo koji relan takav da je $\delta < \frac{\varepsilon}{nM}$. Time smo dokazali neprekidnost funkcije f.

Neka je m minimum funkcije f na jediničnoj sferi u $\mathbb{R}^n$, tj. na skupu

$$S^{n-1} = \{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n : \|\boldsymbol{\alpha}\|_2 = 1\}.$$

Jedinična sfera kompaktan je skup, a f neprekidna je funkcija pa minimum postoji po Weierstrassovom teoremu. Tada za svaki $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$ vrijedi

$$\|\mathbf{x}\| = f(\boldsymbol{\alpha}) = f\Big(\|\boldsymbol{\alpha}\|_2 \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2}\Big) = \|\boldsymbol{\alpha}\|_2 f\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2}\Big) \ge m\|\boldsymbol{\alpha}\|_2 = m\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{b},2}, \tag{6.10}$$

jer je $\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2} \in S^{n-1}$, pa je $f\Big(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|_2}\Big) \ge m$.

Uočite da posljednja nejednakost vrijedi i za $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Zato, iz (6.10) i (6.9) dobivamo

$$m\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{b},2} \le \|\mathbf{x}\| \le nM\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{b},2},$$

čime je pokazano da su norme $\|\cdot\|$ i $\|\cdot\|_{\mathbf{b},2}$ ekvivalentne. ■

Koristeći prethodni teorem i činjenicu da je $\mathbb{R}$ potpun u euklidskoj metrici, lako je dokazati sljedeću tvrdnju.

6.35. Teorem
Svaki konačno dimenzionalan normiran prostor je potpun.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\dim X = n$. Kao i u dokazu prethodnog teorema, odaberimo neku bazu $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ prostora X. Neka je $\|\cdot\|_{\mathbf{b},2}$ norma na X definirana u primjedbi 1.14., tj. za $\mathbf{x} \in X$, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i$,

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{b},2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Dovoljno je pokazati (vidi zadatak 4 na str. 71) da je X potpun u toj normi. Pretpostavimo da je $(\mathbf{x}_k)$, $\mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^n \xi_i^k \mathbf{b}_i$, Cauchyjev niz u X. Za svaki $k \in \mathbb{N}$, neka je

$$\boldsymbol{\xi}_k := (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k) \in \mathbb{R}^n.$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $(\mathbf{x}_k)$ Cauchyjev niz, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\|\boldsymbol{\xi}_m - \boldsymbol{\xi}_k\| = \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\|_{\mathbf{b},2} < \varepsilon, \quad \forall m, k \geq k_0,$$

gdje $\|\cdot\|$ označava euklidsku normu na $\mathbb{R}^n$. To znači da je $(\boldsymbol{\xi}_k)$ Cauchyjev niz u $\mathbb{R}^n$ s euklidskom normom. Zbog potpunosti prostora $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ postoji točka $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{0}} = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \mathbb{R}^n$ prema kojoj $(\boldsymbol{\xi}_k)$ konvergira. Neka je $\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^k \xi_i^0 \mathbf{b}_i$. Kako $\boldsymbol{\xi}_k \to \boldsymbol{\xi}_0$, postoji $l_0 \in \mathbf{N}$ takav da je

$$\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{b},2} = \|\boldsymbol{\xi}_k - \boldsymbol{\xi}_0\| < \varepsilon, \quad \forall k \geq l_0,$$

što nam govori da $(\mathbf{x}_k)$ konvergira prema $\mathbf{x}_0$ u normi $\|\cdot\|_{\mathbf{b},2}$. ■

6.36. Definicija
Neka su X i Y topološki prostori. Neprekidna bijekcija $f : X \to Y$ je homeomorfizam ako je inverzno preslikavanje $f^{-1} : Y \to X$ neprekidno.

Za prostore X i Y kažemo da su homeomorfni ako postoji barem jedan homeomorfizam $f : X \to Y$.

6.37. Primjer. Skup $\mathbb{R}$ i interval $(-1, 1)$ jesu homeomorfni. Za homeomorfizam možemo uzeti preslikavanje $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definirano formulom $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

Iz definicije slijedi da je kompozicija homeomorfizama opet homeomorfizam te da je i f^{-1} homeomorfizam za svaki homeomorfizam f. Identiteta $1_X : X \to X$ očito je homeomorfizam. Zato je homeomorfizam relacija ekvivalencije čije se klase sastoje od međusobno homeomorfnih prostora. Svako svojstvo prostora koje imaju svi prostori iz iste klase zove se topološko svojstvo ili topološka invarijanta.

6.38. Primjedba
Ilustrirajmo primjerima da inverz neprekidne bijekcije ne mora biti neprekidno preslikavanje:

a) Neka je $X = \mathbb{R}^n$ s diskretnom metrikom, a $Y = \mathbb{R}^n$ s euklidskom metrikom. Identiteta, tj. preslikavanje $i : X \to Y$, $i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ za svaki $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, neprekidna je bijekcija, ali inverz nije neprekidno preslikavanje.

b) Funkcija
$$f : \big(-\pi, \pi] \to S^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$
zadana s
$$f(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in (-\pi, \pi]$$
neprekidna je bijekcija.

Za svaki niz (x_k) u $(-\pi, \pi]$ koji konvergira prema $-\pi$ imamo
$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty} (\cos x_k, \sin x_k) = (-1, 0) = f(\pi).$$
Zato, kada bi $f^{-1} : S^1 \to (-\pi, \pi]$ bila neprekidna u točki $f(\pi)$, pomoću Heineove karakterizacije neprekidnosti dobili bismo
$$\pi = f^{-1}(f(\pi)) = \lim_{k\to\infty} f^{-1}(f(x_k)) = \lim_{k\to\infty} x_k = -\pi.$$

6.39. Teorem

Neka je $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija metričkih prostora. Ako je X kompaktan, onda je i inverzno preslikavanje $g = f^{-1} : Y \to X$ neprekidno (tj. f jest homeomorfizam).

Dokaz. Prema teoremu 6.11. dovoljno je pokazati da je za svaki zatvoreni skup $F \subseteq X$ zatvoren i skup $g^{-1}(F) = f(F) \subseteq Y$.

Ako je $F \subseteq X$ zatvoren podskup kompaktnog prostora X, onda je F kompaktan (teorem 5.3.), pa je i $f(F) = g^{-1}(F)$ kompaktan u Y(teorem 6.31.). No tada je, prema korolaru 5.5., skup $g^{-1}(F)$ omeđen i zatvoren. ■

Za funkcije definirane na kompaktnom skupu neprekidnost i uniformna neprekidnost podudaraju se. O tome nam govori sljedeći teorem:

6.40. Teorem

Neka su X i Y metrički prostori, $K \subseteq X$ i $f : K \to Y$ neprekidno preslikavanje. Ako je K kompaktan skup, onda je f uniformno neprekidna na K.

Dokaz. Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ za sve $x', x'' \in K$ za koje je $d_X(x', x'') < \delta$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Zbog neprekidnosti preslikavanja f za svaki $x \in K$ postoji realan broj $\delta_x > 0$ takav da je $f(K \cap K_X(x, \delta_x)) \subseteq K_Y(f(x), \varepsilon/2)$. Familija $\{K_X(x, \delta_x) : x \in K\}$ otvoreni je pokrivač kompaktnog skupa K. Neka je $\delta > 0$ njegov Lebesgueov broj (egzistencija Lebesgueova broja osigurana je teoremom 5.13.). Prema definiciji Lebesgueova broja, za svake dvije točke $x', x'' \in K$ za koje je $\operatorname{diam}\{x', x''\} = d_X(x', x'') < \delta$ postoji točka $x \in K$ takva da je $x', x'' \in K_X(x, \delta_x)$. Zato je
$$d_Y(f(x'), f(x'')) \le d_Y(f(x'), f(x)) + d_Y(f(x), f(x'')) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
■

6.6. Neprekidnost i uniformna konvergencija

Kao što smo ilustrirali u primjeru 3.4., konvergentan niz neprekidnih funkcija ne mora kao granicu imati neprekidnu funkciju. Navedimo još jedan jednostavan primjer:

6.41. PRIMJER. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ neka je $f_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$ zadana formulom (skicirajte graf!)

$$f_k(x) = \begin{cases} -k|x| + 1, & - \le \frac{1}{k} \le x \le \frac{1}{k} \\ 0, & x \in [-1, \frac{1}{k}) \cup (\frac{1}{k}, 1]. \end{cases}$$

Sve funkcije f_k neprekidne su na $[-1,1]$. Njihova granična funkcija

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

ima prekid u nuli.

Za vježbu pokažite da niz funkcija (f_k) ne konvergira uniformno prema f!

Budući da neprekidnost niza funkcija nije dovoljna da bi i granična funkcija bila neprekidna, potrebno je zahtijevati dodatne uvjete. Kao što nam govori sljedeći važan teorem, dovoljno je zahtijevati uniformnu neprekidnost niza funkcija. Uočite da dokaz ide na sličan način kao i dokaz leme 3.14.

6.42. TEOREM
Neka je X topološki prostor i (f_k) niz funkcija $f_k : X \to \mathbb{R}$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to \mathbb{R}$. Ako je svaka od funkcija f_k neprekidna u točki $x_0 \in X$, onda je i granična funkcija f neprekidna u x_0.

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$. Prema definiciji uniformne konvergencije postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$|f_k(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{za svaki } x \in X \text{ i za svaki } k \ge k_0. \tag{6.11}$$

Kako je f_{k_0} neprekidna u točki x_0, postoji takva otvorena okolina U od x_0 da je

$$(\forall x \in U)\ |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.12}$$

Sada za svaki $k \ge k_0$ i za svaki $x \in U$ pomoću (6.11) i (6.12) dobivamo

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\le |f(x) - f_{k_0}(x)| + |f_{k_0}(x) - f_{k_0}(x_0)| + |f_{k_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &< \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} + \tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

što dokazuje da je f neprekidna u točki x_0. ■

6.43. KOROLAR
Neka je X topološki prostor i neka je $\sum f_k$ red realnih funkcija $f_k : X \to \mathbb{R}$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f : X \to \mathbb{R}$. Ako je svaka funkcija f_k neprekidna u točki $x_0 \in X$ (odnosno, na X), onda je i funkcija f neprekidna u točki $x_0 \in X$ (odnosno, na X).

Dokaz. Parcijalne sume $s_k = \sum_{i=1}^{k} f_i$ tvore niz neprekidnih funkcija koji uniformno konvergira prema funkciji f. ■

Neka je X topološki prostor, a $BC(X, \mathbb{R})$ skup svih omeđenih neprekidnih realnih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$. Očito je $BC(X, \mathbb{R})$ potprostor vektorskog prostora $B(X, \mathbb{R})$ te je i on normiran prostor s uniformnom normom $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$.

6.44. KOROLAR
Ako je X topološki prostor, onda je skup $BC(X, \mathbb{R})$ zatvoren u $\big(B(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$.

Dokaz. Prema teoremu 2.15., dovoljno je pokazati da $BC(X, \mathbb{R})$ sadrži limese svih svojih konvergentnih nizova. Zato, neka je (f_k) niz u $BC(X, \mathbb{R})$ koji konvergira (u normi $\|\cdot\|_\infty$) prema $f \in B(X, \mathbb{R})$. Treba pokazati da je $f \in BC(X, \mathbb{R})$, a za to je dovoljno pokazati da je f neprekidna na X. Kako konvergencija niza funkcija (f_k) u normi $\|\cdot\|_\infty$ zapravo znači uniformnu konvergenciju tog niza, (f_k) niz je omeđenih neprekidnih funkcija koji konvergira prema funkciji f. Prema prethodnom teoremu, f je neprekidna na X. ■

6.45. KOROLAR
Ako je X topološki prostor, onda je $\big(BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ Banachov prostor.

Dokaz. Prema prethodnom korolaru $BC(X, \mathbb{R})$ zatvoren je podskup od $B(X, \mathbb{R})$, a $\big(BC(X, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ potpun je prostor (vidi teorem 4.11.) Tvrdnja slijedi iz teorema 4.9. ■

Zadaci za vježbu

1. Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$ i $f : D \to Y$ funkcija. Pokažite da je f neprekidna u točki $x_0 \in D$ onda i samo onda ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $K_X(x_0, \delta) \cap D \subseteq f^{-1}\big(K_Y(f(x_0), \varepsilon)\big)$.

2. Neka je X diskretan, a Y proizvoljan topološki prostor. Dokazati da je svako preslikavanje $f : X \to X$ neprekidno na X.

3. Neka $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ima svojstvo
$$\lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x-h)] = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$
Je li f neprekidna na $\mathbb{R}$?
(Uputa: Općenito ne. Funkcija $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \end{cases}$ ima navedeno svojstvo, ali je prekidna u svakoj točki iz skupa $\mathbb{Z}$.)

4. Neka su $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane formulama
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Pokažite da je f omeđena na $\mathbb{R}^2$, ali nije neprekidna u točki $(0,0)$.

(b) Pokažite da je g neomeđena na svakoj okolini točke $(0,0)$, pa stoga zbog leme 6.18. nije neprekidna u točki $(0,0)$.

(c) Pokažite da su restrikcije funkcija f i g na bilo koji pravac neprekidne funkcije.

(Uputa: (a) Kako je $x^2+y^4 \geq 2xy^2$, to je $f(x,y) \leq 2$ za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, što nam govori da je f omeđena na $\mathbb{R}^2$. Niz $\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right)$ konvergira prema $(0,0)$, ali $f\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) \to \frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$, pa f nije neprekidna u točki $(0,0)$. (b) Niz $(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k}\right)$ konvergira prema $(0,0)$. Kako je $g(x_k, y_k) = \frac{k}{2}$, g jest neomeđena na svakoj okolini točke $(0,0)$. (c) Neka je pravac p pravac u ravnini. (c1) Pretpostavimo da je pravac p zadan jednadžbom $x = c$. Ako je $c \neq 0$, onda je $f_{|p}(x,y) = cy^2/(c^2+y^4)$, $g_{|p}(x,y) = cy^2/(c^2+y^6)$. Kako su $y \mapsto cy^2/(c^2+y^4)$, $y \mapsto cy^2/(c^2+y^6)$ neprekidne funkcije na $\mathbb{R}$, restrikcije $f_{|p}$ i $g_{|p}$ neprekidne su na p. Ako je $c = 0$, onda je $f_{|p}(x,y) = 0$, $g_{|p}(x,y) = 0$. (c2) Pretpostavimo da je pravac p zadan jednadžbom $y = ax+b$. Ako je $b \neq 0$, onda pravac p ne prolazi točkom $(0,0)$, pa je $f_{|p}(x,y) = x(ax+b)^2/(x^2+(ax+b)^4)$, $g_{|p}(x,y) = x(ax+b)^2/(x^2+(ax+b)^6)$. Funkcije $x \mapsto x(ax+b)^2/(x^2+(ax+b)^4)$, $x \mapsto x(ax+b)^2/(x^2+(ax+b)^6)$ neprekidne su na $\mathbb{R}$, pa su zato restrikcije $f_{|p}$ i $g_{|p}$ neprekidne na p. Ako je $b = 0$, onda je

$$f_{|p}(x,y) = \begin{cases} \frac{a^2x}{1+a^4x^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g_{|p}(x,y) = \begin{cases} \frac{a^2x}{1+a^6x^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Lako je pokazati da za svaki niz (x_k, ax_k) koji konvergira prema (x_0, ax_0) vrijedi $f_{|p}(x_k, y_k) \to f_{|p}(x_0, ax_0)$ i $f_{|p}(x_k, y_k) \to g_{|p}(x_0, ax_0)$. Prema Heineovoj karakterizaciji neprekidnosti, restrikcije $f_{|p}$ i $g_{|p}$ neprekidne su na p.)

5. Pokažite da $f : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{ako je } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ gdje su } p \neq 0 \text{ i } q \text{ relativno prosti brojevi} \\ 1, & \text{ako je } x = 0 \\ 0, & \text{ako je } x \text{ iracionalan broj,} \end{cases}$$

ima prekid u svakoj racionalnoj točki te da je neprekidna u svakoj iracionalnoj točki.

(Uputa: Ako je $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, gdje su $p \neq 0$ i q relativno prosti brojevi, onda je $f(x_0) = \frac{1}{q}$. Odaberimo $\varepsilon > 0$ takav da je $0 < \frac{1}{q} - \varepsilon$. Za svaki $\delta > 0$ postoji iracionalan broj $x_\delta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, pa zato $f(x_\delta) = 0$ ne leži u intervalu $\left(\frac{1}{q} - \varepsilon, \frac{1}{q} + \varepsilon\right)$. Preostaje pokazati da je f neprekidna u svakoj iracionalnoj točki x_0. Neka je $\varepsilon > 0$. Uočimo da postoji konačno mnogo racionalnih brojeva $p/q \in [x_0 - 1, x_0 + 1]$ takvih da je $1/q \geq \varepsilon$. Odaberimo dovoljno malen $\delta > 0$ takav da $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ ne sadrži ni jedan takav racionalan broj. Tada je $f(x) = 0$ za svaki $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.)

6. Pokažite da su segmenti $A = [a, b]$ i $I = [0, 1]$ homeomorfni.

   (Uputa: Za homeomorfizam se može uzeti funkcija $f : A \to I$ zadana s $f(x) = a + (b - a)x$.)

7. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$ topoloških prostora otvoreno ako je slika otvorenog skupa otvoren skup. Dokažite da je f homeomorfizam onda i samo onda ako je f neprekidno i otvoreno bijektivno preslikavanje.

8. Pokažite da uniformno neprekidno preslikavanje „čuva" Cauchyjevost nizova. Preciznije, ako je $f : X \to Y$ uniformno neprekidno preslikavanje metričkih prostora, a (x_k) Cauchyjev niz u X, onda je $(f(x_k))$ Cauchyjev niz u Y.

   (Uputa: Neka je (x_k) Cauchyjev niz u X, a $\varepsilon > 0$. Zbog uniformne neprekidnosti postoji $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$ za sve $x', x'' \in X$ za koje je $d_X(x', x'') < \delta$. Niz (x_k) jest Cauchyjev, pa zato postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ sa svojstvom da je $d_X(x_m, x_k) < \delta$ za sve $k, m \geq k_0$. Zato za sve $k, m \geq k_0$ vrijedi $d_Y(f(x_m), f(x_k)) < \varepsilon$.)

9. Pokažite primjerom da homeomorfizmi ne čuvaju Cauchyjevost nizova.

   (Uputa: Neka je $X = (0, \infty)$. Funkcija $f : X \to X$ zadana s $f(x) = \frac{1}{x}$ jest homeomorfizam. Niz $x_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$ jest Cauchyjev, a niz $f(x_k) = k$ nije Cauchyjev.)

10. Neka je $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

    (a) Pokažite da je f uniformno neprekidna na svakom skupu $[a, \infty)$, $a > 0$.

    (b) Pokažite da f nije uniformno neprekidna na intervalu $(0, 2)$.

    (Uputa: (a) Neka je zadan $\varepsilon > 0$. Kako je $|f(x) - f(y)| = \left|\frac{x+y}{x^2y^2}\right| \cdot |x - y|$ te kako za sve $x, y \geq a > 0$ vrijedi

    $$\left|\frac{x+y}{x^2y^2}\right| \leq \left|\frac{1}{xy^2}\right| + \left|\frac{1}{x^2y}\right| \leq \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^3} = \frac{2}{a^3},$$

    za $\delta > 0$ možemo uzeti bilo koji realan broj manji od $\varepsilon a^3/2$. (b) Niz $x_k := \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, jest Cauchyjev niz iz $(0, 2)$. Kako je $|f(x_{2k}) - f(x_k)| = 3k^2 \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$, niz $(f(x_k))$ nije Cauchyjev, pa zato f nije uniformno neprekidna na intervalu $(0, 2)$ (vidi 8. zadatak)).

11. Pokažite da je funkcija sin Lipschitzova s konstantom $\lambda = 1$.

    (Uputa: Neka su $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$. Prema Lagrangeovu teoremu srednje vrijednosti postoji $\vartheta \in (0, 1)$ takav da je $\sin x - \sin y = \cos(x + \vartheta(y - x)) \cdot (x - y)$, odakle se dobiva $|\sin x - \sin y| \leq 1 \cdot |x - y|$.)

12. Zadan je niz funkcija $f_k(x) = \frac{x}{1+kx^2}$, $k \in \mathbb{R}$, s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$.

    (a) Pronađite granične funkcije $f := \lim_{k\to\infty} f_k$ i $g := \lim_{k\to\infty} f_k'$. Pokažite da $f'(x)$ postoji za svaki $x \in \mathbb{R}$, ali da je $f'(0) \neq g(0)$. Za koje vrijednosti varijable x je $f'(x) = g(x)$?

(b) Pokažite da niz funkcija (f_k) uniformno konvergira prema funkciji f.

(c) Konvergira li niz funkcija (f_k') uniformno prema funkciji g na $\mathbb{R}$?

(d) Pokažite da niz funkcija (f_k') uniformno konvergira prema funkciji g na svakom segmentu $[a,b]$ koji ne sadrži 0.

(Uputa: (a) $f = 0$. Kako je $f_k'(x) = \frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}$, dobiva se

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} f_k'(x) = \begin{cases} 1, \ x = 0 \\ 0, \ x \neq 0. \end{cases}$$

(b) Iz nejednakosti $\frac{1+kx^2}{2} \geq \sqrt{k}|x|$ slijedi $\left|\frac{x}{1+kx^2}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$, pomoću čega je lako dokazati uniformnu konvergenciju. (c) Ne. Kada bi konvergencija bila uniformna, budući da su sve funkcije f_k' neprekidne na $\mathbb{R}$, tada bi bila neprekidna i granična funkcija g (vidi teorem 6.42.). (d) Tvrdnju je lako dokazati pomoću nejednakosti $\left|\frac{1-kx^2}{(1+kx^2)^2}\right| \leq \frac{1}{1+kx^2} \leq \frac{1}{ka^2}$.)

13. Pokažite da se funkcija $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ zadana s $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ne može neprekidno proširiti do funkcije definirane na cijelom skupu $\mathbb{R}$.

    (Uputa: Nizovi $x_k = \frac{1}{2k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, i $y_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, konvergiraju prema 0. Kako $f(x_k) = 0 \to 0$, a $f(y_n) = 1 \to 1$, funkciju f nije moguće proširiti po neprekidnosti u točki 0 (vidi Heineovu karakterizaciju neprekidnosti).)

14. Neka su $f, g : X \to \mathbb{R}$ neprekidna preslikavanja topološkog prostora X u $\mathbb{R}$ te neka je $D \subseteq X$ gust na X. Dokažite: Ako je $f(x) \leq g(x)$ za sve $x \in D$, onda je $f(x) \leq g(x)$ za sve $x \in X$.

    (Uputa: Postupite slično kao u dokazu korolara 6.13.)

7. Banachov teorem o fiksnoj točki

Za točku $x^\star \in X$ kažemo da je fiksna za preslikavanje $f : X \to X$ ako je $f(x^\star) = x^\star$. Sljedeći teorem ključan je za dokaz mnogih važnih rezultata.

7.1. Teorem (Banachov teorem o fiksnoj točki)
Neka je (X, d) potpun metrički prostor, a $f : X \to X$ kontrakcija s konstantom λ. Tada vrijedi:

(i) Preslikavanje f ima jednu jedinu fiksnu točku $x^\star \in X$.

(ii) Za svaku točku $x_1 \in X$ niz (x_k) definiran s

$$x_k := f(x_{k-1}), \quad k \geq 2$$

konvergira prema jedinstvenoj fiksnoj točki $x^\star$.

(iii) Vrijedi

$$d(x_k, x^\star) \leq \frac{\lambda^{k-1}}{1-\lambda} d(x_1, f(x_1)). \tag{7.1}$$

Dokaz. Odaberimo proizvoljnu točku $x_1 \in X$, a zatim definirajmo indukcijom niz (x_k) iz X na sljedeći način

$$x_k := f(x_{k-1}), \quad k \geq 2.$$

Pokažimo da je (x_k) Cauchyjev niz. Teleskopiranjem se dobiva

$$d(x_k, x_{k+1}) = d(f(x_{k-1}), f(x_k)) \leq \lambda d(x_{k-1}, x_k) \leq \ldots \leq \lambda^{k-1} d(x_1, x_2).$$

Zato za svaki $j \in \mathbb{N}$ pomoću nejednakosti trokuta zaključujemo:

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k+j}) &\leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \ldots + d(x_{k+j-1}, x_{k+j}) \\ &\leq \lambda^{k-1} d(x_1, x_2) + \lambda^k d(x_1, x_2) + \ldots + \lambda^{k+j-2} d(x_1, x_2) \\ &= \lambda^{k-1} (1 + \lambda + \lambda^2 + \ldots + \lambda^{j-1})\, d(x_1, x_2) \\ &= \lambda^{k-1} \frac{1-\lambda^j}{1-\lambda}\, d(x_1, x_2) \\ &\leq \frac{\lambda^{k-1}}{1-\lambda}\, d(x_1, x_2). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Kako je $0 \leq \lambda < 1$, to je $\lim_{k\to\infty} \lambda^{k-1} = 0$. Zato za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{\lambda^{k-1}}{1-\lambda}\, d(x_1, x_2) < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$. Zbog (7.2) tada jest $d(x_k, x_{k+j}) < \varepsilon$ za svaki $k \geq k_0$, tj. niz (x_k) jest Cauchyjev.

Zbog potpunosti prostora (X, d) Cauchyjev niz (x_k) konvergira prema nekoj točki $x^\star \in X$. Nadalje, vrijedi

$$\begin{aligned} d(x^\star, f(x^\star)) &\leq d(x^\star, x_k) + d(x_k, f(x^\star)) = d(x^\star, x_k) + d(f(x_{k-1}), f(x^\star)) \\ &\leq d(x^\star, x_k) + \lambda \cdot d(x_{k-1}, x^\star). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Kako $x_k \to x^\star$, to $d(x^\star, x_k) \to 0$ i $d(x_{k-1}, x^\star) \to 0$, pa iz (7.3) dobivamo

$$d(x^\star, f(x^\star)) = 0,$$

tj. $x^\star$ jest fiksna točka preslikavanja f.

Pokažimo jedinstvenost fiksne točke. Pretpostavimo da je i $z \in X$ fiksna točka, tj. da je $f(z) = z$. Tada bismo imali

$$d(x^\star, z) = d(f(x^\star), f(z)) \le \lambda \cdot d(x^\star, z).$$

Kako je $0 \le \lambda < 1$, gornja jednakost povlači da je $d(x^\star, z) = 0$, tj. $z = x^\star$.

Graničnim prijelazom $j \to \infty$ iz (7.2) dobivamo

$$d(x_k, x^\star) \le \frac{\lambda^{k-1}}{1-\lambda} d(x_1, x_2)$$

■

7.2. Primjedba

Ako je (X, d) potpun metrički prostor, a $f : X \to X$ preslikavanje sa svojstvom

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \qquad \text{za sve } x, y \in X,\ x \neq y, \tag{7.4}$$

onda općenito f ne mora imati fiksnu točku. Evo primjera: Skup $X = [1, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ zatvoren je, pa je potpun metrički prostor (teorem 4.9.). Pokažimo da funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ zadana formulom $f(x) = x + \frac{1}{1+x}$ ima svojstvo (7.4). Neka su $x, y \in [0, \infty)$ i $x \neq y$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $x < y$. Prema Lagrangeovom teoremu o srednjoj vrijednosti postoji $c \in (x, y)$ takav da je

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x). \tag{7.5}$$

Kako za svaki $c \in (0, \infty)$ vrijedi $|f'(c)| = \left|1 - \frac{1}{(1+c)^2}\right| < 1$, iz (7.5) dobivamo $|f(x) - f(y)| < |x - y|$. Dakle, f ima svojstvo (7.4). Budući da je $f(x) > x$ za svaki $x \in [0, \infty)$, ne postoji fiksna točka.

7.3. Primjedba

Egzistencija fiksne točke preslikavanja $f : X \to X$ ne ovisi o metrici d na X. Stoga se može dogoditi da preslikavanje f nije kontrakcija u zadanoj metrici d, ali da je kontrakcija u nekoj drugoj metrici ϱ. Ako je (X, ϱ) potpun metrički prostor, onda će f imati fiksnu točku.

Npr. neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadana s

$$f(x, y) = \left(\frac{8x}{10} + \frac{8y}{10}, \frac{x}{10} + \frac{y}{10}\right)$$

i promotrimo metrike d_1 i d_2 na $\mathbb{R}^2$ dane formulama

$$\begin{aligned} d_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|, \\ d_2((x_1, y_1), (x_2, y_2)) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \end{aligned}$$

koje su inducirane normama $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$. Vektorski su prostori $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ i $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ potpuni (vidi teorem 6.35.). Funkcija f nije kontrakcija u euklidskoj metrici d_2 jer je

$$d_2(f(0,0), f(-6,-2)) = \tfrac{4}{5}\sqrt{65} > \tfrac{4}{5}\sqrt{\tfrac{125}{2}} = d_2((0,0),(-6,-2)).$$

S druge strane, u odnosu na metriku d_1 funkcija f je kontrakcija s koeficijentom $\frac{9}{10}$ jer je

$$d_1(f(x_1,x_2), f(x_2,y_2)) \le \tfrac{9}{10} d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)).$$

Prema tome, funkcija f ima fiksnu točku.

7.4. PRIMJER. S točnošću $\varepsilon = 0.005$ treba naći pozitivno rješenje jednadžbe

$$x = \ln\left(x + \tfrac{5}{4}\right) =: g(x).$$

Lako je provjeriti da je $g([0,1]) \subset [0,1]$. Nadalje, za sve $x_1, x_2 \in [0,1]$, $x_1 < x_2$, prema Lagrangeovu teoremu srednje vrijednosti postoji točka $c \in (x_1, x_2)$ takva da je

$$|g(x_2) - g(x_1)| = |g'(c)(x_2 - x_1)| = \left|\frac{1}{c + \frac{5}{4}}(x_2 - x_1)\right| < \tfrac{4}{5}|x_2 - x_1|.$$

Time smo pokazali da je funkcija $f : [0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) = g(x) = \ln\left(x + \tfrac{5}{4}\right),$$

kontrakcija s konstantom $\lambda = \frac{4}{5}$. Segment je potpun jer je zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ (teorem 4.9.). Stoga, prema Banachovom teoremu, f ima fiksnu točku $x^\star \in [0,1]$. Dakle, $x^\star = f(x^\star)$, tj.

$$x^\star = \ln\left(x^\star + \tfrac{5}{4}\right).$$

Osim toga, niz iteracija

$$x_1 = 0, \quad x_k = f(x_{k-1}) = \ln\left(x_{k-1} + \tfrac{5}{4}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

kovergira prema $x^\star$. Da bi našli aproksimaciju fiksne točke do na zadanu točnost ε, prema (7.1) dovoljno je zahtijevati da bude

$$\tfrac{\lambda^{k-1}}{1-\lambda} d(x_1, f(x_1)) < \varepsilon,$$

odakle dobivamo $k \ge 25$. Točku x_{25} možemo uzeti za traženu aproksimaciju.

U teoriji diferencijalnih jednadžbi vrlo je važan sljedeći Picardov teorem koji nam govori o egzistenciji rješenja Cauchyjeve zadaće.

7.5. Teorem (Picard)
Neka je $P = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a, b > 0$, zatvoreni pravokutnik i $f : P \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na P. Nadalje, pretpostavimo da je:

(i) $|f(x, y)| \leq M$, *za sve* $(x, y) \in P$, *i*

(ii) da je f po drugoj varijabli Lipschitzova na P s konstantom $\lambda > 0$, tj.

$$(\forall x \in [x_0 - a, x_0 + a])\,(\forall y_1, y_2 \in [y_0 - b, y_0 + b])$$
$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \lambda \cdot |y_1 - y_2|.$$

Neka je

$$a_1 < \min\Big\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{\lambda}\Big\}.$$

Tada postoji samo jedna derivabilna funkcija $y : [x_0 - a_1, x_0 + a_1] \to [x_0 - b, y_0 + b]$ koja je rješenje Cauchyjeve zadaće

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x, y(x)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

na segmentu $[x_0 - a_1, x_0 + a_1]$. Osim toga, iterativni postupak, poznat pod nazivom Picardova metoda sukcesivnih aproksimacija,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_k(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt, \quad k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{7.7}$$

konvergira prema tom jedinstvenom rješenju[1].

Dokaz. Uočite da treba pronaći neprekidnu funkciju $y : [x_0 - a_1, x_0 + a_1] \to [y_0 - b, y_0 + b]$ takvu da je

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1]$$

i dokazati jedinstvenost takve funkcije.

Neka je X skup svih neprekidnih funkcija $y : [x_0 - a_1, x_0 + a_1] \to \mathbb{R}$ takvih da je $\|y - y_0\|_\infty \leq b$ (ekvivalentno: $y(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ za svaki $x \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1]$),

$$X = \big\{y \in C([x_0 - a_1, x_0 + a_1], \mathbb{R}) : \|y - y_0\|_\infty \leq b\big\}.$$

Skup X podskup je od $C([x_0 - a_1, x_0 + a_1], \mathbb{R})$ i zatvoren je u Banachovu prostoru $\big(C([x_0 - a_1, x_0 + a_1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$, pa je zato i sam potpun (teorem 4.9.). Zatvorenost skupa X lako je pokazati pomoću leme 3.14.

[1] Korištenje iste oznake y_0 i za funkciju i za realan broj ne bi trebalo dovesti do zabune.

Pokažimo da za svaki $y \in X$ i za sve $x \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1]$ vrijedi

$$\Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \Big| < b. \tag{7.8}$$

U tu svrhu, bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $x \geq x_0$ (u suprotnom prvo zamijenimo granice integracije i provedemo isti postupak!). Dobivamo:

$$\Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \Big| \leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y(t))| dt \leq M(x - x_0) \leq M a_1 < b.$$

Neka je $F : X \to X$ preslikavanje koje funkciji y pridružuje funkciju $F(y)$ definiranu formulom

$$F(y)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1].$$

Iz definicijske formule vidimo da je $F(y)$ derivabilna na $[x_0 - a_1, x_0 + a_1]$, a iz (7.8) slijedi da je $\|F(y) - y_0\|_\infty < b$, tj. $F(y) \in X$.

Sada ćemo pokazati da je $F : X \to X$ kontrakcija s koeficijentom $\lambda a_1 < 1$. U tu ćemo svrhu prvo pokazati da za sve $y_1, y_2 \in X$ i za svaki $x \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1]$ vrijedi nejednakost

$$\big| F(y_1)(x) - F(y_2)(x) \big| \leq \lambda |x - x_0| \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty. \tag{7.9}$$

Zaista, bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $x \geq x_0$ (u suprotnom prvo zamijenimo granice integracije i provedemo isti postupak!). Imamo:

$$\begin{aligned}
\big| F(y_1)(x) - F(y_2)(x) \big| &= \Big| \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))dt \Big| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \big| f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t)) \big| dt \\
&\leq \int_{x_0}^{x} \lambda \big| y_1(t) - y_2(t) \big| dt \\
&\leq \lambda \int_{x_0}^{x} \|y_1 - y_2\|_\infty dt \\
&= \lambda |x - x_0| \cdot \|y_1 - y_2\|_\infty .
\end{aligned}$$

Konačno, pomoću (7.9) dobivamo

$$\begin{aligned}
\|F(y_1) - F(y_2)\|_\infty &= \sup_{x \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1]} \big| F(y_1)(x) - F(y_2)(x) \big| \\
&\leq \lambda \|y_1 - y_2\|_\infty \sup_{x \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1]} |x - x_0| \\
&= \lambda a_1 \|y_1 - y_2\|_\infty ,
\end{aligned}$$

odakle se vidi da je F kontrakcija.

Prema Banachovom teoremu o fiksnoj točki, F ima jedinstvenu fiksnu točku $y \in X$, a niz funkcija $(y_k)_{k\geq 0}$,

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \\ y_k(x) &= F(y_{k-1}) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k-1}(t))dt, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

konvergira prema toj fiksnoj točki. Kako je $y = F(y)$ ekvivalentno s

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt, \quad x \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1],$$

dokazan je teorem. ■

7.6. PRIMJER. Riješimo Cauchyjev problem

$$y' = y + 1, \quad y_0 := y(0) = 0.$$

Kako je $f(x, y) = 1 + y$ i $x_0 = 0$, Picardov niz sukcesivnih aproksimacija glasi:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 = 0 \\ y_1(x) &= y_0 + \int_0^x f(t, y_0(t))dt = \int_0^x 1 \cdot dt = x \\ y_2(x) &= y_0 + \int_0^x f(t, y_1(t))dt = \int_0^x (1+t)\, dt = x + \frac{x^2}{2} \\ y_3(x) &= y_0 + \int_0^x f(t, y_2(t))dt = \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \\ &\vdots \\ y_k(x) &= y_0 + \int_0^x f(t, y_{k-1}(t))dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Rješenje je funkcija

$$y = \lim_{k\to\infty} = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{x^i}{i!} = e^x - 1.$$

Zadaci za vježbu

1. Pokažite da svaka neprekidna funkcija $f : [a, b] \to [a, b]$ ima fiksnu točku.

   (Uputa: Neka je $g(x) = f(x) - x$. Treba pokazati da postoji $x \in [a, b]$ takav da je $g(x) = 0$. Ako je $g(a) = 0$ ili $g(b) = 0$, dokaz je gotov. Zato pretpostavimo da je $g(a) \neq 0$ i $g(b) \neq 0$. Tada je $g(a) = f(a) - a > 0$ i $g(b) = f(b) - b < 0$. Kako neprekidna funkcija preslikava segment na segment (korolar 8.11.), mora postojati točka $x \in [a, b]$ takva da je $g(x) = 0$.)

2. Neka je (X, d) potpun metrički prostor i $f : X \to X$ preslikavanje takvo da je $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ puta}}$ kontrakcija. Dokažite da f ima jedinstvenu fiksnu točku.

   (Uputa: Prema Banachovom teoremu f^n ima fiksnun $x^\star$, $x^\star = f^n(x^\star)$. Zato je $f(x^\star) = f(f^n(x^\star)) = f^n(f(x^\star))$, što znači da je $f(x^\star)$ fiksna točka preslikavanja f^n. Zbog jedinstvenosti fiksne točke je $f(x^\star) = x^\star$.)

3. Funkcija $f : \left(0, \frac{1}{4}\right) \to \left(0, \frac{1}{4}\right)$, $f(x) = x^2$ kontrakcija je s koeficijentom $\frac{1}{2}$, ali nema fiksnu točku. Kosi li se to s Banachovim teoremom?

8. Povezani prostori i povezanost putevima

8.1. Povezani prostori

Intuitivno govoreći, topološki prostor je povezan ako je sastavljen „od jednog komada”. Preciznije:

8.1. Definicija

Topološki prostor X je povezan ako se ne može prikazati kao disjunktna unija dvaju nepraznih otvorenih podskupova, tj. ako ne postoje neprazni otvoreni podskupovi $U_1, U_2 \subseteq X$ takvi da je $X = U_1 \cup U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Prostor X je nepovezan ako nije povezan. Skup $A \subseteq X$ je povezan ako je povezan kao topološki potprostor.

8.2. Teorem

Neka je X topološki prostor. Sljedeća su svojstva ekvivalentna:

(i) *X jest povezan.*

(ii) *X se ne može prikazati kao disjunktna unija dvaju nepraznih zatvorenih podskupova.*

(iii) *Svako neprekidno preslikavanje $f : X \to \{0,1\}$ jest konstantno, pri čemu se na $\{0,1\}$ uzima diskretna topologija.*

Dokaz. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* Kada bi postojali neprazni zatvoreni skupovi $F_1, F_2 \subseteq X$ takvi da je $X = F_1 \cup F_2$ i $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, onda je $F_1 = X \backslash X_2$ i $F_2 = X \backslash X_1$, pa bi F_1 i F_2 ujedno bili i otvoreni skupovi te bi X bio nepovezan.

(ii) $\Rightarrow$ *(iii)* Kada bi postojala neprekidna surjekcija $f : X \to \{0,1\}$, onda bi skupovi $F_1 := f^{-1}(0)$ i $F_2 := f^{-1}(1)$ bili neprazni i zatvoreni (teorem 6.11.) pa bi vrijedilo $X = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* Kada X ne bi bio povezan, postojali bi neprazni otvoreni skupovi U_1 i U_2 takvi da je $X = U_1 \cup U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Tada bi funkcija $f : X \to \{0,1\}$ definirana formulom

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \in U_1 \\ 1, \ x \in U_2 \end{cases}$$

bila neprekidna surjekcija. ■

Sljedeći teorem daje važan primjer povezanog skupa.

8.3. Teorem

Segment $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ jest povezan.

Dokaz. Pretpostavimo da segment $[a,b]$ nije povezan, tj. da postoje neprazni, disjunktni, otvoreni u $[a,b]$ skupovi U_1 i $U_2 \subseteq \mathbb{R}$ takvi da je $[a,b] = U_1 \cup U_2$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $a \in U_1$ i neka je $c := \inf U_2$. Lako je pokazati da mora biti ili $c \in U_1$ ili $c \in U_2$. Kako je $a \in U_1$ i U_1 otvoren u $[a,b]$, postoji $r > 0$ takav da je $[a, a+r) \subseteq U_1 = [a,b] \backslash U_2$, pa je zato $c = \inf U_2 \neq a$. Očito je $c \neq b$, jer bi inače bilo $U_2 = \{b\}$ što nije otvoren skup u $[a,b]$.

Kao što smo rekli, mora biti ili $c \in U_1$ ili $c \in U_2$. Kad bi bilo $c \in U_2$, onda bi (zbog otvorenosti u $[a,b]$ skupa U_2) postojao $r > 0$ takav da je $(c-r, c+r) \subseteq U_2$, pa bi infimum skupa U_2 bio manji od c. Dakle, mora biti $c \in U_1$. No tada bi postojao $r > 0$ takav da je $(c-r, c+r) \subseteq U_1$, pa c ne bi mogao biti infimum skupa U_2. Time smo dobili kontradikciju, pa je $[a,b]$ povezan. ■

8.4. Primjer. Skup $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\}$ nije povezan jer $f : A \to \{0,1\}$ zadana s

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ 1, \ x > 0 \end{cases}$$

jest neprekidna surjekcija.

8.5. Teorem
Neka je $(A_i, i \in I)$ familija nepraznih podskupova A_i iz topološkog prostora X takva da je $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Ako je svaki od skupova A_i, $i \in I$, povezan, onda je i skup $A := \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ povezan.

Dokaz. Neka je $f : A \to \{0,1\}$ neprekidno preslikavanje. Treba pokazati da je f konstanta.

Neka je $x_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Za svaki $i \in I$ restrikcija $f_{|A_i} : A_i \to \{0,1\}$ jest neprekidno i konstantno preslikavanje (jer je A_i povezan skup). Zato je $f_{|A_i}(x) = f(x_0)$ za svaki $x \in A_i$, pa je stoga i $f(A) = f(x_0)$. ■

8.6. Primjer.

(a) Interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ povezan je jer postoji dovoljno velik prirodan broj n_0 takav da je

$$(a,b) = \bigcup_{n \geq n_0} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right].$$

(b) Slično se pokaže da su povezani i skupovi $(a,b]$ i $[a,b)$.

(c) Prostor $\mathbb{R}$ povezan je jer je $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,n]$.

8.7. Teorem
Neka je X povezan topološki prostor i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je slika $f(X) \subseteq Y$ povezan skup.

Dokaz. Kada bi postojala neprekidna surjekcija $g\colon f(X) \to \{0,1\}$, onda bi i kompozicija $g \circ f\colon X \to \{0,1\}$ bila neprekidna surjekcija, pa X ne bi bio povezan. ■

8.8. KOROLAR
Neka je I jedan od sljedećih skupova: $[a,b]$, $\langle a,b]$, $[a,b\rangle$ ili $\langle a,b\rangle$. Graf Γ_φ neprekidne realne funkcije $\varphi : I \to \mathbb{R}$ jest povezan.

Dokaz. Na Γ_φ možemo gledati kao na sliku neprekidne funkcije $f : I \to \mathbb{R}^2$ definirane s $f(x) = (x, \varphi(x))$. ■

8.9. KOROLAR
Povezanost je topološko svojstvo, tj. ako su X i Y homeomorfni te ako je jedan od njih povezan, onda je i drugi povezan.

Za primjenu je izuzetno važan sljedeći teorem koji nam govori da neprekidna realna funkcija definirana na povezanom prostoru prima sve međuvrijednosti:

8.10. TEOREM
Neka je X povezan prostor, $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija i $c, d \in f(X)$. Tada je $[c,d] \subseteq f(X)$, tj. za svaki $t \in [c,d]$ postoji $x \in X$ takav da je $f(x) = t$.

Dokaz. Kada bi postojao $t \in [c,d]$ takav da $t \notin f(X)$, onda bi $U_1 := f^{-1}\big(\langle -\infty, t\rangle\big)$ i $U_2 := f^{-1}\big(\langle t, \infty\rangle\big)$ bili disjunktni neprazni podskupovi od X takvi da je $X = U_1 \cup U_2$, pa X ne bi bio povezan. ■

8.11. KOROLAR
Neprekidna slika segmenta jest segment, tj. ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, onda je $f([a,b])$ segment.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je $f([a,b])$ odozgo omeđen skup. Kada ne bi bilo tako, postojao bi niz $(f(x_k))$ u $f([a,b])$ koji bi divergirao prema $+\infty$. Kako je (x_k) omeđen niz u $[a,b]$, on bi prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu imao konvergentan podniz (x_{u_k}). Neka $x_{u_k} \to x_0$. Segment $[a,b]$ jest zatvoren, pa je $x_0 \in [a,b]$ (teorem 2.15.). Tada bi prema Heineovoj definiciji neprekidnosti niz $f(x_{u_k})$ konvergirao prema $f(x_0)$, što je kontradikcija. Dakle, $f([a,b])$ jest odozgo omeđen skup. Na sličan način pokaže se da je $f([a,b])$ odozdo omeđen.

Sada ćemo pokazati da je $A := \inf f([a,b]) \in f([a,b])$. Zaista, prema definiciji infimuma za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $f(x_k)$ takav da je $A \le f(x_k) < A + \frac{1}{k}$. To znači da niz $f(x_k)$ konvergira prema A. Niz (x_k) ima konvergentan podniz (x_{u_k}). Neka $x_{u_k} \to x_0 \in [a,b]$. Prema Heineovoj definiciji neprekidnosti tada $f(x_{u_k}) \to f(x_0)$. Kako podniz konvergentnog niza konvergira istoj vrijednosti kao i niz (propozicija 2.18.), to je $f(x_0) = A$.

Na sličan način se pokaže da je $B := \sup f([a,b]) \in f([a,b])$. Dakle, $A, B \in f([a,b])$. Očito je $f([a,b]) \subseteq [A,B]$. Prema teoremu 8.10. je $[A,B] \subseteq f([a,b])$. Time smo pokazali da je $f([a,b]) = [A,B]$. ■

8.12. Primjer. Pokažimo da je svako neprekidno preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ konstantno ako na $\mathbb{R}$ i na $\mathbb{Q}$ uzmemo euklidsku metriku. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je kodomena skup $\mathbb{R}$, tj. da je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja prima samo racionalne vrijednosti. Kada f ne bi bila konstanta, postojale bi točke $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $f(a) \neq f(b)$. Prema korolaru 8.11., skup $f([a, b])$ bio bi segment. Kako svaki segment sadrži iracionalne brojeve, to bi bila kontradikcija s pretpostavkom da f prima samo racionalne vrijednosti.

Sljedeći se korolar često koristi u numeričkoj matematici:

8.13. Korolar
Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija takva da je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Tada postoji točka $c \in [a, b]$ takva da je $f(c) = 0$.

8.2. Povezanost putevima

8.14. DEFINICIJA

Neka je $A \subseteq X$ podskup topološkog prostora X. **Put** u skupu A je svako neprekidno preslikavanje $\omega : [a,b] \to X$ takvo da je $\omega([a,b]) \subseteq A$. Točka $x_0 := \omega(a)$ je **početak puta**, a točka $x_1 := \omega(b)$ je **kraj puta**. Kažemo da je ω **put između točaka** x_0 i x_1 ili da put ω **povezuje** točku x_0 s točkom x_1. Pri tome je moguće da bude $x_0 = x_1$; u tom slučaju put se naziva **petljom**.

Bez smanjenja općenitosti, u definiciji puta $\omega : [a,b] \to X$ može se pretpostaviti da je $[a,b] = [0,1]$.

8.15. DEFINICIJA

Skup $A \subseteq X$ iz topološkog prostora X je **povezan putevima** ako između bilo kojih dviju točaka $x_0, x_1 \in A$ postoji put u A.

8.16. TEOREM

Svaki putevima povezan skup A jest povezan.

Dokaz. Fiksirajmo točku $x_0 \in A$. Po pretpostavci, za svaku točku $x \in A$ postoji put $\omega_x : [a_x, b_x] \to A$ koji povezuje x_0 s x. Kako je svaki segment $[a_x, b_x]$ povezan (teorem 8.3.), prema teoremu 8.7. i skup $\omega_x([a_x, b_x])$ je povezan. Kako je $x_0 \in \omega_x([a_x, b_x])$ za svaki $x \in A$, prema teoremu 8.5. i skup $A = \bigcup_{x \in A} \omega_x([a_x, b_x])$ jest povezan. ∎

8.17. PRIMJEDBA

Postoji povezan skup A koji nije putevima povezan. Konstruirajmo jedan takav skup. Interval $\langle 0, 1]$ povezan je (primjer 8.6.), pa je zato povezan i skup (vidi korolar 8.8.)

$$\Gamma := \left\{ \left(x, \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) : 0 < x \leq 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Neka je

$$A := \Gamma \cup \{(0,0)\} = \left\{ \left(x, \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right) : 0 < x \leq 1 \right\} \cup \{(0,0)\}.$$

Kako je $(0,0) \in \operatorname{Cl} A$, skup A povezan je (vidi 2. zadatak na str. 122).

Dokažimo da A nije povezan putevima. Dokaz ćemo provesti kontradikcijom. Pretpostavimo da je skup A putevima povezan. Tada postoji put u A koji povezuje točake $(0,0)$ i $(1, \sin 1)$, tj. neprekidno preslikavanje $\omega : [0,1] \to X$ takvo da je $\omega([0,1]) \subseteq A$, $\omega(0) = (0,0)$ i $\omega(1) = (1, \sin 1)$. Neka je $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Kako je $\omega_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te kako je $\omega_1(0) = 0$, $\omega_1(1) = 1$, prema teoremu 8.10. jest $\omega_1([0,1]) = [0,1]$. Neka je (x_k), $x_k \neq 0$, bilo koji niz iz $\langle 0, 1]$ koji konvergira prema 0. Kako je $\omega_1([0,1]) = [0,1]$, za svaki $k \in \mathbb{N}$ postoji $t_k \in \langle 0, 1]$ takav da je $x_k = \omega_1(t_k)$. Nadalje, zbog $\omega([0,1]) \subseteq A$ jest

$$\omega(t_k) = (\omega_1(t_k), \omega_2(t_k)) = \left(x_k, \sin\left(\tfrac{1}{x_k}\right)\right)$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je (t_k) konvergentan niz (u suprotnom uzmemo konvergentan podniz). Neka $t_k \to t_0 \in [0,1]$. Tada pomoću Heineove definicije neprekidnosti dobivamo

$$\begin{aligned} \omega_1(t_0) &= \lim_{k\to\infty} \omega_1(t_k) = \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \\ \omega_2(t_0) &= \lim_{k\to\infty} \omega_2(t_k) = \lim_{k\to\infty} \sin\left(\tfrac{1}{x_k}\right). \end{aligned}$$

Kako je $\omega(t_0) = (\omega_1(t_0), \omega_2(t_0)) = (0, \omega_2(t_0)) \in A$, to je $\omega_2(t_0) = 0$, tj.

$$\lim_{k\to\infty} \sin\left(\tfrac{1}{x_k}\right) = 0.$$

Dakle, kada bi A bio putevima povezan, tada bi za svaki niz niz (x_k), $x_k \neq 0$, iz $(0,1]$ koji konvergira prema 0 imali $\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{x_k}\right) = 0$, što nije točno (vidi 13. zadatak na str. 106). Dakle, skup A nije povezan putevima.

8.18. Definicija

U normiranom vektorskom prostoru X za svake dvije točke $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in X$ definira se tzv. pravocrtni put $\omega : [0,1] \to X$:

$$\omega(t) = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0), \qquad t \in [0,1].$$

Pri tome skup

$$[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] := \omega([0,1]) = \{\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0),\, t \in [0,1]\}$$

zovemo segment u X. Uniju segmenata oblika $\Gamma = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] \cup [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \cup \ldots \cup [\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k]$ zovemo poligonalna crta od $\mathbf{x}_0$ do $\mathbf{x}_k$.

8.19. Propozicija

Svaka poligonalna crta $\Gamma = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] \cup [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2] \cup \ldots \cup [\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k]$ *u normiranom prostoru* X *slika je nekog puta između* $\mathbf{x}_0$ *i* $\mathbf{x}_k$.

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, neka je $\Gamma = [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] \cup [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$. Funkcija $\omega : [0,2] \to X$ definirana formulom

$$\omega(t) = \begin{cases} \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0), & 0 \le t \le 1 \\ \mathbf{x}_1 + (t-1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1), & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

put je u X i pri tome je $\omega([0,2]) = \Gamma$. ■

8.20. Definicija

Skup A iz normiranog prostora X je konveksan ako ima svojstvo da za svake dvije točke $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in A$ sadrži i segment $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$.

8.21. PRIMJER. Svaka otvorena kugla $K(\mathbf{y}_0, r)$ iz normiranog prostora $(X, \|\cdot\|)$ konveksan je skup. Zaista, neka su $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in K(\mathbf{y}_0, r)$. Tada je $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| < r$ i $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_0\| < r$. Za svaku točku $\mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$ postoji $t \in [0, 1]$ takav da je $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)$, pa je zato

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - \mathbf{y}_0\| &= \|\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) - \mathbf{y}_0\| = \|(1-t)(\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0) + t(\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_0)\| \\ &\leq (1-t)\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0\| + t\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_0\| < (1-t)r + tr = r,\end{aligned}$$

tj. $\mathbf{x} \in K(\mathbf{y}_0, r)$.

8.22. KOROLAR
Svaki konveksan skup K u normiranom vektorskom prostoru X jest povezan.

Dokaz. Budući da za svake dvije točke $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in K$ segment $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1]$ leži u K, skup K putevima je povezan i zato je povezan. ■

8.23. KOROLAR
Skup $K \subseteq \mathbb{R}$ povezan je onda i samo onda ako je konveksan.

Dokaz. Ako je K konveksan, prema prethodnom korolaru on je povezan. Pretpostavimo da je K povezan i pokažimo da je tada konveksan. Neka su x_0 i x_1 bilo koje dvije točke skupa K. Bez smanjenja općenitosti neka je $x_0 < x_1$. Treba pokazati da svaka točka $x \in (x_0, x_1)$ pripada skupu K. U protivnom bi postojala točka $x \in (x_0, x_1) \backslash K$, pa bi skupovi $U_1 := K \cap (-\infty, x)$, $U_2 := K \cap (x, \infty)$ bili neprazni disjunktni otvoreni skupovi u K sa svojstvom $K = U_1 \cup U_2$, što bi bilo u suprotnosti s pretpostavkom da je K povezan. ■

Dokaz sljedećeg teorema može se naći u [3, str. 221, teorem 7]:

8.24. TEOREM
Neka je U otvoren i povezan skup u normiranom prostoru X. Tada se svake dvije točke iz U mogu povezati poligonalnom crtom.

Vrlo je teško stvoriti geometrijsku predodžbu o tome kako izgledaju povezani skupovi. Nasuprot tome, imamo dobru predodžbu o tome kako izgledaju putevi, naročito poligonalne crte. U matematičkoj analizi važnu ulogu imaju otvoreni i povezani podskupovi od $\mathbb{R}^n$; takav skup zovemo područje. Otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ jest područje onda i samo onda ako se svake njegove dvije točke mogu spojiti poligonalnom crtom. Štoviše, vrijedi općenitiji rezultat:

8.25. Korolar

Otvoren skup U u normiranom prostoru X povezan je onda i samo onda ako se svake dvije točke $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in U$ mogu povezati poligonalnom crtom.

Dokaz. Ako je U otvoren i povezan, prema prethodnom teoremu, svake dvije točke $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in U$ mogu se povezati poligonalnom crtom. Ako se svake dvije točke $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in U$ mogu povezati poligonalnom crtom, onda je U povezan putevima (propozicija 8.19.), pa je prema teoremu 8.16. i povezan. ■

Zadaci za vježbu

1. Dokažite da je diskretan topološki prostor s barem dva elementa nepovezan, dok je svaki trivijalni topološki prostor povezan.

2. Neka je $A \subseteq X$ povezan skup u prostoru X. Dokažite da je povezan i svaki skup $B \subseteq X$ za koji je $A \subseteq B \subseteq \operatorname{Cl} A$.

   (Uputa: Neka su F_1 i F_2 disjunktni i zatvoreni u X skupovi takvi da je $B = (F_1 \cap B) \cup (F_2 \cap B)$. Treba pokazati da je $F_1 \cap B = \emptyset$ ili $F_2 \cap B = \emptyset$. Kako je $A \subseteq B$, zbog povezanosti skupa A jest ili $A \subseteq F_1$ ili $A \subseteq F_2$. Ako je $A \subseteq F_1$, onda je $B \subseteq \operatorname{Cl} A \cap B \subseteq F_1 \cap B$, pa je $F_2 \cap B = \emptyset$.)

3. Pokažite da neprekidna funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ne može biti injekcija.

   (Uputa: Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je neprekidna i svaka njezina restrikcija. Odaberimo bilo koje dvije točke $T_1, T_2 \in \mathbb{R}^2$, $T_1 \neq T_2$. Ako je $f(T_1) = f(T_2)$, tvrdnja je dokazana. Neka je nadalje $f(T_1) \neq f(T_2)$. Neka je $f_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dana izrazom $f_1(t) = f(T_1 + t(T_2 - T_1))$. Prisjetimo se da neprekidna funkcija preslikava segment na segment (korolar 8.11.). Neka je

$$[a,b] := f_1([0,1]) = f(\{T_1 + t(T_2 - T_1) : t \in [0,1]\}) \subseteq \mathbb{R},$$

$$c_0 := \frac{1}{2}[f_1(0) + f_1(1)] = \frac{1}{2}[f(T_1) + f(T_2)] \in (a,b).$$

   Tada postoji $t_0 \in [0,1]$ takav da je $f_1(t_0) = f(T_1 + t_0(T_2 - T_1)) = c_0$. Kako je $f_1(0) \neq c_0$ i $f_1(1) \neq c_0$, to je $t_0 \in (0,1)$. Neka je $T_0 = T_1 + t_0(T_2 - T_1)$. Dakle, $f_1(t_0) = f(T_0) = c_0$. Sada odaberimo bilo koju točku $T_3 \in \mathbb{R}^2$ koja se nalazi izvan pravca koji prolazi točkama T_1 i T_2. Ako je $f(T_3) = f(T_0)$, funkcija f nije injekcija i dokaz je gotov. Stoga nadalje pretpostavljamo da je $f(T_3) \neq f(T_0)$. Neka je $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dana izrazom $f_1(\lambda) = f(T_0 + \lambda(T_3 - T_0))$. Segment

$$[A, B] := f_2([0,1]) = f(\{T_0 + \lambda(T_3 - T_0) : \lambda \in [0,1]\}) \subseteq \mathbb{R}$$

sadrži točku c_0. Kako je $c_0 \in (a,b) \cap [A,B]$, presjek $[a,b] \cap [A,B]$ jest pravi segment. Neka je $c_1 \in [a,b] \cap [A,B]$ bilo koja točka različita od c_0. Tada postoje $t_1 \in (0,1)$ i $\lambda_1 \in (0,1]$ takvi da je $c_1 = f_1(t_1) = f_2(\lambda_1)$, tj. $c_1 = f(T_1 + t_1(T_2 - T_1)) = f(T_0 + \lambda_1(T_3 - T_0)$. Kako je $T_1 + t_1(T_2 - T_1) \neq T_0 + \lambda_1(T_3 - T_0)$, funkcija f nije injekcija.)

4. Dokažite da su skupovi $(a,b]$ i $[a,b)$ povezani.

   (Uputa: Uočite da je $(a,b] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(a, b + 1/n)$, $[a,b) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(a - 1/n, b)$ i primijenite teorem 8.5.)

9. Limes funkcije

Limes funkcije definira se samo u točkama gomilanja domene. Intuitivno govoreći, limes funkcije f u točki x_0 vrijednost je kojoj je $f(x)$ sve „bliže” kada je x sve „bliži” točki x_0. Preciznije:

9.1. DEFINICIJA
Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor, $(Y,\mathcal{V})$ Hausdorffov prostor, $D \subseteq X$, $x_0 \in D'$ točka gomilanja skupa D i $f : D \to Y$ preslikavanje. Za točku $L \in Y$ kažemo da je limes ili granična vrijednost preslikavanja f u točki x_0 i pišemo $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$ ako za svaku otvorenu okolinu V točke L u Y postoji otvorena okolina U točke x_0 u X takva da je

$$f(U \cap (D\backslash\{x_0\})) \subseteq V.$$

9.2. PRIMJEDBA
Važno je uočiti da limes L funkcije f u točki $x_0 \in D'$ ne ovisi o tome je li funkcija f definirana u točki x_0 ili nije. Zato, ako je $g : D \cup \{x_0\} \to Y$ neka druga funkcija definirana formulom

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in D\backslash\{x_0\} \\ y_0, & \text{ako je } x = x_0, \end{cases}$$

gdje je $y_0 \in Y$ bilo koja točka, f će imati limes L u točki x_0 onda i samo onda ako g u točki x_0 ima limes L.

Neposredno iz definicije slijedi sljedeća činjenica:

9.3. PROPOZICIJA
Neka je $S \subseteq D$. Ako funkcija $f : D \to Y$ ima limes u točki $x_0 \in S'$, onda i restrikcija $f_{|S} : S \to Y$ ima limes u x_0 i pri tome su ta dva limesa jednaka, tj. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f_{|S}(x)$.

9.4. TEOREM
Limes funkcije jedinstven je ako postoji.

Dokaz. Neka je $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$. Treba pokazati da nijedna druga točka $L' \in Y\backslash\{L\}$ ne može biti limes funkcije f u točki x_0. U tu svrhu odaberimo disjunktne otvorene okoline V_1 točke L i V_2 točke L'. Budući da je Y Hausdorffov prostor, takve okoline postoje.

Kako je L limes funkcije f u točki x_0, po definiciji postoji otvorena okolina U_1 točke x_0 u X takva da je

$$f(U_1 \cap (D\backslash\{x_0\})) \subseteq V_1.$$

Neka je U_2 bilo koja otvorena okolina točke x_0 u X. Tvrdnja će teorema biti dokazana ako pokažemo da $f(U_2 \cap (D\backslash\{x_0\}))$ nije sadržano u V_2. Zaista, neka je $U := U_1 \cap U_2$. Kako je U otvorena okolina točke x_0, a x_0 točka gomilanja skupa D, postoji točka $x \in U \cap (D\backslash\{x_0\})$. Kako je $x \in U \subseteq U_1$, to je $f(x) \in V_1$, a kako je $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $f(x) \notin V_2$. ■

9.5. Teorem
Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor, $(Y,\mathcal{V})$ Hausdorffov prostor i $D \subseteq X$. Funkcija $f : D \to Y$ neprekidna je u točki $x_0 \in D \cap D'$ onda i samo onda ako ona u x_0 ima limes i on je jednak $f(x_0)$.

Dokaz. Neka je f neprekidna u točki $x_0 \in D \cap D'$. Tada za svaku otvorenu okolinu $V \subseteq Y$ točke $f(x_0)$ postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da je $f(U \cap D) \subseteq V$. Tada je pogotovo

$$f(U \cap (D\backslash\{x_0\})) \subseteq V,$$

odakle iz definicije slijedi da f ima limes u točki x_0 i da je on jednak $f(x_0)$.

Obratno, pretpostavimo da je $f(x_0)$ limes funkcije f u točki $x_0 \in D \cap D'$. Neka je $V \subseteq Y$ bilo koja okolina točke $f(x_0)$. Treba pokazati da postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da je $f(U \cap D) \subseteq V$.

Prema definiciji limesa postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ točke x_0 takva da je $f(U \cap (D\backslash\{x_0\})) \subseteq V$. Kako je $f(x_0) \in V$, to je $f(U \cap D) \subseteq V$. ■

9.6. Primjedba
Pretpostavimo da $f : D \to Y$ ima limes u točki $x_0 \in D'$. Definirajmo funkciju $\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \to Y$ formulom

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako je } x \in D\backslash\{x_0\} \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{ako je } x = x_0. \end{cases} \tag{9.1}$$

Prema primjedbi 9.2. jest $\lim\limits_{x\to x_0} \tilde{f}(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \tilde{f}(x_0)$, pa je prema teoremu 9.5. $\tilde{f}$ neprekidna u točki x_0. Funkciju $\tilde{f}$ zovemo proširenje funkcije f po neprekidnosti u točki x_0.

9.7. Teorem
Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori, $D \subseteq X$, $x_0 \in D'$ točka gomilanja skupa D i $f : D \to Y$ funkcija. Sljedeće su tvrdnje ekvivalentne:

(i) $L = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

(ii) *Za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takav da je $d_Y(f(x), L) < \varepsilon$ za svaki $x \in D\backslash\{x_0\}$ za koji je $d_X(x, x_0) < \delta$, tj.*

$$f\big(K_X(x_0, \delta) \cap (D\backslash\{x_0\})\big) \subseteq K_Y(L, \varepsilon).$$

(iii) Za svaki niz (x_k) u $D\backslash\{x_0\}$ koji konvergira prema x_0, niz funkcijskih vrijednosti $\big(f(x_k)\big)$ konvergira prema L.

Dokaz. *(i) ⇒ (ii)* Neka je $\varepsilon > 0$. Kako je $K_Y(L, \varepsilon)$ otvorena okolina točke L, prema definiciji limesa postoji otvorena okolina $U \subseteq X$ oko točke x_0 takva da je $f(U \cap (D\backslash\{x_0\})) \subseteq K_Y(L, \varepsilon)$. Prema definiciji otvorenog skupa postoji $\delta > 0$ takav da je $K_X(x_0, \delta) \subseteq U$. Zato je $f\big(K_X(x_0, \delta) \cap (D\backslash\{x_0\})\big) \subseteq K_Y(L, \varepsilon)$.

(ii) ⇒ (iii) Neka je (x_k) niz u $D\backslash\{x_0\}$ koji konvergira prema x_0. Treba pokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $f(x_k) \in K_Y(L, \varepsilon)$ za svaki $k \geq k_0$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Po pretpostavci postoji $\delta > 0$ takav da je

$$f\big(K_X(x_0, \delta) \cap (D\backslash\{x_0\})\big) \subseteq K_Y(L, \varepsilon).$$

Kako $x_k \to x_0$, postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k \in K_X(x_0, \delta) \cap (D\backslash\{x_0\})$ za svaki $k \geq k_0$. Zato je $f(x_k) \in K_Y(L, \varepsilon)$ za svaki $k \geq k_0$.

(iii) ⇒ (i) Neka je $V \subseteq Y$ otvorena okolina od L. Dovoljno je pokazati da postoji realan broj $\delta > 0$ takav da je $f(K_X(x_0, \delta) \cap (D\backslash\{x_0\})) \subseteq V$. Kada ne bi bilo tako, za svaki $\delta > 0$ postojala bi točka $x_\delta \in D\backslash\{x_0\}$ takva da je $d_X(x_\delta, x_0) < \delta$ i $f(x_\delta) \notin V$. Specijalno, stavljajući $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, dolazimo do niza (x_k) u $D\backslash\{x_0\}$ takvog da je $d_X(x_k, x_0) < \frac{1}{k}$ i $f(x_k) \notin V$. Tako dobiveni niz (x_k) konvergira prema x_0 (jer $d_X(x_k, x_0) \to 0$), ali odgovarajući niz funkcijskih vrijednosti $(f(x_k))$ ne konvergira prema L. To bi bila kontradikcija s pretpostavkom (iii). ■

9.8. Primjer. Pokažimo da funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ako je } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$$

nema limes u točki $(0, 0)$.

Za restrikciju funkcije f na pravac $y = kx$ nalazimo

$$\lim_{x \to 0} f(x, kx) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2x^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Kako dobivena vrijednost ovisi o broju k, naša funkcija f nema limes u točki $(0, 0)$. Naime, kada bi funkcija f imala limes L u točki $(0, 0)$, onda bi i svaka restrikcija na pravcac $y = kx$, $k \neq 0$, za limes u točki 0 imala također L, bez obzira koliki je k.

Sljedeći teorem nam govori da se problem računanja limesa vektorske funkcije više varijabli svodi na računanje limesa realnih funkcija više varijabli.

9.9. Teorem
Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ i $f = (f_1, \ldots, f_m) : D \to \mathbb{R}^m$ funkcija. Funkcija f u točki $x_0 \in D'$ ima limes $L = (l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{R}^m$ onda i samo onda ako za svaki $i = 1, \ldots, m$ koordinatna funkcija $f_i : D \to \mathbb{R}$ u točki x_0 ima limes l_i.

Dokaz. Dovoljno je oponašati dokaz teorema 6.15. uz neznatne modifikacije. ■

9.10. PRIMJER. Neka je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ zadana s $f(x) = \left(x^2 - 1, \frac{\sin x}{x}\right)$. Kako je $\lim_{x\to 0} f_1(x) = \lim_{x\to 0}(x^2-1) = -1$ i $\lim_{x\to 0} f_2(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, to je $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \left(x^2 - 1, \frac{\sin x}{x}\right) = (-1, 1)$.

Lako je modificirati dokaz teorema 6.16. da bi se dokazale sljedeće tvrdnje:

9.11. TEOREM
Neka je $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ funkcija, $\lambda \in \mathbb{R}$ i $x_0 \in D'$ točka gomilanja skupa D. Ako f i g imaju limes u točki x_0, onda i funkcije $f+g, \lambda f, f\cdot g, |f| : D \to \mathbb{R}$ imaju limes u x_0 i pri tome vrijedi:

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0} \big(\lambda f(x)\big) = \lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

(iv) Ako je $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$*, onda postoji otvoren skup* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *takav da je funkcija* $\frac{f}{g}$ *definirana na* $U \cap (D \backslash \{x_0\})$ *i vrijedi*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

(v) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to x_0} f(x)|$.

9.12. PRIMJEDBA
Zbog teorema 9.9. tvrdnje *(i)*-*(ii)* vrijede i za vektorske funkcije $f, g : D \to \mathbb{R}^m$. Nadalje, tvrdnja *(iii)* vrijedi i za vektorske funkcije ako se za produkt uzme skalarni produkt. Zbog neprekidnosti norme tvrdnja *(v)* vrijedi i za vektorske funkcije ako se apsolutna vrijednost zamijeni s normom.

Limes realne funkcije više realnih varijabli naziva se višestruki limes. Treba ih razlikovati od tzv. uzastopnih limesa. Primjerice, kod funkcija dviju varijabli imamo sljedeća dva uzastopna limesa: $\lim\limits_{x\to x_0} \big(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\big)$ i $\lim\limits_{y\to y_0} \big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\big)$. Svaki od tih uzastopnih limesa sastoji se od dvaju limesa funkcije jedne varijable. U općem su slučaju uzastopni limesi međusobno različiti i razlikuju se od limesa $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. Štoviše, egzistencija uzastopnih limesa općenito ne osigurava egzistenciju limesa. Ipak, u slučaju kada postoji limes $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, može se pokazati da tada postoje i oba uzastopna limesa te da su oni jednaki limesu $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

9.13. PRIMJER. Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,y) : x+y=0\} \to \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

Za njezine uzastopne limese u točki $(x_0, y_0) = (0,0)$ dobivamo:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\Big) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$
$$\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\Big) = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

Kako su uzastopni limesi različiti, funkcija f nema limes u točki $(0,0)$.

Zadaci za vježbu

1. Dokažite:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0.$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} = 0.$

   (Uputa: (a) Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $\delta < \varepsilon/2$. Kako je $|f(x,y)| \le |x|+|y| \le 2\|(x,y)\|$, za svaki $(x,y) \in K((0,0),\delta) \subseteq \mathbb{R}^2$ bit će $|f(x,y)-0| \le 2\|(x,y)\| < 2\delta < \varepsilon$. (b) Neka je $\varepsilon > 0$. Nejednakost $|f(x,y)-0| = \frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|} \le \frac{1}{2}|x|\cdot|y| \le \frac{1}{4}(|x|^2+|y|^2)$ govori nam da za $\delta > 0$ možemo uzeti bilo koji realan broj manji od $2\sqrt{\varepsilon}$.)

2. Neka su $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirane formulama

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^4}{x^2+y^4}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^2}{x^2+|y|}, & (x,y) \ne (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   (a) Pokažite da f nema limes u točki $(0,0)$.

   (b) Pokažite da g ima limes u točki $(0,0)$.

   (Uputa: (a) Za restrikciju funkcije f na krivulju $x \mapsto (x^2, \alpha x)$ imamo

$$\lim_{x\to 0} f(x^2,\alpha x) = \lim_{x\to 0}\frac{1-\alpha^4}{1+\alpha^4} = \frac{1-\alpha^4}{1+\alpha^4}.$$

   (b) $|g(x,y)| = \left|\frac{x^4+y^2}{x^2+|y|}\right| \le \left|\frac{x^4}{x^2+|y|}\right| + \left|\frac{y^2}{x^2+|y|}\right| \le |x|^2 + |y|$. Neka je $\varepsilon > 0$. Odaberimo $\delta > 0$ takav da je $\delta < \min\{\varepsilon/2, 1\}$. Tada za sve $(x,y) \in K((0,0),\delta)$ vrijedi $|x|, |y| \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta < \min\{\varepsilon/2, 1\}$, pa je zato $|g(x,y) - g(0,0)| \le |x|^2+|y| < |x|+|y| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$. To znači da je g neprekidna u točki $(0,0)$ i zato je $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0) = 0$.)

3. Realna funkcija zadana je formulom $f(x,y) = \frac{3x-2y}{6x^2+y^2}$. Odrediti gomilišta prirodne domene funkcije f i ispitati ima li u njima limes.

   (Uputa: Prirodna domena je skup $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)$, a skup gomilišta čitav je $\mathbb{R}^2$. Budući da je kao kvocijent polinoma neprekidna na cijeloj prirodnoj domeni, vrijedi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0), \qquad (x_0,y_0) \neq (0,0).$$

   Preostaje ispitati ima li limes u točki $(0,0)$. Neka je (x_k, y_k) niz u $\mathbb{R}^2$ zadan s $x_k = \frac{1}{k}$, $y_k = 0$. Tada je $f(x_k, y_k) = \frac{k}{2} \to \infty$, pa f nema limes u $(0,0)$.)

Literatura

[1] D. Bakić, *Normirani prostori*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2016.

[2] S. Kurepa, *Matematička analiza 2: Funkcije jedne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb 1990.

[3] S. Mardešić, *Matematička analiza*, 1. dio, Školska knjiga, Zagreb, 1979.

[4] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Mc Graw-Hill, Book Company, New York, 1964.

[5] W. A. Sutherland, *Introduction to metric and topological spaces*, 2nd edition, Oxford University Press, 2009.

[6] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 1994.

Kazalo