Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odjel

Krešimir Burazin

# Prilozi teoriji Friedrichsovih i hiperboličkih sustava

**Doktorska disertacija**

voditelj: prof. dr. sc. Nenad Antonić

Zagreb, 17. rujna 2008.

*Mojoj majci*

# Predgovor

Pojam simetričnog pozitivnog sustava uveo je K. O. Friedrichs u svom radu [Fr] iz 1958. godine, te se takvi sustavi danas često nazivaju i Friedrichsovi sustavi. Želja mu je bila tretirati jednadžbe mješovitog tipa (poput Tricomijeve jednadžbe) na jedinstven, unificiran način, zamjenjujući različite tehnike koje se temelje na uvriježenoj klasifikaciji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi na eliptičke, paraboličke i hiperboličke. Također je uveo zanimljiv način zadavanja rubnog uvjeta pomoću matričnog polja definiranog na rubu domene, te originalnu karakterizaciju *dopustivih rubnih uvjeta*. Te Friedrichsove ideje su se pokazale plodonosnima, te je do sada objavljeno mnogo radova koji se bave simetričnim pozitivnim sustavima: [P], [PS], [LP], [Ra1], [Ra2] i [J] su neki od značajnijih. Koristeći Friedrichsov pristup dobiveni su i odgovarajući rezultati za jednadžbe mješovitog tipa (vidi radove C. S. Morawetz u popisu literature, posebno [M2]).

U radu [EGC] iz 2007. godine autori A. Ern, J.-L. Guarmond i G. Caplain iznose nešto drugačiji pogled na teoriju Friedrichsovih sustava. Osim što su je iskazali u apstraktnim terminima Hilbertovih prostora i operatora na njima, također su uveli drugačiji način postavljanja rubnog uvjeta, čime izbjegavaju pitanja vezana uz tragove funkcija iz prostora grafa. Rubne uvjete zadaju pomoću dva jednostavna geometrijska uvjeta, te pokazuju da su to i dovoljni uvjeti za bijektivnost linearnog operatora na Hilbertovom prostoru.

Istražuju i pitanje veze različitih načina zadavanja rubnog uvjeta, koji svi koreliraju s već poznatim uvjetima za originalni pozitivni simetrični sustav uveden u [Fr]. Primjerice, zapis pomoću rubnog operatora ima bliske veze s već spomenutim zapisom pomoću matričnih polja definiranih na rubu domene. Autori pokazuju da su geometrijski uvjeti ekvivalentni zapisu pomoću rubnog operatora ukoliko postoje dva specifična neprekinuta linearna operatora $P$ i $Q$, ali ne znaju da li je taj uvjet uvijek ispunjen. Također pokazuju da geometrijski uvjeti povlače i maksimalnost rubnih uvjeta.

Prostori grafa linearnih diferencijalnih operatora prvog reda pokazuju se kao prirodan prostor rješenja Friedrichsovih sustava, te su tema prvog poglavlja. Slijedeći [J] iznesena su osnovna svojstva prostora grafa, s tim da su mnogi dokazi pojednostavljeni i skraćeni. Posebna pažnja posvećena je pitanju tragova funkcija iz tog prostora, što je važan čimbenik pri zadavanju rubnih uvjeta. Dani su i primjeri u kojima su promatrani standardni diferencijalni operatori prvog reda ($\nabla$, $\mathsf{rot}$, $\mathsf{div}$).

U drugom poglavlju se bavimo simetričnim pozitivnim sustavima: prvo je iznesen dio Friedrichsove teorije, s naglaskom na ekvivalenciji tri različite grupe zahtjeva pomoću kojih se zadaju rubni uvjeti, te onda apstraktni pristup iz [EGC]. Uočili smo da se prirodno pojavljuje specifičan indefinitni skalarni produkt pomoću kojeg se geometrijski uvjeti mogu elegantnije zapisati, te neki dokazi pojednostaviti. Upotrebom Kreinovih prostora je dokaz da geometrijski uvjeti povlače maksimalnost rubnog uvjeta bitno pojednostavljen, te je pokazano da vrijedi i obrat: maksimalnost rubnog uvjeta povlači geometrijske uvjete.

Konstrukcijom kontraprimjera je pokazano da gore spomenuti operatori $P$ i $Q$ ne moraju uvijek postojati, iako su i u tome primjeru geometrijski uvjeti ekvivalentni onima zadanim preko rubnog operatora. Time je pitanje ekvivalencije ta dva zapisa rubnog uvjeta u općenitom slučaju i dalje otvoreno. Diskutirani su i neki posebni slučajevi u kojima ekvivalencija vrijedi.

Također je razmatrana veza između matrično zadanih rubnih uvjeta (kao u [Fr]), te onih preko rubnog operatora. To pitanje je zanimljivo i zbog boljeg razumijevanja odnosa između rezultata iz [EGC] i onih poznatih od ranije. Matrično rubno polje na prirodan način zadaje rubni operator, pa se nameće pitanje uvjeta na matrično polje koji osiguravaju zadovoljavajuća svojstva rubnog operatora. U radu su prikazani takvi uvjeti na matrično polje, te je na primjerima provjerena njihova upotrebljivost.

U trećem poglavlju se bavimo polulinearnim nesparenim hiperboličkim sustavima prvog reda. Carlemanov, Broadwellov i Maxwellov sustav, koji predstavljaju diskretne modele za Boltzmannovu jednadžbu, su upravo ovog tipa. Prvo je dan pregled rezultata vezanih uz obične diferencijalne jednadžbe, koji su kasnije potrebni za dobivanje što bolje ocjene na rješenje. Slijedi rezultat lokalne egzistencije i jedinstvenosti za polulinearni nespareni hiperbolički sustav (vidi [Ta1], [Ta5]), zajedno sa specifičnim ocjenama na rješenje. Ovdje je taj rezultat dokazan uz nešto izmjenjene pretpostavke, koje ne mijenjaju bitno dokaz, ali omogućuju nešto bolje ocjene na rješenje. Ocjene na rješenje i njegovo vrijeme egzistencije su glavno razmatrano pitanje ovog poglavlja. Pokazano je kako postići najbolju ocjenu na rješenje i vrijeme egzistencije rješenja (najbolju između svih mogućih ocjena određenog tipa – onog danog teoremom egzistencije i jedinstvenosti). Na nekoliko akademskih primjera prikazana je usporedba s prije poznatim rezultatima. Kratko je diskutirana i $\mathrm{L}^p$ verzija (za $p \in \langle 1, \infty \rangle$) teorema egzistencije i jedinstvenosti.

U Dodatku je dan kratak pregled oznaka i definicije nekih pojmova, s posebnim naglaskom na korištenim funkcijskim prostorima, te rezultatima vezanim uz Kreinove prostore.

Ovaj rad je nastao pod vodstvom mog prijatelja i mentora prof. Nenada Antonića, te mu ovom prilikom najtoplije zahvaljujem.

Zahvaljujem se i prof. Krešimiru Veseliću, doc. Luki Grbišiću, doc. Marku Vrdoljaku, dr. Martinu Lazaru, kao i svim članovima *Seminara za diferencijalne jednadžbe i numeričku analizu*, na primjedbama i sugestijama iznesenim prilikom izlaganja dijelova Rada.

Posebna zahvala Patriciji, između ostalog i na bezuvjetnoj podršci.

# Sadržaj

# I. Prostori grafa

# 1. Definicija i osnovna svojstva

Neka je $p \in [1, \infty]$, $p'$ njegov konjugirani eksponent definiran s $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, te neka su $d, r, l$ prirodni brojevi i $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ neprazan otvoren skup. S $\mathrm{M}_{l,r} := \mathrm{M}_{l,r}(\mathbf{C})$ u ovome poglavlju označavamo prostor svih kompleksnih matrica tipa $l \times r$. Za dane matrične funkcije $\mathbf{A}_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathrm{M}_{l,r})$, $k \in 1..d$, i $\mathbf{C} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_{l,r})$, definiramo operator $\mathcal{L} : \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^l)$ formulom

$$\mathcal{L}\mathsf{u} := \sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{u}) + \mathbf{C}\mathsf{u} ,$$

te operator $\tilde{\mathcal{L}} : \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbf{C}^l) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^r)$ (koji je formalno adjungiran operator operatoru $\mathcal{L}$) izrazom

$$\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v} := -\sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k^* \mathsf{v}) + \Big(\mathbf{C}^* + \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}_k^*\Big)\mathsf{v} .$$

Očito je da su $\mathcal{L}$ i $\tilde{\mathcal{L}}$ linearni operatori, štoviše:

**Lema 1.** *$\mathcal{L}$ i $\tilde{\mathcal{L}}$ su neprekinuti, uz jaku topologiju na $\mathrm{L}^p$ i $\mathrm{L}^{p'}$, te slabu $*$ na prostoru distribucija.*

Dem. Dokazat ćemo tvrdnju za $\mathcal{L}$, dok se za $\tilde{\mathcal{L}}$ dokaz provodi analogno. Budući da je operator deriviranja $\partial_k : \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^l) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^l)$ neprekinut, to je dovoljno pokazati da je (za proizvoljni $\mathbf{B} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_{l,r})$) množenje matricom $\mathbf{B}$: $\mathsf{u} \mapsto \mathbf{B}\mathsf{u}$ neprekinuto s $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r)$ u $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^l)$, što pak jednostavno slijedi iz neprekinutosti preslikavanja $\mathsf{u} \mapsto \mathbf{B}\mathsf{u}$ s $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r)$ u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l)$, i neprekinutosti ulaganja $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^l)$.

**Q.E.D.**

**Napomena.** Tvrdnje gornje leme vrijede i ukoliko $\mathrm{L}^p$ promatramo uz slabu (za $p \in [1, \infty\rangle$), odnosno slabu $*$ (za $p = \infty$) topologiju. Zaista, $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l)$ opskrbljen slabom topologijomls (razmotrit ćemo slučaj $p < \infty$) je opet neprekinuto uložen u prostor distribucija, pa je dovoljno uočiti da je preslikavanje $\mathsf{u} \mapsto \mathbf{B}\mathsf{u}$ neprekinuto s $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r)$ u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l)$ i u paru slabih topologija [Br, str. 39]. Sličnim argumentom se tvrdnja pokaže i za $p = \infty$.

∎

Lako se može provjeriti da je vektorski prostor

$$\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r) := \{\mathsf{u} \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r) : \mathcal{L}\mathsf{u} \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l)\}$$

normiran, uz normu definiranu formulom

$$\|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L},p} = \|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L},p,\Omega} := \begin{cases} \Big(\|\mathsf{u}\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} + \|\mathcal{L}\mathsf{u}\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)}\Big)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1, \infty\rangle \\ \max\Big\{\|\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{C}^r)}, \|\mathcal{L}\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{C}^l)}\Big\}, & p = \infty . \end{cases}$$

Posebno, u slučaju $p = 2$ koristimo oznake $\mathrm{W}^{\mathcal{L},2}(\Omega; \mathbf{C}^r) = \mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, te $\|\cdot\|_{\mathcal{L},2,\Omega} = \|\cdot\|_{\mathcal{L},\Omega} = \|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, i tada je norma inducirana sljedećim skalarnim produktom:

$$\langle\, \mathsf{u} \mid \mathsf{v} \,\rangle_{\mathcal{L}} = \langle\, \mathsf{u} \mid \mathsf{v} \,\rangle_{\mathcal{L},\Omega} := \langle\, \mathsf{u} \mid \mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} + \langle\, \mathcal{L}\mathsf{u} \mid \mathcal{L}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} .$$

Lako se vidi da je $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ izometrički izomorfan prostoru grafa operatora $\mathcal{L}$ (točnije njegove restrikcije na $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$)

$$\Gamma_{\mathcal{L}} := \{(\mathsf{u}, \mathsf{v}) \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r) \times \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l) : \mathsf{v} = \mathcal{L}\mathsf{u}\} ,$$

uz naslijeđenu normu iz $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r) \times \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l)$. Preciznije, izometrija je dana s $\mathsf{u} \mapsto (\mathsf{u}, \mathcal{L}\mathsf{u})$. Stoga se $(\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r), \|\cdot\|_{\mathcal{L},p})$ naziva *prostor grafa* ili *graf–prostor*.

**Teorem 1.** *Normirani prostor* $(\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r), \|\cdot\|_{\mathcal{L},p})$ *je Banachov; k tome, za* $p\in[1,\infty\rangle$ *taj je prostor separabilan, a za* $p\in\langle 1,\infty\rangle$ *refleksivan i uniformno konveksan.*

Dem. Dovoljno je pokazati da iskazane tvrdnje vrijede za izomorfan prostor $\Gamma_{\mathcal{L}}$. Pokažimo najprije da je $\Gamma_{\mathcal{L}}$ zatvoren u $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)$. Zaista, uzmemo li niz $(\mathsf{u}_n,\mathcal{L}\mathsf{u}_n)$ iz $\Gamma_{\mathcal{L}}$ koji konvergira k $(\mathsf{v},\mathsf{w})\in\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)$, onda iz

$$\mathsf{u}_n\longrightarrow\mathsf{v}\quad\text{u}\quad\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)\quad\text{i}\quad\mathcal{L}\mathsf{u}_n\longrightarrow\mathsf{w}\quad\text{u}\quad\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)\,,$$

te Leme 1, slijedi da je $\mathcal{L}\mathsf{v}=\mathsf{w}$ i time je prva tvrdnja dokazana.

Budući da je $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)$ separabilan (za $p\in[1,\infty\rangle$), to je onda i $\Gamma_{\mathcal{L}}$ separabilan.

Za $p\in\langle 1,\infty\rangle$ je $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)$ uniformno konveksan, pa je to i svaki njegov potprostor, dakle i $\Gamma_{\mathcal{L}}$. Konačno, prema Milman-Pettisovom teoremu je svaki uniformno konveksan Banachov prostor ujedno i refleksivan [Br, str. 51], odakle slijedi i posljednja preostala tvrdnja.

**Q.E.D.**

Pogledajmo sada nekoliko primjera prostora grafa u kojima je $\mathcal{L}$ jedan od operatora gradijenta, divergencije ili rotacije.

**Primjer 1.** Neka je $\mathcal{L}u:=\nabla u$. Uz $r=1$, $l=d$, $\mathbf{C}=\mathbf{0}$, te (za $k\in 1..d$)

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x})=\mathsf{e}_k\,,$$

gdje je $\mathsf{e}_k$ $k$-ti jedinični vektor u $\mathbf{R}^d$ (zapisan kao vektor–stupac), je

$$\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}=-\mathsf{div}\,\mathsf{v}\,,$$

i

$$\mathrm{W}^{\nabla,p}(\Omega)=\{u\in\mathrm{L}^p(\Omega):\nabla u\in\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^d)\}=\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)\,.$$

Također je i $\|\cdot\|_{\nabla,p}=\|\cdot\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega)}$. Posebno, za $p=2$ je $\mathrm{H}^{\nabla}(\Omega)=\mathrm{H}^1(\Omega)$. ∎

**Primjer 2.** Ako je $\mathcal{L}\mathsf{u}:=\mathsf{div}\,\mathsf{u}$, onda je $r=d$, $l=1$, $\mathbf{C}=\mathbf{0}$, te je

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{x})=\mathsf{e}_k^\top\,,$$

za $k\in 1..d$. Sada je

$$\tilde{\mathcal{L}}v=-\nabla v\,,$$

pa

$$\mathrm{W}^{\mathrm{div},p}(\Omega;\mathbf{C}^d)=\{\mathsf{u}\in\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^d):\mathsf{div}\,\mathsf{u}\in\mathrm{L}^p(\Omega)\}=\mathrm{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega)\,.$$

Vrijedi i $\|\cdot\|_{\mathsf{div},p}=\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega)}$, a za $p=2$ je $\mathrm{H}^{\mathsf{div}}(\Omega)=\mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega)$. ∎

**Primjer 3.** Uzmemo li $d=3$ i $\mathcal{L}\mathsf{u}:=\mathsf{rot}\,\mathsf{u}$, onda je $r=l=3$, $\mathbf{C}=\mathbf{0}$, te

$$\mathbf{A}_1(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix},\qquad\mathbf{A}_2(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\qquad\mathbf{A}_3(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Budući da je $\mathbf{A}_k^*=-\mathbf{A}_k$, $k\in 1..3$, to slijedi

$$\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{u}=\mathcal{L}\mathsf{u}=\mathsf{rot}\,\mathsf{u}\,.$$

Također je

$$\mathrm{W}^{\mathrm{rot},p}(\Omega;\mathbf{C}^3)=\{\mathsf{u}\in\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^3):\mathsf{rot}\,\mathsf{u}\in\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^3)\}=\mathrm{L}^p_{\mathrm{rot}}(\Omega)\,,$$

te $\|\cdot\|_{\mathsf{rot},p}=\|\cdot\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{rot}}(\Omega)}$, a za $p=2$ je $\mathrm{H}^{\mathsf{rot}}(\Omega)=\mathrm{L}^2_{\mathrm{rot}}(\Omega)$. ∎

## Gustoća glatkih funkcija

Prostori grafa dijele mnoga svojstva s *klasičnim* Soboljevljevim prostorima, mada su dokazi tih svojstava za prostore grafa često teži i tehnički zahtjevniji. Jedno od tih zajedničkih svojstava je i gustoća glatkih funkcija, a dokaz za prostore grafa je složeniji utoliko što se na određenom mjestu pojavljuje samo slaba konvergencija niza u $\mathrm{L}^p$ (umjesto jake kao u slučaju Soboljevljevih prostora), te je potrebno koristiti Mazurov teorem da bi se dobila jaka konvergencija. To je i razlog zbog kojeg prikazani dokaz ne vrijedi za $p = 1$.

**Teorem 2.** *Neka je* $p \in \langle 1, \infty\rangle$, *te* $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *takav da je* $\operatorname{supp} \mathsf{v} \in \mathcal{K}(\Omega)$. *Tada za svaki* $\varepsilon > 0$ *postoji funkcija* $\mathsf{v}_\varepsilon \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *za koju je*

$$\|\mathsf{v} - \mathsf{v}_\varepsilon\|_{\mathcal{L},p} < \varepsilon\,.$$

Dem. Neka je $(\rho_n)$ izglađujući niz, te izaberimo $n$ dovoljno velik (takav da je $d(\partial\Omega, \operatorname{supp} \mathsf{v}) > \frac{2}{n}$). Tada je konvolucija

$$(\rho_n * \mathsf{v})(\mathbf{x}) = \int_\Omega \rho_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathsf{v}(\mathbf{y})d\mathbf{y}\,, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$$

dobro definirana, te je $\rho_n * \mathsf{v} \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$, i

$$\rho_n * \mathsf{v} \longrightarrow \mathsf{v} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r)$$

(vidi [LL, str. 58]). Prema Lemi 1 tada i

$$\mathcal{L}(\rho_n * \mathsf{v}) \rightharpoonup \mathcal{L}\mathsf{v} \quad \text{u} \quad \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^l)\,. \tag{1}$$

Iz Leibnitzove formule (za derivaciju produkta glatke funkcije i distribucije) je

$$\mathcal{L}(\rho_n * \mathsf{v}) = \sum_{k=1}^d \Big[(\partial_k \mathbf{A}_k)(\rho_n * \mathsf{v}) + \mathbf{A}_k(\partial_k(\rho_n * \mathsf{v}))\Big] + \mathbf{C}(\rho_n * \mathsf{v})\,,$$

a kako su $\rho_n * \mathsf{v}$, $\partial_k(\rho_n * \mathsf{v}) \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$, te $\partial_k \mathbf{A}_k, \mathbf{A}_k, \mathbf{C} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_{l,r})$ (za $k \in 1..d$), to slijedi da je niz $(\mathcal{L}(\rho_n * \mathsf{v}))$ sadržan u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l)$. Sada iz (1) slijedi

$$(\forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^l)) \qquad \int_\Omega \mathcal{L}(\rho_n * \mathsf{v}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \longrightarrow \int_\Omega \mathcal{L}\mathsf{v} \cdot \boldsymbol{\varphi}\,,$$

a zbog gustoće $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^l)$ u $\mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbf{C}^l)$ i

$$\mathcal{L}(\rho_n * \mathsf{v}) \rightharpoonup \mathcal{L}\mathsf{v} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l)\,. \tag{2}$$

Neka je $\varepsilon > 0$ fiksan. Odaberimo podniz niza $(\rho_n)$ (koji radi jednostavnosti i dalje jednako označavamo), takav da je

$$(\forall n \in \mathbf{N}) \qquad \|\rho_n * \mathsf{v} - \mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2^n}\,. \tag{3}$$

Zbog (2) iz Mazurovog teorema ([Ru, str. 67]) slijedi da postoje brojevi $s \in \mathbf{N}$ i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s \in \langle 0, 1\rangle$, sa svojstvom $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$, te brojevi $n(i) \in \mathbf{N}$, $i \in 1..s$, takvi da je

$$\Big\|\sum_{i=1}^s \lambda_i \mathcal{L}(\rho_{n(i)} * \mathsf{v}) - \mathcal{L}\mathsf{v}\Big\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)} < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{4}$$

Uz oznaku $\mathsf{v}_\varepsilon := \sum_{i=1}^s \lambda_i \rho_{n(i)} * \mathsf{v} \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$ je

$$\mathcal{L}\mathsf{v}_\varepsilon = \sum_{i=1}^s \lambda_i \mathcal{L}(\rho_{n(i)} * \mathsf{v}) \,,$$

pa formula (4) postaje

$$\Big\| \mathcal{L}\mathsf{v}_\varepsilon - \mathcal{L}\mathsf{v} \Big\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)} < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Kako je zbog (3) i

$$\begin{aligned} \|\mathsf{v}_\varepsilon - \mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} &= \Big\| \sum_{i=1}^s \lambda_i (\rho_{n(i)} * \mathsf{v} - \mathsf{v}) \Big\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} \\ &\le \sum_{i=1}^s \lambda_i \|(\rho_{n(i)} * \mathsf{v} - \mathsf{v})\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^s \frac{1}{2^{n(i)}} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2} \,, \end{aligned}$$

to iz definicije norme na $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ slijedi

$$\|\mathsf{v}_\varepsilon - \mathsf{v}\|_{\mathcal{L},p} < \varepsilon \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{p-1}{p}} < \varepsilon \,.$$

**Q.E.D.**

**Korolar 1.** *Neka je $p \in \langle 1, \infty \rangle$, te $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ takav da je $\operatorname{supp} \mathsf{v} \in \mathcal{K}(\Omega)$. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ i svaki $\delta > 0$ postoji funkcija $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathrm{K}(\mathsf{0}, \delta))$ za koju je*

$$\|\mathsf{v} - \varphi * \mathsf{v}\|_{\mathcal{L},p} < \varepsilon \,.$$

Dem. Za $\varphi$ možemo uzeti konveksnu kombinaciju iz dokaza prethodnog teorema:

$$\varphi := \sum_{i=1}^s \lambda_i \rho_{n(i)} \,,$$

uz uvjet da na početku dokaza (prethodnog teorema) odaberemo podniz izglađujućeg niza, čiji svi članovi imaju nosač u $\mathrm{K}(\mathsf{0}, \delta)$.

**Q.E.D.**

Sljedeći teorem se dokazuje analogno kao i za klasične Soboljevljeve prostore (vidi [AF, str. 67]), pa stoga njegov dokaz ovdje izostavljamo.

**Teorem 3.** *Za $p \in \langle 1, \infty \rangle$ je $\mathrm{C}^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r) \cap \mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ gusto u $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$.* ∎

S $\mathcal{U}_\mathbf{x}$ označavamo skup (filtar) svih okolina točke $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$.

**Definicija.** Kažemo da skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ ima *svojstvo segmenta*, ukoliko postoji familija $\mathcal{N} = \{(N_\mathbf{x}, \mathbf{y}_\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_\mathbf{x} \times \mathbf{R}^d : \mathbf{x} \in \partial\Omega\}$, takva da je

$$(\forall\, \mathbf{x} \in \partial\Omega)(\forall\, \mathbf{z} \in \mathrm{Cl}\,\Omega \cap N_\mathbf{x})(\forall\, \tau \in \langle 0, 1 \rangle) \quad \mathbf{z} + \tau \mathbf{y}_\mathbf{x} \in \Omega \,.$$

∎

Geometrijska interpretacija svojstva segmenta je da $\Omega$ ne može istovremeno ležati s obje strane svog ruba.

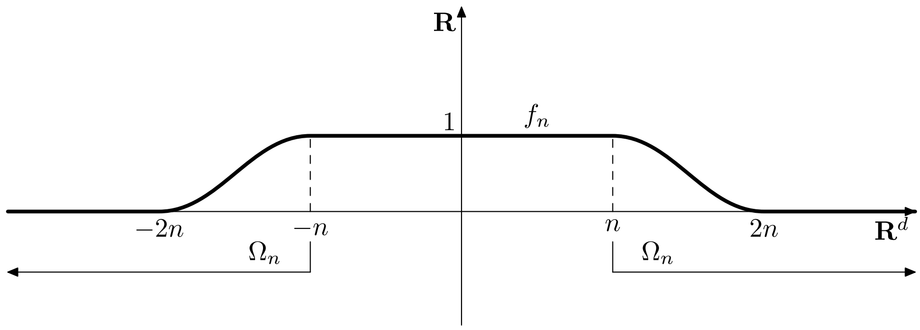
**Teorem 4.** *Ukoliko je $p \in \langle 1, \infty \rangle$ i $\Omega$ ima svojstvo segmenta, onda su restrikcije na $\Omega$ funkcija iz prostora $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$ guste u $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$.*

Dem. Dokaz provodimo u tri koraka.

**I. rezanje na glatke funkcija s omeđenim nosačem**: neka je $f \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$, takva da je

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{za} \quad |\mathbf{x}| < 1 \\ 0, & \text{za} \quad |\mathbf{x}| > 2 \end{cases} ,$$

te $f_n(\mathbf{x}) := f(\frac{\mathbf{x}}{n})$, za $n \in \mathbf{N}$ (vidi sliku).




Označimo

$$\begin{aligned} \Omega_n &:= \{\mathbf{x} \in \Omega : |\mathbf{x}| > n\} , \\ a &:= \max_{k \in 1..d} \|\mathbf{A}_k\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_{l,r})} , \end{aligned}$$

te $\mathsf{v}_n := f_n \mathsf{v}$, za dani $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$. Koristeći Leibnitzovu formulu za deriviranje produkta glatke funkcije i distribucije dobivamo

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}\mathsf{v}_n\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_n; \mathbf{C}^l)} &= \Big\| \sum_{k=1}^d (\partial_k f_n) \mathbf{A}_k \mathsf{v} + f_n \sum_{k=1}^d \partial_k (\mathbf{A}_k \mathsf{v}) + f_n \mathbf{C} \mathsf{v} \Big\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_n; \mathbf{C}^l)} \\ &\le C_1 a \|\nabla f_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega_n; \mathbf{R}^d)} \|\mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_n; \mathbf{C}^r)} + \|f_n\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega_n)} \|\mathcal{L}\mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^p(\Omega_n; \mathbf{C}^l)} \\ &\le C_1' \|f_n\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega_n)} \|\mathsf{v}\|_{\mathcal{L},p,\Omega_n} \\ &\le C_2 \|f\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|\mathsf{v}\|_{\mathcal{L},p,\Omega_n} , \end{aligned}$$

za neke pozitivne konstante $C_1, C_1', C_2$ (koje ne ovise o $n$ i $\mathsf{v}$). Odavdje slijedi (za $C_3 > 0$)

$$\begin{aligned} \|\mathsf{v} - \mathsf{v}_n\|_{\mathcal{L},p,\Omega} &= \|\mathsf{v} - \mathsf{v}_n\|_{\mathcal{L},p,\Omega_n} \\ &\le \|\mathsf{v}\|_{\mathcal{L},p,\Omega_n} + \|\mathsf{v}_n\|_{\mathcal{L},p,\Omega_n} \le C_3 \|\mathsf{v}\|_{\mathcal{L},p,\Omega_n} . \end{aligned}$$

Budući da je (prema Lebesguevom teoremu o dominiranoj konvergenciji)

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathsf{v}\|_{\mathcal{L},p,\Omega_n} = 0 ,$$

to slijedi da se svaka funkcija iz $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ može proizvoljno dobro aproksimirati (u $\|\cdot\|_{\mathcal{L},p}$ normi) funkcijom iz $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ s omeđenim nosačem. Ako uzmemo u obzir tvrdnju Teorema 3, onda lako slijedi da se svaka funkcija iz $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ može proizvoljno dobro aproksimirati glatkom funkcijom iz $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ s omeđenim nosačem u $\Omega$. Stoga je teorem dovoljno dokazati za takve funkcije.

**II. svođenje na lokalnu aproksimaciju**: neka je u daljnjem funkcija $\mathsf{v}$ iz $\mathrm{C}^\infty(\Omega;\mathbf{C}^r)\cap\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, takva da je $\operatorname{supp}\mathsf{v}$ omeđen u $\Omega$. Ako s $\mathcal{N}$ označimo familiju iz definicije svojstva segmenta, tada je skup

$$F := \operatorname{supp}\mathsf{v}\setminus(\cup_{\mathbf{x}\in\partial\Omega}N_{\mathbf{x}})\subseteq\Omega$$

kompaktan u $\mathbf{R}^d$, pa stoga postoji otvoren skup $N_0$, takav da je $F\subseteq N_0\subseteq\operatorname{Cl}N_0\subseteq\Omega$. Familija $\{N_0\}\cup\{N_{\mathbf{x}}:\mathbf{x}\in\partial\Omega\}$ čini otvoren pokrivač kompakta $\operatorname{supp}\mathsf{v}$ u $\mathbf{R}^d$, pa postoji konačan potpokrivač $\{N_0,N_1,\ldots,N_K\}$. Izaberimo otvorene skupove $\dot{N}_i$, takve da je $\dot{N}_i\Subset N_i$, $i\in 0..K$, te da je $\operatorname{supp}\mathsf{v}\subseteq\dot{N}_0\cup\dot{N}_1\cup\ldots\cup\dot{N}_K$. Neka je $\mathcal{F}=\{f_\alpha:\alpha\in A\}$ particija jedinice pridružena otvorenom pokrivaču $\{\dot{N}_0,\dot{N}_1,\ldots,\dot{N}_K\}$ skupa $\operatorname{supp}\mathsf{v}$, te neka je $\dot{f}_i$ (lokalno konačna) suma svih $f_\alpha\in\mathcal{F}$ za koje je $i$ najmanji indeks sa svojstvom da je $\operatorname{supp}f_\alpha\subseteq\dot{N}_i$. Uočimo da je tada $\sum_{i=1}^K\dot{f}_i\equiv 1$ na $\operatorname{supp}\mathsf{v}$, te označimo $\mathsf{v}_i:=\dot{f}_i\mathsf{v}$. Kada bismo za svaki $i\in 0..K$ i svaki $\varepsilon>0$ mogli naći $\mathsf{v}_{\varepsilon,i}\in\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, takav da je

$$\|\mathsf{v}-\mathsf{v}_{\varepsilon,i}\|_{\mathcal{L},p}<\frac{\varepsilon}{K+1}\,,$$

tada bi za $\mathsf{v}_\varepsilon:=\sum_{i=0}^K\mathsf{v}_{\varepsilon,i}$ vrijedilo

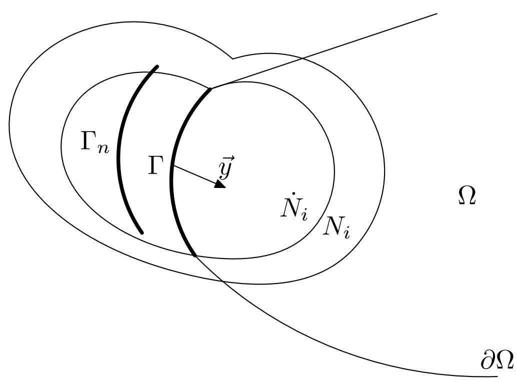
$$\|\mathsf{v}-\mathsf{v}_\varepsilon\|_{\mathcal{L},p}=\Big\|\sum_{i=0}^K\mathsf{v}_i-\sum_{i=0}^K\mathsf{v}_{\varepsilon,i}\Big\|_{\mathcal{L},p}\leq\sum_{i=0}^K\|\mathsf{v}_i-\mathsf{v}_{\varepsilon,i}\|_{\mathcal{L},p}<\varepsilon\,,$$

i teorem bi bio dokazan.

**III. konstrukcija lokalne aproksimacije**: primijetimo da je svaki $\mathsf{v}_i$ iz $\mathrm{C}^\infty(\Omega;\mathbf{C}^r)\cap\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, te $\operatorname{supp}\mathsf{v}_i\subseteq\dot{N}_i\cap\operatorname{supp}\mathsf{v}$. Posebno, $\operatorname{supp}\mathsf{v}_0\subseteq\dot{N}_0$ je kompaktno sadržan u $\Omega$, pa je $\mathsf{v}_0\in\mathrm{C}_c^\infty(\Omega;\mathbf{C}^r)$ i možemo uzeti $\mathsf{v}_{\varepsilon,0}=\mathsf{v}_0$. Fiksirajmo sada $i\in 1..K$, te proširimo $\mathsf{v}_i$ nulom van $\Omega$. Tada je $\mathsf{v}_i\in\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d\setminus\Gamma;\mathbf{C}^r)$, gdje je $\Gamma:=\partial\Omega\cap\operatorname{Cl}\dot{N}_i$. Označimo s $\mathbf{y}\neq\mathsf{0}$ vektor pridružen skupu $N_i$ iz definicije svojstva segmenta, te za $n\in\mathbf{N}$ definirajmo

$$\begin{aligned}\Gamma_n&:=\Gamma-\frac{1}{n}\mathbf{y}=\{\mathbf{x}-\frac{1}{n}\mathbf{y}:\mathbf{x}\in\Gamma\}\,,\\ \mathsf{v}_n(\mathbf{x})&:=\mathsf{v}_i(\mathbf{x}+\frac{1}{n}\mathbf{y})\,.\end{aligned}$$

Za $n$ dovoljno velik (takav da je $\frac{1}{n}<\min\{1,\frac{\mathrm{d}(\dot{N}_i,\partial N_i)}{|\mathbf{y}|}\}$) je $\Gamma_n\subseteq N_i$, a zbog svojstva segmenta je $\Gamma_n\cap\operatorname{Cl}\Omega=\emptyset$ (vidi sliku).




Također je $\operatorname{supp}\mathsf{v}_n$ kompaktno sadržan u $N_i$, $\mathsf{v}_n\in\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d\setminus\Gamma_n;\mathbf{C}^r)$, te je $\mathsf{v}_n$ omeđena na $\operatorname{Cl}\Omega$. Zbog toga je i

$$\mathcal{L}\mathsf{v}_n=\sum_{k=1}^d\Big[(\partial_k\mathbf{A}_k)\mathsf{v}_n+\mathbf{A}_k\partial_k\mathsf{v}_n\Big]+\mathbf{C}\mathsf{v}_n$$

omeđeno na $\Omega$, pa je $\mathsf{v}_n \in \mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$. Budući da je translacija $g \mapsto g(x+c)$ neprekinuta (po $c$) na $\mathrm{L}^p$, to

$$\mathsf{v}_n \longrightarrow \mathsf{v}_i \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r) \quad \text{kad} \quad n \longrightarrow \infty\,,$$

pa slično kao u dokazu Teorema 2 dobivamo i

$$\mathcal{L}\mathsf{v}_n \rightharpoonup \mathcal{L}\mathsf{v}_i \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l) \quad \text{kad} \quad n \longrightarrow \infty\,.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ fiksan. Odaberimo podniz niza $(\mathsf{v}_n)$ (koji jednako označavamo), takav da je

$$(5) \qquad (\forall\, n \in \mathbf{N}) \qquad \|\mathsf{v}_n - \mathsf{v}_i\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} < \frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{K+1}\cdot\frac{1}{2^n}\,.$$

Sada slično kao u dokazu Teorema 2 koristimo Mazurov teorem (vidi [Ru, str. 67]), te odabiremo konačnu konveksnu kombinaciju članova niza $(\mathcal{L}\mathsf{v}_n)$, takvu da je

$$\Big\|\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\mathcal{L}\mathsf{v}_{n(j)} - \mathcal{L}\mathsf{v}_i\Big\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)} < \frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{K+1}\,.$$

Označimo $\mathsf{u}_{\varepsilon,i} := \sum_{j=1}^{s}\lambda_j\mathsf{v}_{n(j)}$, tako da je $\mathcal{L}\mathsf{u}_{\varepsilon,i} = \sum_{j=1}^{s}\lambda_j\mathcal{L}\mathsf{v}_{n(j)}$, te da vrijedi

$$(6) \qquad \Big\|\mathcal{L}\mathsf{u}_{\varepsilon,i} - \mathcal{L}\mathsf{v}_i\Big\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)} < \frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{K+1}\,.$$

Zbog (5) je

$$\begin{aligned}\|\mathsf{u}_{\varepsilon,i} - \mathsf{v}_i\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} &= \Big\|\sum_{j=1}^{s}\lambda_j(\mathsf{v}_{n(j)} - \mathsf{v}_i)\Big\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} \\ &\le \sum_{j=1}^{s}\lambda_j\|(\mathsf{v}_{n(j)} - \mathsf{v}_i)\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} \\ &< \frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{K+1}\sum_{j=1}^{s}\frac{1}{2^{n(j)}} < \frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{K+1}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{K+1}\,,\end{aligned}$$

što zajedno sa (6) daje

$$\|\mathsf{u}_{\varepsilon,i} - \mathsf{v}_i\|_{\mathcal{L},p} < \frac{1}{4}\cdot\frac{\varepsilon}{K+1}\cdot 2^{\frac{1}{p}} < \frac{1}{2}\cdot\frac{\varepsilon}{K+1}\,.$$

Iz definicije funkcije $\mathsf{u}_{\varepsilon,i}$ i svojstava funkcija $\mathsf{v}_{n(j)}$ slijedi da funkcija $\mathsf{u}_{\varepsilon,i}$ pripada prostoru $\mathrm{C}^\infty(\mathbf{R}^d \setminus (\cup_{j=1}^{s}\Gamma_{n(j)});\mathbf{C}^r)$, te da je $\operatorname{supp}\mathsf{u}_{\varepsilon,i}$ kompaktno sadržan u $N_i$. Kako je i $\mathrm{Cl}\,\Omega \cap N_i$ kompaktno sadržan u $\mathbf{R}^d \setminus (\cup_{j=1}^{s}\Gamma_{n(j)})$, to prema Urysonovoj lemi možemo odabrati funkciju $\varphi \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d)$ takvu da je $\varphi \equiv 1$ na $\mathrm{Cl}\,\Omega \cap \operatorname{supp}\mathsf{u}_{\varepsilon,i}$, te $\varphi \equiv 0$ izvan nekog kompakta koji ne sadrži $\cup_{j=1}^{s}\Gamma_{n(j)}$. Tada je $\mathsf{v}_{\varepsilon,i} := \varphi\mathsf{u}_{\varepsilon,i}$ tražena funkcija.

**Q.E.D.**

## Proširenje na cijeli $\mathbf{R}^d$

Kao i kod Soboljevljevih prostora, mnoga svojstva prostora grafa su vezana uz odgovarajuću regularnost (ruba) domene. U svezi s tim najčešće se pojavljuje pojam Lipschitzovog skupa, odnosno skupa s Lipschitzovim rubom. U literaturi postoje različite (mada vrlo slične) definicije toga pojma (za neke reference vidi [BC, str. 350]), koje su često i ekvivalentne. Mi ćemo ovdje slijediti [Wl, str. 38], gdje je svojstvo Lipschitzovog ruba nazvano $N^{0,1}$ svojstvo, te je vrlo prezicno i detaljno definirano, što olakšava neke tehničke račune.

**Definicija.** Kažemo da je otvoren skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ Lipschitzov (odnosno da ima Lipschitzov rub) ukoliko za svaki $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ postoji okolina $N_{\mathbf{x}} \in \mathcal{U}_{\mathbf{x}}$, ortogonalna koordinatna transformacija $\mathbf{K}_{\mathbf{x}} : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^d$, brojevi $\alpha_{\mathbf{x}}, \beta_{\mathbf{x}} > 0$, te funkcija $f_{\mathbf{x}} : \mathbf{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbf{R}$, tako da, ukoliko s $(y_1, y_2, \dots, y_d)$ označimo nove koordinate (dane s transformacijom $\mathbf{K}_{\mathbf{x}}$), i s

$$P(\alpha_{\mathbf{x}}) := \{(y_1, y_2, \dots, y_{d-1}) : |y_i| < \alpha_{\mathbf{x}}\,,\; i \in 1..d-1\}$$

kocku u $\mathbf{R}^{d-1}$ duljine stranice $\alpha_{\mathbf{x}}$, vrijede sljedeća svojstva:

a) $f_{\mathbf{x}}|_{P(\alpha_{\mathbf{x}})}$ je Lipschitzova funkcija;

b) Dio ruba $\partial\Omega \cap N_{\mathbf{x}}$ je (u novim koordinatama) graf funkcije $f_{\mathbf{x}}|_{P(\alpha_{\mathbf{x}})}$:

$$\partial\Omega \cap N_{\mathbf{x}} = \Big\{\Big(y_1, y_2, \dots, y_{d-1}, f_{\mathbf{x}}(y_1, y_2, \dots, y_{d-1})\Big) : (y_1, y_2, \dots, y_{d-1}) \in P(\alpha_{\mathbf{x}})\Big\}\,;$$

c)

$$\Omega \cap N_{\mathbf{x}} = \Big\{(y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbf{R}^d : (y_1, y_2, \dots, y_{d-1}) \in P(\alpha_{\mathbf{x}}) \quad \& \quad f_{\mathbf{x}}(y_1, y_2, \dots, y_{d-1}) < y_d < f_{\mathbf{x}}(y_1, y_2, \dots, y_{d-1}) + \beta_{\mathbf{x}}\Big\}\,;$$

d)

$$(\mathrm{Cl}\,\Omega)^c \cap N_{\mathbf{x}} = \Big\{(y_1, y_2, \dots, y_d) \in \mathbf{R}^d : (y_1, y_2, \dots, y_{d-1}) \in P(\alpha_{\mathbf{x}}) \quad \& \quad f_{\mathbf{x}}(y_1, y_2, \dots, y_{d-1}) - \beta_{\mathbf{x}} < y_d < f_{\mathbf{x}}(y_1, y_2, \dots, y_{d-1})\Big\}\,.$$

∎

Može se provjeriti da Lipschitzovo područje zadovoljava svojstvo segmenta.

Sa $\mathrm{W}_0^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ u daljnjem označavamo zatvarač prostora $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$ u $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$. Isto tako, za danu izmjerivu funkciju $\mathsf{v} : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}^r$, s $\check{\mathsf{v}} : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{C}^r$ označavamo njezino proširenje nulom na cijeli $\mathbf{R}^d$:

$$\check{\mathsf{v}}(\mathbf{x}) := \begin{cases} \mathsf{v}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ 0, & \text{inače} \end{cases}\,.$$

Prije nego li dokažemo sljedeći teorem napomenimo da svaka Lipschitzova funkcija na $\Omega$ ima Lipschitszovo proširenje na cijeli $\mathbf{R}^d$ (vidi [EG, str. 86]). Štoviše, proširenje se može odabrati tako da Lipschitzova konstanta ostane ista (Kirszbraunov teorem, [Fe, §2.10.43]).

**Teorem 5.** *Neka je $\Omega$ Lipschitzovo područje, te neka je s $\hat{\mathbf{A}}_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\mathbf{R}^d; \mathrm{M}_{l,r})$ (za $k \in 1..d$) označeno jedno Lipschitzovo proširenje matrične funkcije $\mathbf{A}_k$. Označimo s $\hat{\mathbf{C}}$ neko omeđeno proširenje funkcije $\mathbf{C}$ na cijeli $\mathbf{R}^d$, te definirajmo operator $\hat{\mathcal{L}} : \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r) \longrightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^l)$ formulom*

$$\hat{\mathcal{L}}\mathsf{u} := \sum_{k=1}^d \partial_k(\hat{\mathbf{A}}_k \mathsf{u}) + \hat{\mathbf{C}}\mathsf{u}\,.$$

*Tada su za $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

*a)* $\mathsf{v} \in \mathrm{W}_0^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$;

*b)* $\check{\mathsf{v}} \in \mathrm{W}^{\hat{\mathcal{L}},p}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$.

Dem. Pokažimo da prva tvrdnja povlači drugu: neka je $\mathsf{v} \in \mathrm{W}_0^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, te $\check{\mathsf{v}}$ pripadno proširenje nulom. Jasno je da je $\check{\mathsf{v}} \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, pa još preostaje pokazati da je i $\hat{\mathcal{L}}\check{\mathsf{v}} \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^l)$. Označimo s $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ niz u $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$, takav da

$$\boldsymbol{\varphi}_n \longrightarrow \mathsf{v} \quad \text{u} \quad \mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)\,.$$

Posebno, tada i $\check{\boldsymbol{\varphi}}_n \longrightarrow \check{\mathsf{v}}$ u $\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, te $\mathcal{L}\boldsymbol{\varphi}_n \longrightarrow \mathcal{L}\mathsf{v}$ u $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^l)$. Uočimo da je

$$\hat{\mathcal{L}}\check{\boldsymbol{\varphi}}_n = (\mathcal{L}\boldsymbol{\varphi}_n)\check{} \longrightarrow (\mathcal{L}\mathsf{v})\check{} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^l)\,,$$

dok je prema Lemi 1

$$\hat{\mathcal{L}}\check{\boldsymbol{\varphi}}_n \longrightharpoonup \hat{\mathcal{L}}\check{\mathsf{v}} \quad \text{u} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^l)\,.$$

Jedinstvenost limesa (u prostoru distribucija) povlači $\hat{\mathcal{L}}\check{\mathsf{v}} = (\mathcal{L}\mathsf{v})\check{} \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^l)$, i time je jedna implikacija dokazana. Uočimo da do sada nismo koristili da $\Omega$ ima Lipschitzov rub.

Da bismo dokazali drugu implikaciju, postupamo slično kao u dokazu Teorema 4: prvo koristimo niz funkcija $(f_n)$ da bismo dokaz sveli na slučaj kada $\check{\mathsf{v}}$ (odnosno $\mathsf{v}$) ima omeđen nosač, te postupajući analogno dobivamo familiju $\mathcal{N}$, skupove $F$, $N_0, N_1, \ldots, N_K$, $\dot{N}_0, \dot{N}_1, \ldots, \dot{N}_K$, particiju jedinice $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$, te funkcije $\dot{f}_i$, $i \in 1..K$. Označimo $\dot{\mathsf{v}}_i := \dot{f}_i\check{\mathsf{v}}$, $i \in 0..K$, tako da je $\sum_{i=0}^K \dot{\mathsf{v}}_i = \check{\mathsf{v}}$ i uočimo da je (prema Teoremu 2) $\dot{\mathsf{v}}_0 \in \mathrm{W}_0^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$. Da bismo dokazali tvrdnju dovoljno je (za fiksan $i \in 1..K$) aproksimirati $\dot{\mathsf{v}}_i$ nizom iz $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$ (u $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ normi).

Neka je $(y_1, y_2, \ldots, y_d)$ ortogonalan koordinatni sustav, te $f_{\mathbf{x}_i} : \mathbf{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbf{R}$ Lipschitzova funkcija (konstante $L$) pridružena paru $(\mathbf{x}_i, N_i)$ iz definicije Lipschitzovog ruba. Označimo s

$$C := \Big\{(y_1, y_2, \ldots, y_d) \in \mathbf{R}^d : y_d > L\Big(\sum_{j=1}^{d-1} y_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}$$

stožac (u novim koordinatama), te s

$$C_{\mathbf{x}} := \Big\{(y_1, y_2, \ldots, y_d) \in \mathbf{R}^d : y_d - y_d^{\mathbf{x}} > L\Big(\sum_{j=1}^{d-1} (y_j - y_j^{\mathbf{x}})^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\}$$

njemu kongruentan stožac s vrhom u točki $\mathbf{x} \in \partial\Omega \cap N_i$, gdje su $(y_1^{\mathbf{x}}, y_2^{\mathbf{x}}, \ldots, y_d^{\mathbf{x}})$ transformirane koordinate točke $\mathbf{x}$. Pokažimo sada da za svaki $\mathbf{x} \in \partial\Omega \cap N_i$ vrijedi $C_{\mathbf{x}} \cap N_i \subseteq \Omega$. Zaista, za proizvoljnu točku $\mathbf{z} = (y_1^{\mathbf{z}}, y_2^{\mathbf{z}}, \ldots, y_d^{\mathbf{z}}) \in C_{\mathbf{x}} \cap N_i$ je

$$\begin{aligned} y_d^{\mathbf{z}} - y_d^{\mathbf{x}} > L\Big(\sum_{j=1}^{d-1} (y_j^{\mathbf{z}} - y_j^{\mathbf{x}})^2\Big)^{\frac{1}{2}} &> \Big|f_{\mathbf{x}_i}(y_1^{\mathbf{z}}, y_2^{\mathbf{z}}, \ldots, y_{d-1}^{\mathbf{z}}) - f_{\mathbf{x}_i}(y_1^{\mathbf{x}}, y_2^{\mathbf{x}}, \ldots, y_{d-1}^{\mathbf{x}})\Big| \\ &\geq f_{\mathbf{x}_i}(y_1^{\mathbf{z}}, y_2^{\mathbf{z}}, \ldots, y_{d-1}^{\mathbf{z}}) - f_{\mathbf{x}_i}(y_1^{\mathbf{x}}, y_2^{\mathbf{x}}, \ldots, y_{d-1}^{\mathbf{x}})\,, \end{aligned}$$

pa, zbog $y_d^{\mathbf{x}} = f_{\mathbf{x}_i}(y_1^{\mathbf{x}}, y_2^{\mathbf{x}}, \ldots, y_{d-1}^{\mathbf{x}})$ (jer je $\mathbf{x} \in \partial\Omega \cap N_i$), slijedi $y_d^{\mathbf{z}} > f_{\mathbf{x}_i}(y_1^{\mathbf{z}}, y_2^{\mathbf{z}}, \ldots, y_{d-1}^{\mathbf{z}})$, odnosno $\mathbf{z} \in \Omega \cap N_i$.

Uzmimo sada $\varepsilon > 0$ fiksan, i označimo $\delta := \frac{1}{3}d(\partial N_i, \partial\dot{N}_i)$. Neka je $\varphi : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{C}$ glatka funkcija, za koju je $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \mathrm{K}(0, \delta) \cap C$, te (vidi Korolar 1)

$$\|\dot{\mathsf{v}}_i - \varphi * \dot{\mathsf{v}}_i\|_{\mathcal{L},p} < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}\,. \tag{7}$$

Tada je i

$$\operatorname{supp}\varphi * \dot{\mathsf{v}}_i \subseteq \operatorname{supp}\dot{\mathsf{v}}_i + (\mathrm{K}(0,\delta) \cap C) \subseteq (\operatorname{Cl}\Omega \cap \dot{N}_i) + (\mathrm{K}(0,\delta) \cap C) \subseteq \operatorname{Cl}\Omega \cap N_i\,,$$

pa niz funkcija $(\dot{\mathsf{v}}_n)$, definiran s

$$\dot{\mathsf{v}}_n(\mathbf{y}) := (\varphi * \dot{\mathsf{v}}_i)\Big(\mathbf{y} - \frac{1}{n|y_d|}(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{d-1}, y_d)\Big)\,, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d\,,$$

zadovoljava $\operatorname{supp} \dot{\mathsf{v}}_n \subseteq \Omega \cap N_i$, za dovoljno veliki $n$ (takav da je $\frac{1}{n} < \delta$), odnosno $\dot{\mathsf{v}}_n \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$. Sada analogno kao u trećem dijelu dokaza Teorema 4, konstruiramo $\dot{\mathsf{v}}_{\varepsilon,i} \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$, koji je konačna konveksna kombinacija članova niza $(\dot{\mathsf{v}}_n)$, takav da je

$$\|\varphi * \dot{\mathsf{v}}_i - \dot{\mathsf{v}}_{\varepsilon,i}\|_{\mathcal{L},p} < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}\,,$$

što u kombinaciji sa (7) povlači

$$\|\dot{\mathsf{v}}_i - \dot{\mathsf{v}}_{\varepsilon,i}\|_{\mathcal{L},p} < \frac{\varepsilon}{K+1}\,.$$

**Q.E.D.**

## 2. Operator traga

U ovome odjeljku želimo definirati pojam traga za funkcije iz prostora grafa. Najprije ćemo dokazati nekoliko pomoćnih rezultata.

**Lema 2.** *Neka je zadovoljen jedan od sljedeća tri uvjeta:*
*a)* $\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *i* $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{1,p'}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, *za* $p \in [1, \infty\rangle$;
*b)* $\mathsf{u} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *i* $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, *za* $p \in \langle 1, \infty\rangle$;
*c)* $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathbf{C}^r)$.
*Tada vrijedi Leibnitzova formula:*

$$\partial_k(\mathsf{u} \cdot \mathsf{v}) = \partial_k \mathsf{u} \cdot \mathsf{v} + \mathsf{u} \cdot \partial_k \mathsf{v}\,, \qquad k \in 1..d\,.$$

Dem. **a)** Neka je $(\mathsf{u}_n)$ niz u $\mathrm{C}^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r) \cap \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, takav da $\mathsf{u}_n \longrightarrow \mathsf{u}$ u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, i neka je $k \in 1..d$ fiksan. Leibnitzova formula za derivaciju produkta glatke funkcije i distribucije povlači

$$\partial_k(\mathsf{u}_n \cdot \mathsf{v}) = \partial_k \mathsf{u}_n \cdot \mathsf{v} + \mathsf{u}_n \cdot \partial_k \mathsf{v}\,.$$

Za $\mathsf{v} \in \mathrm{W}^{1,p'}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ iz Hölderove nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned} \mathsf{u}_n \cdot \mathsf{v} &\longrightarrow \mathsf{u} \cdot \mathsf{v} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^1(\Omega) \\ \partial_k \mathsf{u}_n \cdot \mathsf{v} &\longrightarrow \partial_k \mathsf{u} \cdot \mathsf{v} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^1(\Omega) \\ \mathsf{u}_n \cdot \partial_k \mathsf{v} &\longrightarrow \mathsf{u} \cdot \partial_k \mathsf{v} \quad \text{u} \quad \mathrm{L}^1(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Gornje kovergencije povlače i slabu $*$ konvergenciju u prostoru $\mathcal{D}'(\Omega)$, a kako je deriviranje neprekinuto u topologiji na prostoru distribucija, to posebno vrijedi i

$$\partial_k(\mathsf{u}_n \cdot \mathsf{v}) \relbar\!\rightharpoonup \partial_k(\mathsf{u} \cdot \mathsf{v}) \quad \text{u} \quad \mathcal{D}'(\Omega)\,.$$

Kombinirajući spomenute konvergencije u prostoru distribucija s gornjom Leibnitzovom formulom dobivamo tvrdnju.

**b)** U ovom slučaju dokaz se provodi slično kao u (a), te se gornji argumenti mijenjaju samo utoliko što imamo jake konvergencije u prostoru $\mathrm{L}^p(\Omega)$, a ne u $\mathrm{L}^1(\Omega)$.

**c)** Kada su $\mathsf{u}$ i $\mathsf{v}$ Lipschitzove funkcije, onda one imaju klasičnu derivaciju skoro svuda, i te derivacije su jednake njihovim distribucijskim derivacijama [EG, str. 235]. Budući da Leibnitzova formula vrijedi za klasične derivacije (po točkama), to vrijedi i za distribucijske.

**Q.E.D.**

**Lema 3.** $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *je neprekinuto uloženo u* $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, *za* $p\in[1,\infty]$. *Ukoliko je* $p\in\langle 1,\infty\rangle$ *i* $\Omega$ *zadovoljava svojstvo segmenta, onda je to ulaganje i gusto.*

Dem. Za $\mathsf{u}\in\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ je $\mathsf{u},\partial_k\mathsf{u}\in\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)$, $k\in 1..d$, pa iz Leibnitzove formule slijedi

$$\mathcal{L}\mathsf{u}=\sum_{k=1}^d\Big[\partial_k\mathbf{A}_k\mathsf{u}+\mathbf{A}_k\partial_k\mathsf{u}\Big]+\mathbf{C}\mathsf{u}\in\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)\,,$$

što povlači $\mathsf{u}\in\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$. Isto tako se lako vidi da je

$$\|\mathcal{L}\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)}\le C_1\|\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)}+C_2\sum_{k=1}^d\|\partial_k\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)}\le C_3\|\mathsf{u}\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{C}^r)}\,,$$

pa je i

$$\|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L},p}\le C_4\|\mathsf{u}\|_{\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{C}^r)}\,,$$

za neke pozitivne konstante $C_1,C_2,C_3,C_4$, i time je dokazana prva tvrdnja.

Ukoliko je $p\in\langle 1,\infty\rangle$ i $\Omega$ zadovoljava svojstvo segmenta, onda je (prema Teoremu 4) $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ gusto u $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$. Budući da je $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)\subseteq\mathrm{W}^{1,p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, to slijedi i druga tvrdnja.

**Q.E.D.**

**Lema 4.** *Za* $\mathsf{v}\in\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)$ ($p\in[1,\infty]$) *i* $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^l)$ *je*

$${}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^l)}\langle\,\mathcal{L}\mathsf{v},\boldsymbol{\varphi}\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^l)}=\int_\Omega\mathsf{v}\cdot\overline{\tilde{\mathcal{L}}\boldsymbol{\varphi}}\,d\mathbf{x}\,,$$

*gdje* $\cdot$ *označava realni skalarni produkt.*

Dem. Prvo uočimo da gornji izraz ima smisla, jer je $\mathcal{L}\mathsf{v}\in\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^l)$, te $\tilde{\mathcal{L}}\boldsymbol{\varphi}\in\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{C}^r)$ ima kompaktan nosač. Koristeći Leibnitzovu formulu i definiciju distribucijske derivacije dobivamo

$$\begin{aligned}\int_\Omega\mathsf{v}\cdot\overline{\tilde{\mathcal{L}}\boldsymbol{\varphi}}\,d\mathbf{x}&=\int_\Omega\mathsf{v}\cdot\overline{\Big[-\sum_{k=1}^d\partial_k(\mathbf{A}_k^*\boldsymbol{\varphi})+\Big(\mathbf{C}^*+\sum_{k=1}^d\partial_k\mathbf{A}_k^*\Big)\boldsymbol{\varphi}\Big]}\,d\mathbf{x}\\&=\int_\Omega\mathsf{v}\cdot\Big[-\sum_{k=1}^d\mathbf{A}_k^\top\partial_k\overline{\boldsymbol{\varphi}}+\mathbf{C}^\top\overline{\boldsymbol{\varphi}}\Big]\,d\mathbf{x}\\&=\int_\Omega\Big[-\sum_{k=1}^d\mathbf{A}_k\mathsf{v}\cdot\partial_k\overline{\boldsymbol{\varphi}}+\mathbf{C}\mathsf{v}\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\Big]\,d\mathbf{x}\\&=-\sum_{k=1}^d{}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^l)}\langle\,\mathbf{A}_k\mathsf{v},\partial_k\boldsymbol{\varphi}\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^l)}+{}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^l)}\langle\,\mathbf{C}\mathsf{v},\boldsymbol{\varphi}\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^l)}\\&=\sum_{k=1}^d{}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^l)}\langle\,\partial_k(\mathbf{A}_k\mathsf{v}),\boldsymbol{\varphi}\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^l)}+{}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^l)}\langle\,\mathbf{C}\mathsf{v},\boldsymbol{\varphi}\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^l)}\\&={}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^l)}\langle\,\mathcal{L}\mathsf{v},\boldsymbol{\varphi}\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^l)}\,.\end{aligned}$$

**Q.E.D.**

Tvrdnje gornje leme vrijede i ako zamijenimo uloge operatora $\mathcal{L}$ i $\tilde{\mathcal{L}}$.

Iz tehničkih razloga ćemo u ostatku ovog odjeljka razmatrati samo slučaj $p = 2$, odnosno promatramo prostor $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$. Također, dodatno pretpostavljamo da je $\Omega$ omeđen i Lipschitzov. Tada je $\partial\Omega$ po dijelovima graf Lipschitzove funkcije, pa se prema Rademacherovom teoremu (Lipschitzova funkcija ima derivaciju skoro svuda [EG, str. 81]) može definirati jedinična vanjska normala $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_d) \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega;\mathbf{R}^d)$. Definirajmo preslikavanje $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega;\mathrm{M}_{l,r})$ s

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) := \sum_{k=1}^{d} \nu_k(\mathbf{x})\mathbf{A}_k(\mathbf{x})\,.$$

Za $m \in \mathbf{N}$, s $\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} : \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^m) \longrightarrow \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^m)$ ćemo označavati operator traga, a s $\mathcal{E}_{\mathrm{H}^1} : \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^m) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^m)$ njegov desni inverz–operator podizanja (vidi [Wl, str. 120–133]).

**Teorem 6.** *Za* $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^r)$ *i* $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^l)$ *vrijedi*

$$\langle\, \mathcal{L}\mathsf{u} \mid \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} - \langle\, \mathsf{u} \mid \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} = \langle\, \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u} \mid \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)}\,.$$

Dem. Dokaz prvo provodimo za $\mathsf{u} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ i $\mathsf{v} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^l)$. Koristeći (uzastopno) Leibnitzovu formulu dobivamo

$$\begin{aligned}
\langle\, \mathcal{L}\mathsf{u} \mid \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} - \langle\, \mathsf{u} \mid \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} &= \int_\Omega \sum_{k=1}^d \partial_k(\mathbf{A}_k\mathsf{u})\cdot\bar{\mathsf{v}}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathsf{u}\cdot\sum_{k=1}^d \overline{\mathbf{A}_k^*\partial_k\mathsf{v}}\,d\mathbf{x}\\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^d \Big[\partial_k(\mathbf{A}_k\mathsf{u})\cdot\bar{\mathsf{v}} + \mathbf{A}_k\mathsf{u}\cdot\partial_k\bar{\mathsf{v}}\Big]\,d\mathbf{x}\\
&= \int_\Omega \sum_{k=1}^d \partial_k(\mathbf{A}_k\mathsf{u}\cdot\bar{\mathsf{v}})\,d\mathbf{x}\,,
\end{aligned}$$

što uz teorem o divergenciji povlači

$$\langle\, \mathcal{L}\mathsf{u} \mid \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} - \langle\, \mathsf{u} \mid \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} = \int_{\partial\Omega} \sum_{k=1}^d \nu_k(\mathbf{A}_k\mathsf{u}\cdot\bar{\mathsf{v}})\big|_{\partial\Omega}\,dS = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathsf{u}\big|_{\partial\Omega}\cdot\bar{\mathsf{v}}\big|_{\partial\Omega}\,dS\,,$$

čime je tvrdnja za ovaj slučaj dokazana.

Neka je sada $\mathsf{u} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$ i $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^l)$, te neka je $(\mathsf{v}_n)$ niz u $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^l)$ koji konvergira k $\mathsf{v}$ u $\mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^l)$. Tada

$$\langle\, \mathcal{L}\mathsf{u} \mid \mathsf{v}_n\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} \longrightarrow \langle\, \mathcal{L}\mathsf{u} \mid \mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)}\,,$$

a kako $\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}_n \longrightarrow \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}$ u $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)$ (što slijedi iz Leme 3 i definicije $\tilde{\mathcal{L}}$–norme), to i

$$\langle\, \mathsf{u} \mid \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}_n\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} \longrightarrow \langle\, \mathsf{u} \mid \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)}\,.$$

S druge pak strane, zbog $\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v}_n \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v}$ u $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)$, vrijedi $\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v}_n \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v}$ u $\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)$, što povlači

$$\langle\, \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u} \mid \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v}_n\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)} \longrightarrow \langle\, \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u} \mid \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)}\,,$$

te je time tvrdnja dokazana i za ovaj slučaj.

Aproksimirajući $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^r)$ funkcijama iz $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^r)$, i postupajući slično kao gore, tvrdnja se lako pokaže za $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^r)$ i $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^l)$.

**Q.E.D.**

Neka su $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r)$ i $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^l)$. Koristeći Schwartz–Cauchy–Bunjakovskijevu nejednakost (za $\mathrm{L}^2$ skalarni produkt) dobivamo

$$\begin{aligned}\Big|\langle \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u} \mid \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v} \rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)}\Big| &\le \Big|\langle \mathcal{L}\mathsf{u} \mid \mathsf{v} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)}\Big| + \Big|\langle \mathsf{u} \mid \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v} \rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)}\Big| \\ &\le \|\mathcal{L}\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)}\|\mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} + \|\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)}\|\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} \\ &\le \|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}}\|\mathsf{v}\|_{\tilde{\mathcal{L}}}\,,\end{aligned}$$

odnosno, za $\mathsf{z} \in \mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$ je

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u} \mid \mathsf{z} \rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)} &\le \|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}} \cdot \|\mathcal{E}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z}\|_{\tilde{\mathcal{L}}} \\ &\le C_1\|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}} \cdot \|\mathcal{E}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z}\|_{\mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^l)} \le C_1\|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}}\|\mathcal{E}_{\mathrm{H}^1}\| \cdot \|\mathsf{z}\|_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)}\,,\end{aligned}$$

za neku konstantu $C_1 > 0$. To povlači da je preslikavanje

$$\mathsf{z} \mapsto \langle \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u} \mid \mathsf{z} \rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)}$$

neprekinut antilinearan funkcional na $\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$, norme manje ili jednake $C_1\|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}}\|\mathcal{E}_{\mathrm{H}^1}\|$. Drugim riječima, za fiksan $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r)$ preslikavanje $\langle \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u} \mid \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)}$ je iz prostora $\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$. Stoga je dobro definirano preslikavanje $\dot{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}} : \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r) \longrightarrow \mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$ s

$$\dot{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}}\mathsf{u} := \langle \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u} \mid \cdot \rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)}\,.$$

Jasno je da je to preslikavanje linearno, a lako se vidi i da je neprekinuto ukoliko $\mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r)$ promatramo uz normu $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$. Budući da je $\mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r)$ gusto u $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, to se $\dot{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}}$ može na jedinstven način proširiti do neprekinutog lineranog preslikavanja na cijeli $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$. Kako $\dot{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}}$ općenito neće biti surjekcija, to ima smisla promatrati prostor njegove slike

$$\mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l) := \operatorname{Im} \dot{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}} \subseteq \mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)\,,$$

te surjektivni operator traga $\mathcal{T}_{\mathcal{L}} : \mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r) \longrightarrow \mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$, definiran s

$$\mathcal{T}_{\mathcal{L}}\mathsf{u} := \dot{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}}\mathsf{u}\,.$$

**Teorem 7.** *Vrijedi*

$$\operatorname{Ker} \mathcal{T}_{\mathcal{L}} = \mathrm{H}^{\mathcal{L}}_0(\Omega; \mathbf{C}^r)\,.$$

Dem. Za $\boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^r)$ je očito $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}\boldsymbol{\varphi} = \mathsf{0}$, a kako je $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^r)$ gusto u $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}_0(\Omega; \mathbf{C}^r)$ i $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ neprekinut, to je

$$\operatorname{Ker} \mathcal{T}_{\mathcal{L}} \supseteq \mathrm{H}^{\mathcal{L}}_0(\Omega; \mathbf{C}^r)\,.$$

Da bismo dokazali drugu inkluziju uzmimo $\mathsf{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, te kao i prije, označimo s $\check{\mathsf{v}}$ njegovo proširenje nulom na cijeli $\mathbf{R}^d$. Neka je $\hat{\mathcal{L}}$ proširenje operatora $\mathcal{L}$ kao u Teoremu 5. Definirajmo njegov formalno adjungirani operator $\tilde{\hat{\mathcal{L}}}$ s

$$\tilde{\hat{\mathcal{L}}}\mathsf{u} := -\sum_{k=1}^d \partial_k(\hat{\mathbf{A}}_k^*\mathsf{u}) + \Big(\hat{\mathbf{C}}^* + \sum_{k=1}^d \partial_k \hat{\mathbf{A}}_k^*\Big)\mathsf{u}\,,$$

koji je onda proširenje (u smislu Teorema 5) operatora $\tilde{\mathcal{L}}$. Prema Teoremu 5 dovoljno je pokazati da je $\check{\mathsf{v}} \in \mathrm{H}^{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$. Jasno je da je $\check{\mathsf{v}} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^r)$, pa preostaje pokazati da je $\hat{\mathcal{L}}\check{\mathsf{v}} \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^l)$.

Za $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^l)$, prema Lemi 4, iz definicije operatora traga slijedi

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^l)}\langle\, \hat{\mathcal{L}}\check{\mathsf{v}}, \varphi \,\rangle_{\mathcal{D}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^l)} - {}_{\mathcal{D}'(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^l)}\langle\, (\check{\mathcal{L}\mathsf{v}}), \varphi \,\rangle_{\mathcal{D}(\mathbf{R}^d;\mathbf{C}^l)} &= \\
&= \int\limits_{\mathbf{R}^d} \check{\mathsf{v}} \cdot \overline{\hat{\tilde{\mathcal{L}}}\varphi}\, d\mathbf{x} - \int\limits_{\mathbf{R}^d} (\check{\mathcal{L}\mathsf{v}}) \cdot \overline{\varphi}\, d\mathbf{x} \\
&= \int\limits_{\Omega} \mathsf{v} \cdot \overline{\tilde{\mathcal{L}}\varphi}\, d\mathbf{x} - \int\limits_{\Omega} \mathcal{L}\mathsf{v} \cdot \overline{\varphi}\, d\mathbf{x} \\
&= \langle\, \mathsf{v} \mid \tilde{\mathcal{L}}\varphi \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} - \langle\, \mathcal{L}\mathsf{v} \mid \varphi \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} \\
&= -{}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathcal{L}}\mathsf{v}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\varphi \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)} = 0\,,
\end{aligned}
$$

jer je $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}\mathsf{v} = 0$. To povlači da je $\hat{\mathcal{L}}\check{\mathsf{v}} = (\check{\mathcal{L}\mathsf{v}}) \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}^d; \mathbf{C}^l)$.

**Q.E.D.**

Jednostavno se vidi da je restrikcija $\hat{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}}$ operatora $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ na $(\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_{\mathcal{L}})^{\perp}$ neprekinuta linearna bijekcija s $(\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_{\mathcal{L}})^{\perp}$ na $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$. Stoga je dobro definiran *operator podizanja* $\mathcal{E}_{\mathcal{L}} : \mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l) \longrightarrow \mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ s

$$\mathcal{E}_{\mathcal{L}} := \hat{\mathcal{T}}_{\mathcal{L}}^{-1}\,.$$

Preslikavanje $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ je očito linearno, $\mathrm{Im}\,\mathcal{E}_{\mathcal{L}} = (\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_{\mathcal{L}})^{\perp} = \mathrm{H}^{\mathcal{L}}_0(\Omega; \mathbf{C}^r)^{\perp}$, te je

$$\mathcal{T}_{\mathcal{L}}\mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z} = \mathsf{z}\,, \qquad \mathsf{z} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)\,,$$

što opravdava naziv operator podizanja. Ukoliko je $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$ zatvoreno u $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$, onda je $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ i neprekinut [Ku, str. 389].

**Teorem 8.** *Za* $\mathsf{z} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$, *infimum skupa* $\{\|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}} : \mathsf{u} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r) \quad \& \quad \mathcal{T}_{\mathcal{L}}\mathsf{u} = \mathsf{z}\}$ *se dostiže u jedinstvenoj točki* $\mathsf{u}_{\mathsf{z}} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z}$.

Dem. Lako se vidi da je $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}^{\leftarrow}(\mathsf{z}) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z} + \mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, pa (zbog $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z} \in (\mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_{\mathcal{L}})^{\perp}$) za $\mathsf{v} \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ vrijedi

$$\|\mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z} + \mathsf{v}\|_{\mathcal{L}}^2 = \langle\, \mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z} + \mathsf{v} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z} + \mathsf{v} \,\rangle_{\mathcal{L}} = \|\mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z}\|_{\mathcal{L}}^2 + \|\mathsf{v}\|_{\mathcal{L}}^2\,.$$

Budući da je $0 \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$, to slijedi da je

$$\inf\{\|\mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z} + \mathsf{v}\|_{\mathcal{L}} : \mathsf{v} \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_{\mathcal{L}}\} = \min\{\|\mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z} + \mathsf{v}\|_{\mathcal{L}} : \mathsf{v} \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{T}_{\mathcal{L}}\} = \|\mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z}\|_{\mathcal{L}}\,,$$

i $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z}$ je jedina točka u kojoj se dostiže gornji minimum.

**Q.E.D.**

Ukoliko za $\mathsf{z}, \mathsf{w} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$ definiramo

$$\langle\, \mathsf{z} \mid \mathsf{w} \,\rangle_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}} := \langle\, \mathcal{E}\mathsf{z} \mid \mathcal{E}\mathsf{w} \,\rangle_{\mathcal{L}}\,,$$

onda je jednostavno provjeriti da je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}}$ skalarni produkt na $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$. Ako $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^l)$ promatramo uz generiranu normu

$$\|\mathsf{z}\|_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}} = \|\mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathsf{z}\|_{\mathcal{L}}\,,$$

tada su (prema prethodnom teoremu) $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$ i $\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ omeđeni linearani operatori norme 1.

**Napomena.** Prirodno se postavlja pitanje odnosa dviju normi na $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)$, norme $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}}$ i one naslijeđene iz $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)$. Jednostavno se može vidjeti da za proizvoljan $\mathsf{z}\in\mathrm{H}^{\mathcal{L}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)$ vrijedi

$$\|\mathsf{z}\|_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^l)}\leq\|\mathcal{T}_{\mathcal{L}}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega;\mathbf{C}^r);\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^l))}\cdot\|\mathsf{z}\|_{\mathcal{T}_{\mathcal{L}}}\,.$$

∎

Sada ćemo dati nešto drugačiji opis prostora $\operatorname{Im}\mathcal{E}_{\mathcal{L}}$: neka je $\mathcal{O}:\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega;\mathbf{C}^r)\longrightarrow\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)$ operator definiran formulom

$$\mathcal{O}\mathsf{v}:=\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}\mathsf{v}+\mathsf{v}\,,$$

te označimo

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^{\mathcal{L},\mathcal{O}}(\Omega;\mathbf{C}^r):=&\{\mathsf{v}\in\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)\ :\ \mathcal{L}\mathsf{v}\in\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)\quad\&\quad\mathcal{O}\mathsf{v}\in\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)\}\\=&\{\mathsf{v}\in\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega;\mathbf{C}^r)\ :\ \mathcal{O}\mathsf{v}\in\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)\}\subseteq\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega;\mathbf{C}^r)\,.\end{aligned}$$

Kako je $\mathcal{L}(\mathrm{H}^{\mathcal{L},\mathcal{O}}(\Omega;\mathbf{C}^r))\subseteq\mathrm{H}^{\tilde{\mathcal{L}}}(\Omega;\mathbf{C}^l)$, to ima smisla promatrati operator

$$\mathcal{T}_{\mathcal{L},\mathcal{O}}:\mathrm{H}^{\mathcal{L},\mathcal{O}}(\Omega;\mathbf{C}^r)\longrightarrow\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)\,,\qquad\mathcal{T}_{\mathcal{L},\mathcal{O}}:=-\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}\circ\mathcal{L}\,,$$

gdje je

$$\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}:\mathrm{H}^{\tilde{\mathcal{L}}}(\Omega;\mathbf{C}^l)\longrightarrow\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)$$

operator traga definiran analogno kao i $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}$: za $\mathsf{v}\in\mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^l)$ je $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}\mathsf{v}$ neprekinut antilinearan funkcional na $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)$, zadan s

$${}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\,\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}\mathsf{v},\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}:=\langle\,\tilde{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{\nu}}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v}\mid\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\,,\qquad\mathsf{w}\in\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)\,,$$

gdje je $\tilde{\mathbf{A}}_{\boldsymbol{\nu}}:=-\sum_{k=1}^d\nu_k\mathbf{A}_k^*=-\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^*\in\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega;\mathrm{M}_{r,l})$. Dalje $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}\mathsf{v}$ proširujemo po neprekinutosti na cijeli $\mathrm{H}^{\tilde{\mathcal{L}}}(\Omega;\mathbf{C}^l)$. Kao i prije, za $\mathsf{v}\in\mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^l)$ i $\mathsf{w}\in\mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^r)$ je

$$\langle\,\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}\mid\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)}-\langle\,\mathsf{v}\mid\mathcal{L}\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)}=\langle\,-\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^*\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v}\mid\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\,.$$

Ako $\mathsf{v}\in\mathrm{H}^{\tilde{\mathcal{L}}}(\Omega;\mathbf{C}^l)$ aproksimiramo funkcijama iz $\mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^l)$, dobivamo da vrijedi

$$\langle\,\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v}\mid\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)}-\langle\,\mathsf{v}\mid\mathcal{L}\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)}={}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\,\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}\mathsf{v},\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\,.$$

Ukoliko sada uzmemo $\mathsf{v}\in\mathrm{H}^{\mathcal{L},\mathcal{O}}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ (što povlači $\mathcal{L}\mathsf{v}\in\mathrm{H}^{\tilde{\mathcal{L}}}(\Omega;\mathbf{C}^l)$) i u gornjoj formuli zamijenimo $\mathsf{v}$ s $-\mathcal{L}\mathsf{v}$, dobivamo

$$\begin{aligned}{}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\,\mathcal{T}_{\mathcal{L},\mathcal{O}}\mathsf{v},\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}&={}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\,-\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}\mathcal{L}\mathsf{v},\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\\&=-\langle\,\tilde{\mathcal{L}}\mathcal{L}\mathsf{v}\mid\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)}+\langle\,\mathcal{L}\mathsf{v}\mid\mathcal{L}\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)}\\&=\langle\,\mathsf{v}\mid\mathsf{w}\,\rangle_{\mathcal{L}}-\langle\,\mathcal{O}\mathsf{v}\mid\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)}\,,\end{aligned}$$

za $\mathsf{w}\in\mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{C}^r)$.

**Lema 5.** *Za* $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *i* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *vrijedi*

$$ {}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\, \mathcal{O}\mathsf{v}, \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)} = \langle\, \mathsf{v} \mid \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathcal{L}} \,. $$

Dem. Prema Lemi 4 za $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^l)$ i $\boldsymbol{\varphi}$ kao gore je

$$ {}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\, \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{u}, \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)} = \langle\, \mathsf{u} \mid \mathcal{L}\boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} \,, $$

pa ako za $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ u gornjoj jednakosti stavimo $\mathsf{u} = \mathcal{L}\mathsf{v}$, te s obje strane jednakosti dodamo

$$ {}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\, \mathsf{v}, \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)} = \langle\, \mathsf{v} \mid \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} \,, $$

dobivamo traženu tvrdnju.

**Q.E.D.**

**Teorem 9.**

$$ \mathrm{Im}\, \mathcal{E}_{\mathcal{L}} = \mathrm{Ker}\, \mathcal{O} = \{\mathsf{v} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L},\mathcal{O}}(\Omega; \mathbf{C}^r) : \mathcal{O}\mathsf{v} = \mathsf{0}\} \,. $$

Dem. Najprije uočimo da je zaista $\mathrm{Ker}\, \mathcal{O} = \{\mathsf{v} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L},\mathcal{O}}(\Omega; \mathbf{C}^r) : \mathcal{O}\mathsf{v} = \mathsf{0}\}$, jer ako za $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ vrijedi $\mathcal{O}\mathsf{v} = \mathsf{0} \in \mathrm{L}^2$, tada je i $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L},\mathcal{O}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$.

Ako je $\mathsf{v} \in \mathrm{Im}\, \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$, onda je prema prethodnoj lemi

$$ {}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\, \mathcal{O}\mathsf{v}, \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)} = 0 \,, $$

za $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, pa slijedi $\mathcal{O}\mathsf{v} = \mathsf{0}$.

Pretpostavimo sada da je $\mathsf{v} \in \mathrm{Ker}\, \mathcal{O}$, te označimo $\mathsf{u} = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}\mathcal{T}_{\mathcal{L}}\mathsf{v} \in \mathrm{Im}\, \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$ (tako da je $\mathcal{T}_{\mathcal{L}}(\mathsf{u} - \mathsf{v}) = \mathsf{0}$, odnosno $\mathsf{u} - \mathsf{v} \in \mathrm{H}_0^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$). Tada je i $\mathcal{O}(\mathsf{u} - \mathsf{v}) = \mathcal{O}\mathsf{u} - \mathcal{O}\mathsf{v} = \mathsf{0}$, pa slično kao prije dobivamo

$$ \langle\, \mathsf{u} - \mathsf{v} \mid \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathcal{L}} = 0 \,, \qquad \boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r) \,. $$

Kako je $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{C}^r)$ gusto u $\mathrm{H}_0^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, to slijedi da je $\mathsf{u} - \mathsf{v} = \mathsf{0}$, odnosno $\mathsf{v} = \mathsf{u} \in \mathrm{Im}\, \mathcal{E}_{\mathcal{L}}$.

**Q.E.D.**

Rezultat analogan Teoremu 9 može se pokazati i za operator $\tilde{\mathcal{L}}$. Preciznije, ako je

$$ \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{L}}} := \mathcal{L}\tilde{\mathcal{L}} + \mathcal{I} \,, $$

onda je

$$ \mathrm{Im}\, \mathcal{E}_{\tilde{\mathcal{L}}} = \mathrm{Ker}\, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{L}}} = \{\mathsf{v} \in \mathrm{H}^{\tilde{\mathcal{L}},\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{L}}}}(\Omega; \mathbf{C}^l) : \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{L}}}\mathsf{v} = \mathsf{0}\} \,. $$

## Primjeri

Pogledajmo sada kako izgledaju operator i prostor traga za poznatije diferencijalne operatore prvog reda: gradijent, divergenciju i rotaciju.

**Primjer 4.** Već smo vidjeli da je $\mathrm{H}^{\nabla}(\Omega) = \mathrm{H}^1(\Omega)$. Budući da je na $\mathrm{H}^1(\Omega)$ definiran surjektivan operator traga $\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} : \mathrm{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, postavlja se pitanje odnosa između operatora $\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}$ i $\mathcal{T}_{\nabla} : \mathrm{H}^{\nabla}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{H}_{\mathcal{T}}^{\nabla}(\partial\Omega; \mathbf{C}^d) \leq \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^d)$. Kako je u ovom primjeru $\mathbf{A}_k(\mathbf{x}) = \mathsf{e}_k$, $k \in 1..d$, to je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{k=1}^d \nu_k \mathbf{A}_k = \boldsymbol{\nu}$, pa iz definicije $\mathcal{T}_{\nabla}$ i Teorema 6 slijedi da za $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ i $\mathsf{z} \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^d)$ vrijedi

$$ {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^d)}\big\langle\, \mathcal{T}_{\nabla} u, \mathsf{z} \,\big\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^d)} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^d)}\big\langle\, \boldsymbol{\nu}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} u, \mathsf{z} \,\big\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^d)} \,, $$

odnosno

$$ \mathcal{T}_{\nabla} = \boldsymbol{\nu}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} \in \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^d) \,. $$

Budući da je $\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}$ surjektivan, to je i

$$ \mathrm{Im}\, \mathcal{T}_{\nabla} = \mathrm{H}_{\mathcal{T}}^{\nabla}(\partial\Omega; \mathbf{C}^d) = \{\boldsymbol{\nu} v : v \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\} = \boldsymbol{\nu}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) < \mathrm{L}^2(\partial\Omega; \mathbf{C}^d) \,. $$

∎

**Primjer 5.** Ako je $\mathcal{L}\mathsf{u} = \operatorname{div}\mathsf{u}$, onda se lako provjeri da je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu}^\top$, pa je za funkcije iz $\mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega)$ definiran *normalni trag* $\mathcal{T}_{\mathsf{div}}$, koji je za $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^d)$ i $z \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dan formulom

$$ {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathsf{div}}\, \mathsf{u}, z \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u}, z \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} , $$

te proširen po gustoći do neprekinutog linearnog operatora na $\mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega)$. Poznato je i da je njegova slika $\mathrm{H}^{\mathsf{div}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega)$ jednaka cijelom prostoru $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ (za dokaz vidi [DL, IX.1.2]). Dakle, $\mathcal{T}_{\mathsf{div}} : \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ je surjekcija.

∎

**Primjer 6.** Uzmemo li $d = 3$ i $\mathcal{L}\mathsf{u} = \operatorname{rot}\mathsf{u}$, onda iz

$$ \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_3(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, $$

slijedi da je

$$ \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} 0 & -\nu_3 & \nu_2 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 \end{bmatrix}, $$

pa se lako provjeri da je

$$ (\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{C}^3) \qquad \mathbf{A}_{\nu}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\xi} . $$

Stoga je za funkcije iz $\mathrm{L}^2_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ definiran *tangencijalni trag* $\mathcal{T}_{\mathsf{rot}}$, koji je za $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^3)$ i $\mathsf{z} \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^3)$ dan formulom

$$ {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^3)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathsf{rot}}\, \mathsf{u}, \mathsf{z} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^3)} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^3)}\langle\, \boldsymbol{\nu} \times \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{u}, \mathsf{z} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^3)} , $$

te proširen po gustoći do neprekinutog linearnog operatora na $\mathrm{L}^2_{\mathrm{rot}}(\Omega)$. Sama karakterizacija tragova funkcija iz $\mathrm{L}^2_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ je nešto kompliciranija (za detalje vidi [Ta3]):

$$ \mathrm{H}^{\mathsf{rot}}_{\mathcal{T}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^3) = \Big\{ \mathsf{v} \in \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^3) \,:\, (\exists\, \eta \in \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))\, (\forall\, \varphi \in \mathrm{H}^2(\Omega)) \\ {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^3)}\langle\, \mathsf{v}, \nabla\varphi \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^3)} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \eta, \varphi \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \Big\} $$

∎

## 3. Dualni prostor

O uvom odjeljku ćemo pobliže opisati duale prostora $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ i $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}_0(\Omega; \mathbf{C}^r)$. Pokazat će se da i ovdje vrijede slični rezultati kao i za klasične Soboljevljeve prostore. U čitavom odjeljku pretpostavljamo da je $p \in \langle 1, \infty\rangle$, te da $\Omega$ ima Lipschitzov rub.

**Teorem 10.** *Za svaki* $S \in \mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)'$ *postoje* $\mathsf{w}_1 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ *i* $\mathsf{w}_2 \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbf{C}^l)$, *takvi da je*

$$ (8) \qquad (\forall\, \mathsf{v} \in \mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega; \mathbf{C}^r)) \qquad S\mathsf{v} = \int_\Omega \mathsf{w}_1 \cdot \bar{\mathsf{v}}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathsf{w}_2 \cdot \overline{\mathcal{L}\mathsf{v}}\, d\mathbf{x} . $$

*Ukoliko s* $V_S$ *označimo skup svih* $(\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2) \in \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbf{C}^r) \times \mathrm{L}^{p'}(\Omega; \mathbf{C}^l)$ *za koje vrijedi gornji izraz, tada postoji jedinstveni* $\tilde{\mathsf{w}} \in V_S$ *takav da je*

$$ \|S\|_{\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'} = \|\tilde{\mathsf{w}}\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)} = \inf\{\|\mathsf{w}\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)} : \mathsf{w} \in V_S\} . $$

Dem. Na početku poglavlja smo konstatirali da je $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ izometrički izomorfan potprostoru $\Gamma_{\mathcal{L}}$ prostora $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)$. Stoga element $S$ duala prostora $\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ možemo shvatiti kao neprekinut antilinearan funkcional na $\Gamma_{\mathcal{L}}$. Prema Hahn-Banachovom teoremu u (uniformno konveksnom) Banachovom prostoru postoji (jedinstveno) neprekinuto i antilinearno proširenje funkcionala $S$ na cijeli $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)$ koje je iste norme kao i $S$. Označimo to proširenje s $\tilde{\mathsf{w}}=(\tilde{\mathsf{w}}_1,\tilde{\mathsf{w}}_2)\in\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)$. Jasno je da je $\tilde{\mathsf{w}}\in V_S$, a kako je svaki $\mathsf{w}\in V_S$ proširenje funkcionala $S$ sa $\Gamma_{\mathcal{L}}$ na $\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^l)$, to je i

$$\|S\|_{\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'}\le\|\mathsf{w}\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)}\,,$$

pa slijedi

$$\|S\|_{\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'}=\|\tilde{\mathsf{w}}\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)}=\inf\{\|\mathsf{w}\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)}:\mathsf{w}\in V_S\}\,.$$

**Q.E.D.**

**Teorem 11.** *Označimo s $U$ vektorski prostor svih distribucija $T\in\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)$ za koje postoje $\mathsf{w}_1\in\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ i $\mathsf{w}_2\in\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)$, takvi da je*

$$T=\mathsf{w}_1+\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{w}_2\,.$$

*Tada vrijedi:*

*a)*

$$(\forall\,S\in\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)')\,(\exists!\,T\in U)\qquad T=S_{|\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)}\,.$$

*Ako je $\tilde{\mathsf{w}}$ kao u prethodnom teoremu, onda je $T=\tilde{\mathsf{w}}_1+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathsf{w}}_2$.*

*b) $\mathrm{W}_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'$ je izometrički izomorfan prostoru $U$, uz normu na $U$ definiranu s*

$$\|T\|_U=\inf\Big\{\|(\mathsf{w}_1,\mathsf{w}_2)\|_{\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)}:(\mathsf{w}_1,\mathsf{w}_2)\in\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times\mathrm{L}^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)\ \ \&\ \ T=\mathsf{w}_1+\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{w}_2\Big\}\,.$$

Dem. **a)** Za dani $S\in\mathrm{W}^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'$ neka je $\tilde{\mathsf{w}}$ kao u prethodnom teoremu. Tada za $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ (prema Lemi 4) vrijedi

$$\begin{aligned}S\boldsymbol{\varphi}&=\int_\Omega\tilde{\mathsf{w}}_1\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,d\mathbf{x}+\int_\Omega\tilde{\mathsf{w}}_2\cdot\overline{\mathcal{L}\boldsymbol{\varphi}}\,d\mathbf{x}\\&=\int_\Omega\tilde{\mathsf{w}}_1\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,d\mathbf{x}+{}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\,\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathsf{w}}_2,\boldsymbol{\varphi}\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)}\\&={}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\,\tilde{\mathsf{w}}_1+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathsf{w}}_2,\boldsymbol{\varphi}\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)}\,,\end{aligned}$$

što povlači $S_{|\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)}=T:=\tilde{\mathsf{w}}_1+\tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathsf{w}}_2\in U$, i takav $T$ je očito jedinstven (i u $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)$).

**b)** Za $T=\mathsf{w}_1+\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{w}_2\in U$ i $\boldsymbol{\varphi}\in\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ (zbog Leme 4) vrijedi

$${}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\,T,\boldsymbol{\varphi}\,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)}=\int_\Omega\mathsf{w}_1\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,d\mathbf{x}+\int_\Omega\mathsf{w}_2\cdot\overline{\mathcal{L}\boldsymbol{\varphi}}\,d\mathbf{x}\,,$$

pa korištenjem Hölderove nejednakosti (prvo za $L^p$–normu, a onda za $p$–normu na $\mathbf{R}^2$) dobivamo

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad \left|{}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle T, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)}\right| &\leq \|\mathsf{w}_1\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L^p(\Omega;\mathbf{C}^r)} + \|\mathsf{w}_2\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)}\|\mathcal{L}\boldsymbol{\varphi}\|_{L^p(\Omega;\mathbf{C}^l)} \\
&\leq \|(\mathsf{w}_1,\mathsf{w}_2)\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathcal{L},p}\,.
\end{aligned}
$$

To povlači da je $T$ neprekinut na $\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)$ u $\|\cdot\|_{\mathcal{L},p}$ normi, pa ga na jedinstven način možemo proširiti do neprekinutog antilinearnog funkcionala $T_p$ na $W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)$. Stoga je dobro definirano preslikavanje $f : U \longrightarrow W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'$ s

$$
f(T) := T_p\,,
$$

koje je očito linearna injekcija. Pokažimo da je $f$ i surjekcija: za dani $S_0 \in W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'$, prema Hahn-Banachovom teoremu u uniformno konveksnom prostoru, postoji jedinstven $S \in W^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'$ koji zadovoljava

$$
S\big|_{W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)} = S_0 \qquad \text{i} \qquad \|S\|_{W^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'} = \|S_0\|_{W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'}\,.
$$

Neka su $\tilde{\mathsf{w}} = (\mathsf{w}_1,\mathsf{w}_2) \in L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)$ i $V_S$ kao u prethodnom teoremu. Tada se upotrebom Leme 4 lako provjeri da je $f(T) = S_0$ za $T = \tilde{\mathsf{w}}_1 + \tilde{\mathcal{L}}\tilde{\mathsf{w}}_2$, pa slijedi da je $f$ surjekcija.

Za dani $T \in U$ označimo

$$
U_T := \{(\mathsf{w}_1,\mathsf{w}_2) \in L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l) : T = \mathsf{w}_1 + \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{w}_2\}\,,
$$

$S_0 = f(T)$, te $S$, $\tilde{\mathsf{w}}$ i $V_S$ kao gore. Tada za $\mathsf{w} \in V_S$ i $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)$, slično kao prije, vrijedi

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle T, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)} &= S\boldsymbol{\varphi} = \int_\Omega \mathsf{w}_1\cdot\overline{\boldsymbol{\varphi}}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathsf{w}_2\cdot\overline{\mathcal{L}\boldsymbol{\varphi}}\,d\mathbf{x} \\
&= {}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle \mathsf{w}_1 + \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{w}_2, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)}\,,
\end{aligned}
$$

pa slijedi da je $V_S \subseteq U_T$. Stoga je i

$$
\begin{aligned}
\|f(T)\|_{W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'} = \|S\|_{W^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'} &= \min\{\|\mathsf{w}\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)} : \mathsf{w} \in V_S\} \\
&\geq \inf\{\|\mathsf{w}\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)} : \mathsf{w} \in U_T\}\,.
\end{aligned}
$$

S druge strane je zbog (9)

$$
(\forall\,\mathsf{w} \in U_T) \quad \|f(T)\|_{W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'} \leq \|\mathsf{w}\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)}\,,
$$

odnosno

$$
\|f(T)\|_{W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'} \leq \inf\{\|\mathsf{w}\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)} : \mathsf{w} \in U_T\}\,,
$$

pa uzimajući u obzir da je $\tilde{\mathsf{w}} \in U_T$ slijedi

$$
\|f(T)\|_{W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'} = \min\{\|\mathsf{w}\|_{L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^r)\times L^{p'}(\Omega;\mathbf{C}^l)} : \mathsf{w} \in U_T\} = \|T\|_U\,.
$$

Budući da je $f : U \longrightarrow W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'$ linearna bijekcija, te $W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'$ Banachov prostor, to slijedi da je $\|\cdot\|_U$ zaista norma na $U$, uz koju je $U$ Banachov prostor, te je tada $f$ izometrija s $U$ na $W_0^{\mathcal{L},p}(\Omega;\mathbf{C}^r)'$.

**Q.E.D.**

Pokušajmo sada bolje opisati skup $V_S$ iz Teorema 10. Promatrat ćemo samo slučaj $p = 2$, premda analogan rezultat vrijedi i za općeniti $p \in \langle 1, \infty \rangle$ (vidi [J, str. 60]).

**Teorem 12.** *Skup $V_S$ iz Teorema 10 jednak je zatvorenom afinom prostoru*

$$A := \tilde{\mathsf{w}} + \{(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2) \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r) \times \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^l) : \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}\mathsf{u}_2 = \mathsf{0} \quad \& \quad \mathsf{u}_1 = -\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{u}_2\} .$$

Dem. Neka je $\mathsf{w} = (\mathsf{w}_1, \mathsf{w}_2) \in V_S$, te $\tilde{\mathsf{w}} = (\tilde{\mathsf{w}}_1, \tilde{\mathsf{w}}_2)$ kao u Teoremu 10. Tada za $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ vrijedi

$$\langle\, \mathsf{w}_1 - \tilde{\mathsf{w}}_1 \mid \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} + \langle\, \mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2 \mid \mathcal{L}\boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} = 0 ,$$

pa je

$${}_{\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\, \tilde{\mathcal{L}}(\mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2), \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{C}^r)} = \langle\, \mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2 \mid \mathcal{L}\boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} = -\langle\, \mathsf{w}_1 - \tilde{\mathsf{w}}_1 \mid \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} ,$$

što povlači $\tilde{\mathcal{L}}(\mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2) = -(\mathsf{w}_1 - \tilde{\mathsf{w}}_1) \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r)$, odnosno $\mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2 \in \mathrm{H}^{\tilde{\mathcal{L}}}(\Omega; \mathbf{C}^l)$. Nadalje, za $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r)$ vrijedi

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\, \mathsf{w}_1 - \tilde{\mathsf{w}}_1 \mid \mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} + \langle\, \mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2 \mid \mathcal{L}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} \\ &= -\langle\, \tilde{\mathcal{L}}(\mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2) \mid \mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} + \langle\, \mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2 \mid \mathcal{L}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} \\ &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\, \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}(\mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2), \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)} , \end{aligned}$$

pa slijedi da je $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}(\mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2) = \mathsf{0}$, odnosno $\mathsf{w} \in A$.

Obratno, za $\mathsf{w} \in A$ i $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r)$ je

$$\begin{aligned} &\langle\, \mathsf{w}_1 - \tilde{\mathsf{w}}_1 \mid \mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} + \langle\, \mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2 \mid \mathcal{L}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} \\ &\qquad = -\langle\, \tilde{\mathcal{L}}(\mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2) \mid \mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^r)} + \langle\, \mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2 \mid \mathcal{L}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{C}^l)} \\ &\qquad = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)}\langle\, \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}(\mathsf{w}_2 - \tilde{\mathsf{w}}_2), \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)} = 0 , \end{aligned}$$

a kako je $\mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r)$ gusto u $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, to gornja tvrdnja vrijedi i za $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, što povlači $\mathsf{w} \in V_S$.

Da bismo vidjeli da je $A$ zatvoren u $\mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r) \times \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^l)$, dovoljno je primijetiti da je

$$A = \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r) \times \mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}^{\leftarrow}(\mathsf{0}) \;\cap\; \{(\mathsf{u}_1, \mathsf{u}_2) \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^r) \times \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{C}^l) : \mathsf{u}_1 = -\tilde{\mathcal{L}}\mathsf{u}_2\} ,$$

te da su oba člana gornjeg presjeka zatvorena. Naime, prvi član je zatvoren, jer je $\mathcal{T}_{\tilde{\mathcal{L}}}$ neprekinut, a za drugi se zatvorenost pokaže analogno kao za $\Gamma_{\mathcal{L}}$ u dokazu Teorema 1.

**Q.E.D.**

# II. Friedrichsovi sustavi

# 1. Definicija i osnovni rezultati

Neka su $d, r \in \mathbf{N}$, te $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen skup s Lipschitzovim rubom. Nadalje, neka matrične funkcije $\mathbf{A}_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$, $k \in 1..d$, i $\mathbf{C} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ zadovoljavaju sljedeća svojstva:

(F1) $$\text{matrične funkcije } \mathbf{A}_k \text{ su simetrične: } \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^\top\,;$$

(F2) $$(\exists\, \mu_0 > 0) \quad \mathbf{C} + \mathbf{C}^\top + \sum_{k=1}^{d} \partial_k \mathbf{A}_k \geq 2\mu_0 \mathbf{I} \qquad (\text{ss na } \Omega)\,.$$

Tada se diferencijalni operator prvog reda $\mathcal{L} : \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{R}^r)$ dan formulom

$$\mathcal{L}\mathsf{u} := \sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{u}) + \mathbf{C}\mathsf{u}$$

naziva *Friedrichsov operator* ili *pozitivan simetričan operator.* Shodno tome se (za dani $\mathsf{f} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r)$) sustav parcijalnih diferencijalni jednadžbi

$$\mathcal{L}\mathsf{u} = \mathsf{f}$$

naziva *Friedrichsov sustav* ili *pozitivan simetričan sustav.* Takav sustav je prvi promatrao K. O. Friedrichs (vidi [Fr]) s ciljem dobivanja osnovnih rezultata (egzistencija, jedinstvenost,. . . ) za parcijalne diferencijalne jednadžbe mješovitog tipa (poput Tricomijeve). Kao što ćemo poslije vidjeti (potpoglavlje 5), mnoge jednadžbe i sustavi parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (različitog tipa) se mogu svesti na simetrične pozitivne sustave, te je velika prednost Friedrichsove teorije što nadilazi uvriježenu klasifikaciju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi na eliptičke, hiperboličke i paraboličke.

Friedrichs je predložio i praktičan način zadavanja rubnih uvjeta pomoću matričnog polja definiranog na rubu domene, koji omogućuje tretiranje različitih vrsta rubnih uvjeta (Dirichletov, Neumannov, Robinov – pogledati primjere niže). Pokazuje se praktičnim to matrično polje pisati kao razliku dvaju polja $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}$, gdje je $\mathbf{M} \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ dano polje (za različite $\mathbf{M}$ dobivamo različite rubne uvjete), a $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ definirano kao u prvom poglavlju:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} := \sum_{k=1}^{d} \nu_k \mathbf{A}_k \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))\,,$$

pri čemu je $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_d)$ jedinična vanjska normala na $\partial\Omega$. Za matrično polje $\mathbf{M} : \partial\Omega \longrightarrow \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$ Friedrichs pretpostavlja sljedeća dva uvjeta: za skoro svaki $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ vrijedi

(FM1) $$(\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r) \quad \mathbf{M}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \geq 0\,,$$

(FM2) $$\mathbf{R}^r = \mathrm{Ker}\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x})\Big) + \mathrm{Ker}\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}(\mathbf{x})\Big)\,,$$

te takav $\mathbf{M}$ naziva *dopustivim rubnim uvjetom.* Tada promatra sljedeću zadaću: za dani $\mathsf{f} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r)$ naći $\mathsf{u}$ koji zadovoljava

$$\begin{cases} \mathcal{L}\mathsf{u} = \mathsf{f} \\ (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})\mathsf{u}_{|_{\partial\Omega}} = 0 \end{cases}.$$

Također pokazuje jedinstvenost glatkog ($C^1$) rješenja (uz pretpostavku (FM1), ali već se definicija slabog rješenja pokazuje problematičnom zbog nejasnog značenja pojma traga za funkcije iz prostora grafa. Mnogi autori su kasnije pokušali dati zadovoljavajući smisao pojmu slabog rješenja, te dobili odgovarajuće rezultate (jedinstvenost, egzistencija, dobra postavljenost, regularnost rješenja), uz neke dodatne pretpostavke. Između ostalog, pokazuje se potrebno zahtijevati određenu regularnost u rastavu (FM2), što se može lijepo iskazati ukoliko se rastav u (FM2) prikaže koristeći projekcije na $\mathbf{R}^r$.

**Definicija.** Dvije matrice $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ iz $\mathrm{M}_r(\mathbf{R})$ nazivamo *parom projekcija* ukoliko vrijedi

$$\mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{I} \qquad \text{i} \qquad \mathbf{PQ}=\mathbf{QP}=\mathbf{0}\,.$$

∎

**Lema 1.** *Dvije matrice* $\mathbf{A}_+, \mathbf{A}_- \in \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$ *zadovoljavaju* $\operatorname{Ker}\mathbf{A}_+ + \operatorname{Ker}\mathbf{A}_- = \mathbf{R}^r$ *ako i samo ako postoji par projekcija* $\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_- \in \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$, *takvih da je*

$$\mathbf{A}_+ = (\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-)\mathbf{P}_+ \qquad i \qquad \mathbf{A}_- = (\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-)\mathbf{P}_-\,.$$

*Štoviše, za svaki takav par projekcija vrijedi* $\operatorname{Im}\mathbf{P}_+ \subseteq \operatorname{Ker}\mathbf{A}_-$ *i* $\operatorname{Im}\mathbf{P}_- \subseteq \operatorname{Ker}\mathbf{A}_+$.

Dem. Pretpostavimo da postoji par projekcija za koje vrijedi gornja tvrdnja. Tada za $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r$ vrijedi $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{I}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{P}_+\boldsymbol{\xi} + \mathbf{P}_-\boldsymbol{\xi}$, te je

$$\mathbf{P}_+\boldsymbol{\xi} \in \operatorname{Ker}\mathbf{P}_- \subseteq \operatorname{Ker}\mathbf{A}_- \qquad \text{i} \qquad \mathbf{P}_-\boldsymbol{\xi} \in \operatorname{Ker}\mathbf{P}_+ \subseteq \operatorname{Ker}\mathbf{A}_+\,,$$

pa slijedi jedna implikacija.

Neka je sada $\operatorname{Ker}\mathbf{A}_+ + \operatorname{Ker}\mathbf{A}_- = \mathbf{R}^r$. Tada postoji par projekcija $\mathbf{P}_+, \mathbf{P}_-$, takvih da je $\operatorname{Im}\mathbf{P}_+ \subseteq \operatorname{Ker}\mathbf{A}_-$ i $\operatorname{Im}\mathbf{P}_- \subseteq \operatorname{Ker}\mathbf{A}_+$. Tada je i

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-)\mathbf{P}_+ &= \mathbf{A}_+\mathbf{P}_+ = \mathbf{A}_+(\mathbf{I}-\mathbf{P}_-) = \mathbf{A}_+\,,\\ (\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-)\mathbf{P}_- &= \mathbf{A}_-\mathbf{P}_- = \mathbf{A}_-(\mathbf{I}-\mathbf{P}_+) = \mathbf{A}_-\,,\end{aligned}$$

čime je dokazana i druga implikacija.

**Q.E.D.**

Direktna posljedica gornje leme je sljedeći rezultat.

**Lema 2.** *Matrična funkcija* $\mathbf{M}$ *zadovoljava (FM2) ako i samo ako za skoro svaki* $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ *postoji par projekcija* $\mathbf{P}_+(\mathbf{x})$, $\mathbf{P}_-(\mathbf{x})$, *takvih da je*

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\mathbf{P}_+(\mathbf{x}) \qquad i \qquad (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\mathbf{P}_-(\mathbf{x})\,.$$

∎

Pokažimo sada da je transponirani rubni uvjet dopustivog rubnog uvjeta također dopustivi rubni uvjet. To je već Friedrichs uočio, a omogućuje još jednu korisnu karakterizaciju uvjeta (FM2). Da bismo to dokazali, potrebno nam je nekoliko tehničkih rezultata. Najprije uočimo da je (FM1) ekvivalentno s

$$(\forall\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r) \quad \Big(\mathbf{M}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}^\top(\mathbf{x})\Big)\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \geq 0 \qquad (\text{ss } \mathbf{x} \in \partial\Omega)\,,$$

odnosno s

$$(\forall\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r) \quad \mathbf{M}^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \geq 0 \qquad (\text{ss } \mathbf{x} \in \partial\Omega)\,.$$

Ta tvrdnja trivijalno slijedi iz činjenice da je realna matrica $\mathbf{M}$ pozitivno semidefinitna ako i samo ako je njezin simetrični dio pozitivno semidefinitan, odnosno ako i samo ako je njezina transponirana matrica pozitivno semidefinitna, što pak trivijalno slijedi iz

$$(\mathbf{M}+\mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} = 2\mathbf{M}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} = 2\mathbf{M}^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}\,.$$

**Lema 3.** *Ako je matrica* $\mathbf{M} \in \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$ *pozitivno semidefinitna, onda je* $\operatorname{Ker}\mathbf{M} = \operatorname{Ker}\mathbf{M}^\top$.

Dem. Budući da je $\mathbf{M}+\mathbf{M}^\top$ simetrična i pozitivno semidefinitna, to za svaki $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r$ vrijedi

$$0 \leq (\mathbf{M}+\mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{M}+\mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi} \leq \lambda_M \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{M}+\mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi} = 2\lambda_M \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}\,,$$

gdje je $\lambda_M$ najveća svojstvena vrijednost matrice $\mathbf{M}+\mathbf{M}^\top$. Posebno, za $\boldsymbol{\xi} \in \operatorname{Ker}\mathbf{M}$ dobivamo

$$0 \leq (\mathbf{M}+\mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{M}+\mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi} \leq 0\,,$$

odnosno $(\mathbf{M}+\mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$, pa slijedi i $\mathbf{M}^\top\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$. Analogno se dokaže i $\operatorname{Ker}\mathbf{M} \supseteq \operatorname{Ker}\mathbf{M}^\top$.

**Q.E.D.**

**Lema 4.** *Neka vrijedi (FM2) i* $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$ *za neki* $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r$. *Tada je* $(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$, *pa i* $\mathbf{M}^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$.

Dem. Za $\mathbf{P}_-$ kao u Lemi 2 vrijedi

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = \Big(2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\mathbf{P}_-(\mathbf{x})\Big)^\top \boldsymbol{\xi} = 2\mathbf{P}_-^\top(\mathbf{x})\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = 0\,.$$

Analogno se pokaže i $(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$, odakle onda $\mathbf{M}^\top(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$ trivijalno slijedi.

**Q.E.D.**

**Napomena.** Dokazi gornjih dviju lema su preuzeti iz [Fr], a može se pokazati da vrijedi i više: $\operatorname{Ker}\mathbf{M} = \operatorname{Ker}\mathbf{M}^\top = \operatorname{Ker}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$, dok je dokaz analogan onome za operatore u Lemi 11 niže.

∎

**Teorem 1.** *Ako je zadovoljeno (FM1)–(FM2), onda za skoro svaki* $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ *vrijedi i*

(*FM3*)
$$\operatorname{Im}\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x})\Big) \cap \operatorname{Im}\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}(\mathbf{x})\Big) = \{\mathsf{0}\}\,.$$

Dem. Dokaz provodimo za fiksan $\mathbf{x}$, kojeg radi jednostavnosti ispuštamo u daljnjem pisanju. Neka je $\mathbf{w} \in \operatorname{Im}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M}) \cap \operatorname{Im}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})$. Tada je $\mathbf{w} = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})\boldsymbol{\xi}_- = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})\boldsymbol{\xi}_+$, za neke $\boldsymbol{\xi}_-, \boldsymbol{\xi}_+ \in \mathbf{R}^r$. Tada za $\mathbf{P}_-, \mathbf{P}_+$ kao u Lemi 2, te $\boldsymbol{\eta}_- := \mathbf{P}_-\boldsymbol{\xi}_-$, $\boldsymbol{\eta}_+ := \mathbf{P}_+\boldsymbol{\xi}_+$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})\boldsymbol{\xi}_- = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_-\boldsymbol{\xi}_- = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_-\mathbf{P}_-\boldsymbol{\xi}_- = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_-\boldsymbol{\eta}_- = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})\boldsymbol{\eta}_-\,,\\
\mathbf{w} &= (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})\boldsymbol{\xi}_+ = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_+\boldsymbol{\xi}_+ = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_+\mathbf{P}_+\boldsymbol{\xi}_+ = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_+\boldsymbol{\eta}_+ = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})\boldsymbol{\eta}_+\,.
\end{aligned}$$

Također je $\boldsymbol{\eta}_\pm \in \operatorname{Im}\mathbf{P}_\pm \subseteq \operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mp \mathbf{M})$, pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}_+ + \boldsymbol{\eta}_-) &= \frac{1}{2}\Big[(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M}) - (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})\Big](\boldsymbol{\eta}_+ + \boldsymbol{\eta}_-)\\
&= \frac{1}{2}\Big[(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})\boldsymbol{\eta}_+ - (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})\boldsymbol{\eta}_-\Big] = \frac{1}{2}(\mathsf{w}-\mathsf{w}) = 0\,,
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\boldsymbol{\eta}_+ - \boldsymbol{\eta}_-) &= \frac{1}{2}\Big[(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M}) + (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})\Big](\boldsymbol{\eta}_+ - \boldsymbol{\eta}_-)\\
&= \frac{1}{2}\Big[(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})\boldsymbol{\eta}_+ - (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})\boldsymbol{\eta}_-\Big] = \frac{1}{2}(\mathsf{w}-\mathsf{w}) = 0\,.
\end{aligned}$$

Lema 4 sada povlači $\mathbf{M}^\top(\boldsymbol{\eta}_+ - \boldsymbol{\eta}_-) = \mathsf{0}$, pa iz Leme 3 slijedi $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}_+ - \boldsymbol{\eta}_-) = \mathsf{0}$, što zajedno s $\mathbf{M}(\boldsymbol{\eta}_+ + \boldsymbol{\eta}_-) = \mathsf{0}$ daje $\mathbf{M}\boldsymbol{\eta}_+ = \mathbf{M}\boldsymbol{\eta}_- = \mathsf{0}$. Sada iz $(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})\boldsymbol{\eta}_- = \mathsf{0}$ slijedi $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\eta}_- = \mathsf{0}$, pa i $\mathsf{w} = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})\boldsymbol{\eta}_- = \mathsf{0}$, čime je teorem dokazan.

**Q.E.D.**

Koristeći prethodni teorem lako se može vidjeti da je i $\mathbf{M}^\top$ dopustiv rubni uvjet (uz pretpostavku da je $\mathbf{M}$ dopustiv rubni uvjet). Naime, kako za svaka dva potprostora $U$ i $V$ prostora $\mathbf{R}^r$ vrijedi $U + V = (U^\perp \cap V^\perp)^\perp$, a za svaku matricu $\mathbf{B} \in \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$ je $\mathrm{Im}\,\mathbf{B} = (\mathrm{Ker}\,\mathbf{B}^\top)^\perp$, to lako slijedi da je (FM3) ekvivalentno s

$$\text{(FM4)} \qquad \mathbf{R}^r = \mathrm{Ker}\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}^\top(\mathbf{x})\Big) + \mathrm{Ker}\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}^\top(\mathbf{x})\Big)\,.$$

Zamjenom uloga $\mathbf{M}$ i $\mathbf{M}^\top$ u gornjim razmatranjima se lako vidi da je (FM1)–(FM2) ekvivalentno s (FM1)–(FM4). Primjenom Leme 1 dobivamo sljedeći rezultat.

**Korolar 1.** *Neka matrična funkcija* $\mathbf{M}$ *zadovoljava (FM1). Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*
*a)* $\mathbf{M}$ *zadovoljava (FM2);*
*b) Za skoro svaki* $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ *postoji par projekcija* $\mathbf{P}_+(\mathbf{x})$, $\mathbf{P}_-(\mathbf{x})$, *takvih da je*

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\mathbf{P}_+(\mathbf{x}) \qquad i \qquad (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\mathbf{P}_-(\mathbf{x})\,;$$

*c) Za skoro svaki* $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ *postoji par projekcija* $\mathbf{Q}_+(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}_-(\mathbf{x})$, *takvih da je*

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{Q}_+(\mathbf{x})\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) \qquad i \qquad (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{Q}_-(\mathbf{x})\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\,.$$

Dem. Iz Leme 2 znamo da je (a) ekvivalentno s (b).

Ako vrijedi (a), tada vrijedi i (FM4), pa prema Lemi 1 postoji par projekcija $\mathbf{S}_+(\mathbf{x})$, $\mathbf{S}_-(\mathbf{x})$ (ss $\mathbf{x} \in \partial\Omega$), takvih da vrijedi

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}^\top)(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\mathbf{S}_+(\mathbf{x}) \qquad \text{i} \qquad (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}^\top)(\mathbf{x}) = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\mathbf{S}_-(\mathbf{x})\,.$$

Tada je i

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{S}_+^\top(\mathbf{x})\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) \qquad \text{i} \qquad (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{S}_-^\top(\mathbf{x})\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\,,$$

a kako je $\mathbf{Q}_+(\mathbf{x}) := \mathbf{S}_+^\top(\mathbf{x})$, $\mathbf{Q}_-(\mathbf{x}) := \mathbf{S}_-^\top(\mathbf{x})$ također par projekcija, to vrijedi (c).

Ako je ispunjeno (c), to prema Lemi 1 vrijedi i (FM4), pa slijedi (FM2).

**Q.E.D.**

### Različiti načini zadavanja rubnog uvjeta

Osim Friedrichsovih dopustivih rubnih uvjeta, u literaturi se mogu naći i drugi slični načini zadavanja rubnih uvjeta. Tako je primjerice P. Lax predložio promatranje *maksimalnih rubnih uvjeta*: za familiju $N = \{N(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \partial\Omega\}$ potprostora prostora $\mathbf{R}^r$ kažemo da je *maksimalan rubni uvjet* ukoliko je (za skoro svaki $\mathbf{x} \in \partial\Omega$) N($\mathbf{x}$) maksimalan nenegativan s obzirom na $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})$, odnosno ukoliko vrijedi

(FX1) $\quad N(\mathbf{x})$ je nenegativan s obzirom na $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})$: $\qquad (\forall\,\boldsymbol{\xi} \in N(\mathbf{x})) \quad \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \geq 0\,,$

(FX2)
ne postoji potprostor nenegativan s obzirom na $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})$, a da je pravi nadskup od $N(\mathbf{x})$.

**Napomena.** Može se lako provjeriti da je uvjet (FX2) ekvivalentan s tvrdnjom da je $\dim N(\mathbf{x})$ jednaka broju nenegativnih svojstvenih vrijednosti matrice $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})$.

Uočimo da $N$ možemo shvatiti i kao funkciju s $\partial\Omega$ u skup svih potprostora prostora $\mathbf{R}^r$ (što ćemo često i raditi).

∎

Sada promatramo zadaću

$$\begin{cases} \mathcal{L}\mathsf{u} = \mathsf{f} \\ \mathsf{u}(\mathbf{x}) \in N(\mathbf{x})\,, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \end{cases}.$$

Umjesto maksimalnih rubnih uvjeta u literaturi se mogu naći i nešto drugačiji uvjeti na gore definiranu familiju $N$ (vidi [PS]): neka $N(\mathbf{x})$ i $\tilde{N}(\mathbf{x}) := (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})N(\mathbf{x}))^\perp$ zadovoljavaju

(FV1) $N(\mathbf{x})$ je nenegativan s obzirom na $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})$: $\quad (\forall \boldsymbol{\xi} \in N(\mathbf{x})) \quad \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \geq 0\,,$
$\tilde{N}(\mathbf{x})$ je nepozitivan s obzirom na $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})$: $\quad (\forall \boldsymbol{\xi} \in \tilde{N}(\mathbf{x})) \quad \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \leq 0\,,$

(FV2) $$\tilde{N}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})N(\mathbf{x}))^\perp \quad \text{i} \quad N(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\tilde{N}(\mathbf{x}))^\perp\,,$$

za skoro svaki $\mathbf{x} \in \partial\Omega$. Prvi uvjet u (FV2) je zadovoljen prema definiciji $\tilde{N}$, te je tu stavljen zbog kasnije analogije s određenim uvjetima u apstraktnom slučaju (vidi sljedeće potpoglavlje).

U ovome potpoglavlju ćemo pokazati da su uvjeti (FM1)–(FM2), (FX1)–(FX2) i (FV1)–(FV2) međusobno ekvivalentni (precizan smisao je dan u sljedeća tri teorema). Pokažimo najprije da (FM1)–(FM2) povlači (FX1)–(FX2).

**Teorem 2.** *Neka matrično polje* $\mathbf{M} : \partial\Omega \longrightarrow \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$ *zadovoljava (FM1)–(FM2). Tada*

$$N(\mathbf{x}) := \mathrm{Ker}\,\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x})\Big)$$

*zadovoljava (FX1)–(FX2).*

Dem. U dokazu ispuštamo pisanje varijable $\mathbf{x}$. Na početku uočimo da iz (FM1) i definicije $N$ jednostavno slijedi (FX1). Dokaz tvrdnje (FX2) provodimo u nekoliko koraka.

**a)** Označimo $\tilde{N} := (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}N)^\perp$ i pokažimo najprije da je $\tilde{N} = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}^\top)$: za $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{N}$ je $\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v} = 0$ za svaki $\mathbf{v} \in N$, pa za proizvoljan $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^r$ vrijedi

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y} = (2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_+)^\top\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{y} = 2\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_+\mathbf{y} = 0\,,$$

jer je $\mathbf{P}_+\mathbf{y} \in N = \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})$ ($\mathbf{P}_+$ je kao u Lemi 2). Zbog proizvoljnosti $\mathbf{y}$ slijedi da je $(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi} = \mathsf{0}$.

Neka je sada $\boldsymbol{\xi} \in \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}^\top)$. Za $\mathbf{v} \in N$ je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v} = \mathbf{M}\mathbf{v}$, pa slijedi

$$\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi}\cdot(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})\mathbf{v} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{v} = 0\,,$$

odnosno $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{N}$.

**b)** Pokažimo da je $C^0 \cap N = C^0 \cap \tilde{N}$, gdje je

$$C^0 := \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r : \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} = 0\}\,.$$

Neka je $\mathbf{v} \in C^0 \cap N$. Za proizvoljne $\mathbf{z} \in N$ i $\lambda \in \mathbf{R}$ je i $\lambda\mathbf{v} + \mathbf{z} \in N$, pa iz (FM1) slijedi

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbf{M}(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{z})\cdot(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{z}) &= \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{z})\cdot(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{z}) \\ &= \underbrace{\lambda^2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}}_{0} + 2\lambda\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{z}\cdot\mathbf{z}}_{\geq 0}\,. \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti $\lambda \in \mathbf{R}$ slijedi da je $\mathbf{v}\cdot\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{z} = 0$, za $\mathbf{z} \in N$, što povlači $\mathbf{v} \in \tilde{N}$.

Neka je sada $\mathbf{v} \in C^0 \cap \tilde{N}$. Prema (a) je onda $\mathbf{M}^\top \mathbf{v} = -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v}$, pa za proizvoljne $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^r$ (koristeći (FM1)) dobivamo

$$\begin{aligned} 0 \leq \mathbf{M}(\lambda\mathbf{v} + \mathbf{z}) \cdot (\lambda\mathbf{v} + \mathbf{z}) &= \lambda^2 \mathbf{M}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \lambda\mathbf{M}\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} + \lambda\mathbf{M}\mathbf{z} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} \\ &= \lambda^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{M}^\top \mathbf{v} + \lambda\mathbf{M}\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} + \lambda\mathbf{z} \cdot \mathbf{M}^\top\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{z} \cdot \mathbf{z} \\ &= \lambda^2 \underbrace{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}_{0} + \lambda(\mathbf{M} - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}})\mathbf{v} \cdot \mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{M}\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}}_{\geq 0} . \end{aligned}$$

Zbog proizvoljnosti $\lambda$ i $\mathbf{z}$ slijedi $(\mathbf{M} - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}})\mathbf{v} = \mathsf{0}$, odnosno $\mathbf{v} \in N$.

**c)** Pretpostavimo da (FX2) ne vrijedi, odnosno da postoji $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{R}^r \setminus N$ takav da je potprostor $S := [\mathbf{v}_0] + N$ nenegativan s obzirom na $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$. Budući da je $\mathbf{v}_0 = \mathbf{P}_+\mathbf{v}_0 + \mathbf{P}_-\mathbf{v}_0$ (gdje su $\mathbf{P}_+$ i $\mathbf{P}_-$ kao u Lemi 2), te $\mathbf{P}_+\mathbf{v}_0 \in N$, to je dovoljno pokazati da je $\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \in N$ (tada bi bilo $\mathbf{v}_0 \in N$, a to je kontradikcija s pretpostavkom). Koristeći $\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0 - \mathbf{P}_+\mathbf{v}_0 \in S$, $\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \in \operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})$ i (FM1) dobivamo

$$0 \leq \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 = -\mathbf{M}\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \leq 0 ,$$

što povlači

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 = \mathbf{M}\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 = 0 ,$$

te posebno $\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \in C^0$.

Za proizvoljne $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^r$ je $\lambda\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 + \mathbf{P}_+\mathbf{v} \in S$, pa je

$$0 \leq \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\lambda\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 + \mathbf{P}_+\mathbf{v}) \cdot (\lambda\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 + \mathbf{P}_+\mathbf{v}) = 2\lambda\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_+\mathbf{v} + \underbrace{\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_+\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_+\mathbf{v}}_{\geq 0},$$

odakle slijedi $\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_+\mathbf{v} = 0$. To pak, zajedno s $2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}_+ = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}$ povlači

$$(\forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^r) \qquad (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}^\top)\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v} = 0 ,$$

odnosno $(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}^\top)\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0$. Prema (a) je onda $\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \in \tilde{N}$, a kako je i $\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \in C^0$, to iz (b) slijedi $\mathbf{P}_-\mathbf{v}_0 \in N$.

**Q.E.D.**

Pokažimo sada da (FX1)–(FX2) povlači (FV1)–(FV2) (i dalje ispuštamo varijablu $\mathbf{x}$ u zapisu).

**Teorem 3.** *Ako $N$ zadovoljava (FX1)–(FX2), onda $N$ i $\tilde{N} := (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}N)^\perp$ zadovoljavaju (FV1)–(FV2).*

Dem. **a)** Pokažimo najprije da je $\operatorname{Ker}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \subseteq N$: kada to ne bi bilo istina, onda bi postojao $\mathbf{y} \in \operatorname{Ker}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \setminus N$, pa bi za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{\xi} \in N$ vrijedilo

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\alpha\mathbf{y} + \beta\boldsymbol{\xi}) \cdot (\alpha\mathbf{y} + \beta\boldsymbol{\xi}) = \beta^2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \geq 0 ,$$

a što bi bila kontradikcija s maksimalnošću prostora $N$.

**b)** Pokažimo da vrijedi (FV1), odnosno da za svaki $\boldsymbol{\xi} \in \tilde{N}$ vrijedi $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \leq 0$: pretpostavimo suprotno, da postoji $\mathbf{y} \in \tilde{N}$ za koji je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} > 0$. Tada je očito $\mathbf{y} \notin N$, pa je $N \subset [\mathbf{y}] + N$. Budući da za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ i $\boldsymbol{\xi} \in N$ vrijedi

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\alpha\mathbf{y} + \beta\boldsymbol{\xi}) \cdot (\alpha\mathbf{y} + \beta\boldsymbol{\xi}) = \alpha^2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} + \underbrace{2\alpha\beta\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y}}_{0} + \beta^2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \geq 0 ,$$

to slijedi da je $[\mathbf{y}]+N$ nenegativan s obzirom na $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$, a što je kontradikcija s maksimalnošću prostora $N$.

**c)** Pokažimo da vrijedi (FV2), odnosno da je $N = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\tilde{N})^{\perp}$: ako je $\boldsymbol{\xi} \in N$, onda za svaki $\mathbf{y} \in \tilde{N}$ vrijedi $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y} = 0$. Kako je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y} = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{y}$, to slijedi da je $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\tilde{N})^{\perp}$ i jedna inkluzija je dokazana.

Ako je $\boldsymbol{\xi} \in (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\tilde{N})^{\perp}$, slično kao gore dobivamo da je

$$(\forall\, \mathbf{y} \in \tilde{N}) \qquad \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{y} = 0\,,$$

odnosno $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi} \in \tilde{N}^{\perp}$. Budući da je

$$\tilde{N}^{\perp} = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}N)^{\perp\perp} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}N\,,$$

to postoji $\mathbf{z} \in N$ takav da je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{z}$. Onda je $\boldsymbol{\xi} - \mathbf{z} \in \operatorname{Ker}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$, pa je prema (a) i $\boldsymbol{\xi} - \mathbf{z} \in N$, što povlači $\boldsymbol{\xi} \in N$ (jer je $\mathbf{z} \in N$) i time je dokazana i druga inkluzija.

**Q.E.D.**

Preostalo je još pokazati da iz (FV1)–(FV2) slijedi (FM1)–(FM2) (u smislu sljedećeg teorema).

**Teorem 4.** *Neka su $N$ i $\tilde{N}$ familije potprostora u $\mathbf{R}^r$ koje zadovoljavaju (FV1)–(FV2). Tada postoji matrična funkcija $\mathbf{M} : \partial\Omega \longrightarrow \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$ koja zadovoljava (FM1)–(FM2) i*

$$N(\mathbf{x}) := \operatorname{Ker}\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x})\Big) \quad i \quad \tilde{N}(\mathbf{x}) := \operatorname{Ker}\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}^{\top}(\mathbf{x})\Big)\,.$$

Dem. Dokaz provodimo za fiksan $\mathbf{x}$, kojeg ispuštamo u zapisu. Označimo s $O$ i $\tilde{O}$ ortogonalni komplement prostora $N \cap \tilde{N}$ u $N$, odnosno $\tilde{N}$ redom, te $S := (N + \tilde{N})^{\perp}$. Tada je

$$\mathbf{R}^r = O\dot{+}(N \cap \tilde{N})\dot{+}\tilde{O}\dot{+}S\,.$$

Definirajmo projektore (matrice) $\mathbf{P} : \mathbf{R}^r \longrightarrow N$ i $\mathbf{Q} : \mathbf{R}^r \longrightarrow \tilde{N}$ na sljedeći način: za dani $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r$ i rastav

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3 + \boldsymbol{\xi}_4$$

u skladu s gornjom direktnom sumom, je

$$\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2\,, \qquad \mathbf{Q}\boldsymbol{\xi} := \boldsymbol{\xi}_2 + \boldsymbol{\xi}_3\,.$$

Pokažimo sada da matrica

$$\mathbf{M} := (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^{\top})\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{Q}) - (\mathbf{P}^{\top} + \mathbf{Q}^{\top} - \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{P}^{\top})\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{I} - \mathbf{P})$$

zadovoljava tražene uvjete. Dokazujemo redom tvrdnje:

**a)** Vrijedi $\mathbf{Q}^{\top}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{P}^{\top}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$: zaista, za $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^r$ je

$$\mathbf{Q}^{\top}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}\mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}\mathbf{y} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{z} = 0\,,$$

(jer je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P}\mathbf{y} \in \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}N$ i $\mathbf{Q}\mathbf{z} \in \tilde{N}$, te vrijedi (FV2)), pa slijedi $\mathbf{Q}^{\top}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{P} = \mathbf{0}$. Analogno se pokaže i $\mathbf{P}^{\top}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

**b)** Pokažimo da vrijede sljedeće dvije tvrdnje:

$$\begin{aligned}
&(\forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^r) \qquad \mathbf{Q}^{\top}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{y} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{y} \in N\,,\\
&(\forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^r) \qquad \mathbf{P}^{\top}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{y} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{y} \in \tilde{N}\,.
\end{aligned}$$

Za $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^r$ proizvoljan, i $\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{y} = 0$ je

$$0 = \mathbf{Q}^\top \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{Q} \mathbf{z} \,,$$

pa iz $\mathrm{Im}\, \mathbf{Q} = \tilde{N}$ i (FV2) slijedi $\mathbf{y} \in (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \tilde{N})^\perp = N$. Analogno se pokaže i druga tvrdnja.

**c)** Pokažimo (FM1): jednostavnim računom se pokaže da je $\mathbf{M} + \mathbf{M}^\top = 2\mathbf{P}^\top \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{P} - 2\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{Q}$, pa za proizvoljan $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r$, zbog (FV1), $\mathbf{P}\boldsymbol{\xi} \in N$ i $\mathbf{Q}\boldsymbol{\xi} \in \tilde{N}$, vrijedi

$$(\mathbf{M} + \mathbf{M}^\top)\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{P}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{P}\boldsymbol{\xi} - 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{Q}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{Q}\boldsymbol{\xi} \geq 0 \,.$$

**d)** Vrijedi $\mathbf{M}\mathbf{P} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}^\top \mathbf{M} = -\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$: prvo uočimo da je $\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{Q}$ identiteta na $N + \tilde{N}$, što za posljedicu ima (zbog $\mathrm{Im}\, \mathbf{P} = N$ i $\mathrm{Im}\, \mathbf{Q} = \tilde{N}$)

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{Q})\mathbf{P} &= \mathbf{P} \quad \text{i} \\ \mathbf{Q}^\top(\mathbf{P}^\top + \mathbf{Q}^\top - \mathbf{Q}^\top \mathbf{P}^\top) &= [(\mathbf{P} + \mathbf{Q} - \mathbf{P}\mathbf{Q})\mathbf{Q}]^\top = \mathbf{Q}^\top \,. \end{aligned}$$

Sada, koristeći $(\mathbf{I} - \mathbf{P})\mathbf{P} = \mathbf{0} = \mathbf{Q}^\top(\mathbf{I} - \mathbf{Q}^\top)$ i (a), iz definicije matrice $\mathbf{M}$ dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{P} &= (\mathbf{I} - \mathbf{Q}^\top)\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{P} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{P} \,, \\ \mathbf{Q}^\top \mathbf{M} &= -\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} (\mathbf{I} - \mathbf{P}) = -\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \,. \end{aligned}$$

**e)** Pokažimo da je $N = \mathrm{Ker}\, (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})$: iz (d) slijedi da je $(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})\mathbf{P} = \mathbf{0}$, što zajedno s $\mathrm{Im}\, \mathbf{P} = N$ daje $N \subseteq \mathrm{Ker}\, (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})$. Za dokaz druge inkluzije uzmimo $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r$, za koji je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{\xi} = \mathbf{M}\boldsymbol{\xi}$, te koristeći (d) dobivamo

$$0 = \mathbf{Q}^\top (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})\boldsymbol{\xi} = 2\mathbf{Q}^\top \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \boldsymbol{\xi} \,,$$

Sada iz (b) slijedi $\boldsymbol{\xi} \in N$.

**f)** Vrijedi $\tilde{N} = \mathrm{Ker}\, (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}^\top)$: dokaz se provodi slično kao u (e), s tim da se prvo pokaže da vrijedi $\mathbf{M}^\top \mathbf{Q} = -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{Q}$ i $\mathbf{P}^\top \mathbf{M}^\top = \mathbf{P}^\top \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ (analogno kao u (d)), te ga stoga ovdje izostavljamo.

**g)** Preostalo je još pokazati (FM2): dovoljno je provjeriti da za dani $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^r$ postoji $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^r$, takav da je

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})\mathbf{y} = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})\mathbf{P}\mathbf{z} \,.$$

Naime, tada je $\mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{z} \in \mathrm{Ker}\, (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})$, $\mathbf{P}\mathbf{z} \in \mathrm{Ker}\, (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})$, te $\mathbf{y} = (\mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{z}) + \mathbf{P}\mathbf{z}$.

Zbog (d) je $\mathbf{Q}^\top (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}) = \mathbf{0}$, odnosno $\mathrm{Im}\, (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}) \subseteq \mathrm{Ker}\, \mathbf{Q}^\top$, što zajedno s

$$\mathrm{Im}\, \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{P} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} N = \tilde{N}^\perp = (\mathrm{Im}\, \mathbf{Q})^\perp = \mathrm{Ker}\, \mathbf{Q}^\top$$

daje $\mathrm{Im}\, (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}) \subseteq \mathrm{Im}\, \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{P}$. Stoga za proizvoljni $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^r$ postoji $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^r$, takav da je

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})\mathbf{y} = 2\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{P}\mathbf{z} = (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})\mathbf{P}\mathbf{z} \,,$$

gdje druga jednakost u gornjem izrazu slijedi iz (d).

**Q.E.D.**

Iz prethodna tri teorema slijedi da su uvjeti (FM1)–(FM2), (FX1)–(FX2) i (FV1)–(FV2) međusobno ekvivalentni. Oni sami nisu dovoljni za odgovarajuće rezultate egzistencije i jedinstvenosti, te je potrebno tražiti dodatna svojstva, koja su u literaturi obično vezana uz regularnost rubnog uvjeta i uz dodatne pretpostavke na matrično polje $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$. Dodatna regularnost rubnog uvjeta (kao i sama definicija slabog rješenja), u zavisnosti od toga koji se od gornja tri ekvivalentna zapisa koristi, može se izraziti na razne načine.

Primjerice, ukoliko se koriste dopustivi rubni uvjeti, dodatna regularnost se može tražiti kroz pripadnost projekcija $\mathbf{P}_+$ i $\mathbf{P}_-$, odnosno $\mathbf{Q}_+$ i $\mathbf{Q}_-$, određenoj klasi funkcija. Tako se uz uvjet $\mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_- \in \mathrm{C}^{0,\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ može pokazati egzistencija slabog rješenja (vidi [J]). Što se tiče pretpostavki na $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ (koje se pokazuju bitnima za dokaze jedinstvenosti), još je Friedrichs pretpostavljao da je *rub nekarakterističan*, odnosno da je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ invertibilno na $\partial\Omega$, ili pak da $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ ne mijenja rang na okolini ruba (pri tom je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ na odgovarajući način proširena na tu okolinu). U radu [Ra1] ta je pretpostavka oslabljena, te se zahtijeva da je *rub karakterističan konstantnog multipliciteta*, odnosno da $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ ne mijenja rang na $\partial\Omega$. Tu je, uz dodatne pretpostavke na rubni uvjet, dokazana egzistencija i jedinstvenost slabog rješenja. U [Ra2] je pretpostavka karakterističnog ruba konstantnog multipliciteta dodatno oslabljena.

## 2. Apstraktni pristup

U radu [EGC] autori A. Ern, J.-L. Guermond i G. Caplain iznose nešto drugačiji pristup problematici Friedrichsovih sustava – iskazuju teoriju u općenitijem, apstraktnom okružju (na razini Hilbertovih prostora), te daju dovoljne uvjete (analogone uvjeta (FV1)–(FV2)) uz koje je pripadni operator izomorfizam. Također istražuju vezu između različitih načina zadavanja rubnog uvjeta (koji koreliraju s uvjetima na matrični rubni uvjet u Friedrichsovom pristupu). U ovome, a djelomično i u sljedećem potpoglavlju, biti će izneseni osnovni rezultati [EGC], uz određene preinake. Naime, uočili smo da se zapis i neki dokazi mogu pojednostaviti ukoliko se iskažu u terminima prostora indefinitnog skalarnog produkta. Osim pojednostavljenja, taj će zapis (uz korištenje teorije Kreinovih prostora) omogućiti i dobivanje novih rezultata u sljedećem potpoglavlju, vezanih prvenstveno uz međuodnos različitih načina zadavanja rubnog uvjeta.

Neka je $L$ Hilbertov prostor nad poljem realnih brojeva (prema Rieszovom teoremu reprezentacija, $L$ je onda izomorfan svome dualu, pa u daljnjem identificiramo $L'$ s $L$), te $\mathcal{D} \subseteq L$ gust potprostor. Nadalje, neka su $T, \tilde{T} : \mathcal{D} \longrightarrow L$ neograničeni linearni operatori, koji zadovoljavaju

(T1) $$(\forall\, \varphi, \psi \in \mathcal{D}) \quad \langle\, T\varphi \mid \psi\,\rangle_L = \langle\, \varphi \mid \tilde{T}\psi\,\rangle_L\,;$$

(T2) $$(\exists\, c > 0)(\forall\, \varphi \in \mathcal{D}) \quad \|(T + \tilde{T})\varphi\|_L \leq c\|\varphi\|_L\,;$$

(T3) $$(\exists\, \mu_0 > 0)(\forall\, \varphi \in \mathcal{D}) \quad \langle\, (T + \tilde{T})\varphi \mid \varphi\,\rangle_L \geq 2\mu_0\|\varphi\|_L^2\,.$$

Kao posljedica (T1) operatori $T$ i $\tilde{T}$ su zatvorivi (jer im je formalno adjungirani operator gusto definiran). Označimo njihova zatvorenja s $\bar{T}$ i $\bar{\tilde{T}}$, te pripadne domene s $\mathcal{D}(\bar{T})$ i $\mathcal{D}(\bar{\tilde{T}})$.

Ako definiramo $\langle\, \cdot \mid \cdot\,\rangle_T := \langle\, \cdot \mid \cdot\,\rangle_L + \langle\, T\cdot \mid T\cdot\,\rangle_L$, lako se provjeri da je $(\mathcal{D}, \langle\, \cdot \mid \cdot\,\rangle_T)$ unitaran prostor (norma $\|\cdot\|_T$ se obično naziva *graf–norma* ili *norma grafa*). Označimo njegovo upotpunjenje s $W_0$. Analogno smo mogli definirati i $\langle\, \cdot \mid \cdot\,\rangle_{\tilde{T}}$, a zbog (T2) su norme $\|\cdot\|_T$ i $\|\cdot\|_{\tilde{T}}$ ekvivalentne na $\mathcal{D}$. Zbog zatvorivosti operatora $T$ je $W_0$ neprekinuto uloženo u $L$, te je slika prostora $W_0$ po tom ulaganju jednaka $\mathcal{D}(\bar{T}) = \mathcal{D}(\bar{\tilde{T}})$. Štoviše, $W_0$ je izometrički izomorfan s $\mathcal{D}(\bar{T})$, promatramo li oba uz graf–normu.

Budući da su operatori $T, \tilde{T} : \mathcal{D} \longrightarrow L$ neprekinuti u paru normi $(\|\cdot\|_T, \|\cdot\|_L)$, to svaki od njih možemo proširiti po gustoći do jedinstvenog operatora iz $\mathcal{L}(W_0; L)$. Ta proširenja operatora $T$ i $\tilde{T}$ su upravo jednaka operatorima $\bar{T}$ i $\bar{\tilde{T}}$ (uzimajući u obzir izomorfizam između $W_0$ i $\mathcal{D}(\bar{T})$). Radi jednostavnosti zapisa u daljnjem operatore $\bar{T}$ i $\bar{\tilde{T}}$ označavamo s $T$ i $\tilde{T}$, redom. Sada su $T, \tilde{T} \in \mathcal{L}(W_0; L)$, te se lako provjeri da svojstva (T1)–(T3) vrijede i za $\varphi, \psi \in W_0$.

Lako se vidi da su sljedeća ulaganja neprekinuta ($W_0$ promatramo uz normu $\|\cdot\|_T$, a $L$ uz $\|\cdot\|_L$):

$$W_0 \hookrightarrow L \equiv L' \hookrightarrow W_0'.$$

Neka je $\tilde{T}^* \in \mathcal{L}(L; W_0')$ adjungirani operator operatora $\tilde{T} : W_0 \longrightarrow L$, definiran s

$$(\forall\, u \in L)(\forall\, v \in W_0) \quad {}_{W_0'}\langle\, \tilde{T}^* u, v\,\rangle_{W_0} = \langle\, u \mid \tilde{T} v\,\rangle_L\,.$$

Posebno, zbog (T1), za $u \in W_0$ je

$${}_{W_0'}\langle\, \tilde{T}^* u, v\,\rangle_{W_0} = \langle\, Tu \mid v\,\rangle_L = {}_{W_0'}\langle\, Tu, v\,\rangle_{W_0}\,,$$

pa slijedi da je $T = \tilde{T}^*_{|W_0}$. Dakle $T : W_0 \longrightarrow L \hookrightarrow W_0'$ možemo shvatiti kao neprekinut linearan operator s $(W_0, \|\cdot\|_L)$ u $W_0'$, čije je jedinstveno neprekinuto proširenje ($W_0$ je gusto u $L$) na cijeli $L$ upravo operator $\tilde{T}^*$. Analogno je i $T^*$ jedinstveno neprekinuto proširenje operatora $\tilde{T}$ na $L$. U skladu s tim, a radi jednostavnosti pisanja, za operatore $\tilde{T}^*$ i $T^* \in \mathcal{L}(L; W_0')$ ćemo ubuduće koristiti oznake $T$ i $\tilde{T}$, redom, te su stoga $T, \tilde{T} \in \mathcal{L}(L; W_0')$.

Uz takve oznake za proizvoljne $u \in L$ i $\varphi \in W_0$ vrijedi

$$(1) \qquad {}_{W_0'}\langle\, Tu, \varphi\,\rangle_{W_0} = \langle\, u \mid \tilde{T}\varphi\,\rangle_L \qquad \text{i} \qquad {}_{W_0'}\langle\, \tilde{T}u, \varphi\,\rangle_{W_0} = \langle\, u \mid T\varphi\,\rangle_L\,.$$

**Napomena.** Za gore provedenu konstrukciju operatora $T, \tilde{T} \in \mathcal{L}(L; W_0')$ nismo koristili svojstvo (T3).

∎

**Lema 5.** *Svojstva (T1)–(T2) povlače da je $T+\tilde{T} \in \mathcal{L}(L; L)$ i $(T+\tilde{T})^* = T+\tilde{T}$. Posebno, svojstva (T2)–(T3) vrijede i za $\varphi \in L$.*

Dem. Činjenica da $T + \tilde{T} \in \mathcal{L}(L; L)$ je posljedica svojstva (T2) i konstrukcije proširenja operatora $T$ i $\tilde{T}$ do $\mathcal{L}(L; W_0')$. U svrhu dokazivanja samoadjungiranosti operatora $T + \tilde{T}$, za dane $u, v \in L$ uzmimo nizove $(u_n)$ i $(v_n)$ u $\mathcal{D}$ koji konvergiraju k $u$, odnosno $v$, u $L$. Iz (T1) slijedi

$$\langle\, (T+\tilde{T})u_n \mid v_n\,\rangle_L = \langle\, u_n \mid (T+\tilde{T})v_n\,\rangle_L\,,$$

pa prijelazom na limes, koristeći $T + \tilde{T} \in \mathcal{L}(L; L)$, dobivamo

$$\langle\, (T+\tilde{T})u \mid v\,\rangle_L = \langle\, u \mid (T+\tilde{T})v\,\rangle_L\,.$$

Uvažavajući neprekinutost, na analogan način se pokaže da svojstva (T2) i (T3) vrijede i za $\varphi \in L$.

**Q.E.D.**

Ako označimo

$$W := \{u \in L : Tu \in L\} = \{u \in L : \tilde{T}u \in L\}\,,$$

onda se lako može vidjeti da je $(W, \langle\cdot \mid \cdot\rangle_T)$ unitaran prostor, te da sadrži $W_0$. Također, za proizvoljne $u \in W$ i $\varphi \in W_0$ vrijedi

$$(2) \qquad \langle\, Tu \mid \varphi\,\rangle_L = \langle\, u \mid \tilde{T}\varphi\,\rangle_L \qquad \text{i} \qquad \langle\, \tilde{T}u \mid \varphi\,\rangle_L = \langle\, u \mid T\varphi\,\rangle_L\,.$$

**Lema 6.** *Ako vrijede (T1)–(T2), onda je $(W, \langle\cdot \mid \cdot\rangle_T)$ Hilbertov prostor.*

Dem. Da bismo dokazali potpunost, uzmimo Cauchyjev niz $(u_n)$ u $W$, te uočimo da su tada nizovi $(u_n)$ i $(Tu_n)$ Cauchyjevi u $L$, te stoga i konvergiraju. Označimo li pripadne limese s $u$ i $v$ redom, dovoljno je pokazati da je $Tu = v$. Za $\varphi \in W_0$ proizvoljan vrijedi

$$\langle\, v \mid \varphi \,\rangle_L = \lim_n \langle\, Tu_n \mid \varphi \,\rangle_L = \lim_n \langle\, u_n \mid \tilde{T}\varphi \,\rangle_L = \langle\, u \mid \tilde{T}\varphi \,\rangle_L = \langle\, Tu \mid \varphi \,\rangle_L \,,$$

odakle zbog gustoće $W_0$ u $L$ slijedi $Tu = v$.

**Q.E.D.**

Želimo riješiti sljedeću zadaću: za dani $f \in L$ naći $u \in W$ takav da je $Tu = f$. Preciznije, želimo naći dovoljne uvjete na potprostor $V \subseteq W$, uz koje je $T_{|_V} : V \longrightarrow L$ izomorfizam. U tu svrhu će nam biti koristan *rubni operator* $D \in \mathcal{L}(W; W')$ definiran (za dane $T$ i $\tilde{T}$) na sljedeći način:

$$_{W'}\langle\, Du, v \,\rangle_W := \langle\, Tu \mid v \,\rangle_L - \langle\, u \mid \tilde{T}v \,\rangle_L \,, \qquad u, v \in W \,.$$

**Lema 7.** *Ako je ispunjeno (T1)–(T2), onda za svaki $u, v \in W$ vrijedi*

$$_{W'}\langle\, Du, v \,\rangle_W = _{W'}\langle\, Dv, u \,\rangle_W \,.$$

Dem. Za proizvoljne $u, v \in W$ je

$$\begin{aligned} _{W'}\langle\, Du, v \,\rangle_W - _{W'}\langle\, Dv, u \,\rangle_W &= \langle\, Tu \mid v \,\rangle_L - \langle\, u \mid \tilde{T}v \,\rangle_L \\ &\quad - \langle\, Tv \mid u \,\rangle_L + \langle\, v \mid \tilde{T}u \,\rangle_L \\ &= \langle\, (T + \tilde{T})u \mid v \,\rangle_L - \langle\, u \mid (T + \tilde{T})v \,\rangle_L = 0 \,, \end{aligned}$$

kao posljedica samoadjungiranosti operatora $T + \tilde{T}$.

**Q.E.D.**

Prethodna lema tvrdi da je, uz prirodnu identifikaciju prostora $W$ i njegovog drugog duala $W''$, operator $D$ jednak svome adjungiranom operatoru $D^* \in \mathcal{L}(W''; W')$.

**Primjer 1.** (**Friedrichsov operator**) Neka su (kao na početku poglavlja) $d, r \in \mathbf{N}$, te $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen skup s Lipschitzovim rubom, i neka matrične funkcije $\mathbf{A}_k \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$, $k \in 1..d$, i $\mathbf{C} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ zadovoljavaju (F1)–(F2). Označimo $\mathcal{D} := \mathcal{D}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, $L = \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^r)$, te definirajmo operatore $T, \tilde{T} : \mathcal{D} \longrightarrow L$ formulama

$$\begin{aligned} T\mathsf{u} &:= \sum_{k=1}^d \partial_k(\mathbf{A}_k \mathsf{u}) + \mathbf{C}\mathsf{u} \,, \\ \tilde{T}\mathsf{u} &:= -\sum_{k=1}^d \partial_k(\mathbf{A}_k^\top \mathsf{u}) + (\mathbf{C}^\top + \sum_{k=1}^d \partial_k \mathbf{A}_k^\top)\mathsf{u} \,, \end{aligned}$$

gdje $\partial_k$ označava *klasičnu* derivaciju po $k$–toj varijabli ($\mathbf{A}_k$ su Lipschitzove funkcije, pa imaju klasičnu derivaciju u skoro svakoj točki). Jednostavno je provjeriti da tada $T$ i $\tilde{T}$ zadovoljavaju (T1)–(T3) (operator $\tilde{T}$ je definiran tako da bude formalno adjungiran operatoru $T$, odnosno da vrijedi (T1), (F1) povlači (T2), dok je (T3) direktna posljedica (F2)). Stoga se $T$ i $\tilde{T}$ mogu proširiti do operatora iz $\mathcal{L}(L; W_0')$.

Na početku ovog poglavlja smo Friedrichsov operator $\mathcal{L}$ definirali na nešto drugačiji način: $\mathcal{L}$ i $\tilde{\mathcal{L}}$ su bili formalno definirani istim formulama kao $T$ i $\tilde{T}$ gore, ali smo u tim formulama uzimali distribucijske derivacije i operatore $\mathcal{L}$ i $\tilde{\mathcal{L}}$ promatrali kao neprekinute (deriviranje je neprekinuto u distribucijama, kao i množenje omeđenom funkcijom na $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)$) linearne operatore s $\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)$ u $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{R}^r)$. Međutim, $W_0'$ je neprekinuto uloženo u $\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{R}^r)$ (jer je $\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{R}^r)$, promatran uz svoju topologiju strogog induktivnog limesa, neprekinuto i gusto uložen u $W_0$ uz topologiju generiranu graf–normom), pa su i operatori $T$ i $\tilde{T}$ iz $\mathcal{L}(\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r);\mathcal{D}'(\Omega;\mathbf{R}^r))$. Kao takvi, oni se podudaraju s operatorima $\mathcal{L}$ i $\tilde{\mathcal{L}}$ zato što se podudaraju na gustom skupu $\mathcal{D}=\mathcal{D}(\Omega;\mathbf{R}^r)$ (ovdje koristimo činjenicu da je klasična derivacija Lipschitzove funkcije jednaka distribucijskoj skoro svuda).

Prostor $W$ je sada dan s

$$W=\{\mathsf{u}\in\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r):\sum_{k=1}^d\partial_k(\mathbf{A}_k\mathsf{u})+\mathbf{C}\mathsf{u}\in\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)\}=\mathrm{H}^T(\Omega;\mathbf{R}^r)\,,$$

gdje smo u gornjoj sumi uzeli distribucijske derivacije. Ako s $\boldsymbol{\nu}=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_d)\in\mathrm{L}^\infty(\partial\Omega;\mathbf{R}^d)$ označimo jediničnu vanjsku normalu na $\partial\Omega$, te

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}:=\sum_{k=1}^d\nu_k\mathbf{A}_k\,,$$

tada za $\mathsf{u},\mathsf{v}\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$ rubni operator $D$ ima reprezentaciju

$${}_{W'}\langle\, D\mathsf{u},\mathsf{v}\,\rangle_W=\int_{\partial\Omega}\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\mathsf{u}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x})\cdot\mathsf{v}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x})dS(\mathbf{x})\,.$$

Stoga možemo očekivati da operator $D$ (u apstraktnom pristupu) ima ulogu matrične funkcije $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ u Friedrichsovoj teoriji. Isto tako, ako se pogleda definicija operatora traga za graf–prostore u prvom poglavlju, očito je da operatorom $D$ zapravo zamjenjujemo operator traga.

∎

Sljedeća lema opravdava naziv *rubni operator* za operator $D$.

**Lema 8.** *Uz pretpostavke (T1)–(T2), jezgra i slika operatora $D$ su dane s*

$$\operatorname{Ker}D=W_0\qquad i\qquad \operatorname{Im}D=W_0^0=\{g\in W':(\forall\,u\in W_0)\quad {}_{W'}\langle\, g,u\,\rangle_W=0\}\,.$$

*Posebno,* $\operatorname{Im}D$ *je zatvorena u $W'$.*

Dem. Pokažimo najprije da je $W_0\subseteq\operatorname{Ker}D$: za proizvoljnje $\varphi\in W_0$ i $v\in W$ zbog (2) vrijedi

$${}_{W'}\langle\, D\varphi,v\,\rangle_W=\langle\, T\varphi\mid v\,\rangle_L-\langle\,\varphi\mid\tilde{T}v\,\rangle_L=0\,,$$

pa je zbog proizvoljnosti $v\in W$ i $D\varphi=0$.

Pokažimo sada da je $W_0^0\subseteq\operatorname{Im}D$: prema Rieszovom teoremu reprezentacija, za dani $f\in W_0^0$ postoji $z\in W$, takav da za svaki $v\in W$ vrijedi

$${}_{W'}\langle\, f,v\,\rangle_W=\langle\, z\mid v\,\rangle_L+\langle\, Tz\mid Tv\,\rangle_L\,.$$

Koristeći (1) i $f\in W_0^0$, za proizvoljni $\varphi\in W_0$ dobivamo

$${}_{W_0'}\langle\,\tilde{T}Tz,\varphi\,\rangle_{W_0}=\langle\, Tz\mid\tilde{T}\varphi\,\rangle_L=-\langle\, z\mid\varphi\,\rangle_L+\langle\, f\mid\varphi\,\rangle_L=-\langle\, z\mid\varphi\,\rangle_L\,.$$

Stoga je $\tilde{T}Tz = -z \in L$, pa je i $u := Tz \in W$. Uočimo da je tada $\tilde{T}u = -z$, pa koristeći samoadjungiranost operatora $D$, za proizvoljni $v \in W$ imamo

$$\begin{aligned} {}_{W'}\langle\, Du, v\,\rangle_W &= {}_{W'}\langle\, Dv, u\,\rangle_W \\ &= \langle\, Tv \mid u\,\rangle_L - \langle\, v \mid \tilde{T}u\,\rangle_L \\ &= \langle\, Tv \mid u\,\rangle_L + \langle\, v \mid z\,\rangle_L = {}_{W'}\langle\, f, v\,\rangle_W\,, \end{aligned}$$

što povlači $Du = f$, odnosno $f \in \operatorname{Im} D$.

Budući da za proizvoljne $v \in W$ i $u \in \operatorname{Ker} D$ vrijedi

$${}_{W'}\langle\, Dv, u\,\rangle_W = {}_{W'}\langle\, Du, v\,\rangle_W = 0\,,$$

to slijedi $\operatorname{Im} D \subseteq (\operatorname{Ker} D)^0$, pa kombinirajući do sada dokazane tvrdnje slijedi

$$W_0^0 \subseteq \operatorname{Im} D \subseteq (\operatorname{Ker} D)^0 \subseteq W_0^0\,,$$

odnosno $\operatorname{Im} D = (\operatorname{Ker} D)^0 = W_0^0$. Budući da su $W_0$ i $\operatorname{Ker} D$ zatvoreni, to slijedi i $\operatorname{Ker} D = ((\operatorname{Ker} D)^0)^0 = (W_0^0)^0 = W_0$.

**Q.E.D.**

**Napomena.** Činjenica da je $\operatorname{Im} D$ zatvorena će biti ključna za kasniju primjenu teorije Kreinovih prostora i dobivanje novih rezultata. ∎

Lako se provjeri da je s

$$[\, u \mid v\,] := {}_{W'}\langle\, Du, v\,\rangle_W = \langle\, Tu \mid v\,\rangle_L - \langle\, u \mid \tilde{T}v\,\rangle_L\,, \qquad u, v \in W$$

definiran indefinitni skalarni produkt na $W$ (za definiciju i osnovna svojstva prostora indefinitnog skalarnog produkta vidi Dodatak). Označimo

$$\begin{aligned} C^+ &:= \{u \in W : [\, u \mid u\,] \geq 0\}\,, \\ C^- &:= \{u \in W : [\, u \mid u\,] \leq 0\}\,, \\ C^0 &:= C^+ \cap C^-\,. \end{aligned}$$

Neka su $V$ i $\tilde{V}$ potprostori prostora $W$ koji zadovoljavaju

(V1) $$V \subseteq C^+\,, \qquad \tilde{V} \subseteq C^-\,;$$

(V2) $$V = \tilde{V}^{[\perp]}\,, \qquad \tilde{V} = V^{[\perp]}\,,$$

gdje oznaka $^{[\perp]}$ stoji za $[\,\cdot \mid \cdot\,]$-ortogonalni komplement.

**Napomena.** Zapišemo li gornje uvjete pomoću operatora $D$, kao u [EGC], onda (V1) postaje

$$\begin{aligned} &(\forall\, u \in V) \qquad {}_{W'}\langle\, Du, u\,\rangle_W \geq 0\,, \\ &(\forall\, v \in \tilde{V}) \qquad {}_{W'}\langle\, Dv, v\,\rangle_W \leq 0\,, \end{aligned}$$

dok je (V2) dan s

$$V = D(\tilde{V})^0\,, \qquad \tilde{V} = D(V)^0\,,$$

pa je analogija s uvjetima (FV1)–(FV2) za Friedrichsov sustav očita. ∎

**Lema 9.** *Neka vrijedi (T1)–(T2) i (V2). Tada su $V$ i $\tilde{V}$ zatvoreni, te je* $\operatorname{Ker} D = W_0 \subseteq V \cap \tilde{V}$.

Dem. (V2) povlači da su $V$ i $\tilde{V}$ zatvoreni, a zbog $\operatorname{Ker} D = W_0$ slijedi da je $W_0[\perp]v$ za svaki $v \in W$, pa je (opet zbog (V2)) i $W_0 \subseteq V \cap \tilde{V}$.

**Q.E.D.**

**Lema 10.** *Ako vrijede (T1)–(T3) i (V1)–(V2), onda su operatori $T$ i $\tilde{T}$ $L$–koercitivni na $V$, odnosno $\tilde{V}$, redom (s konstantom koercitivnosti $\mu_0$). Preciznije*

$$\begin{aligned} &(\forall\, u \in V) \qquad \langle\, Tu \mid u \,\rangle_L \geq \mu_0 \|u\|_L^2\,; \\ &(\forall\, v \in \tilde{V}) \qquad \langle\, Tv \mid v \,\rangle_L \geq \mu_0 \|v\|_L^2\,. \end{aligned}$$

Dem. Iz definicije indefinitnog skalarnog produkta je jasno da za svaki $w \in W$ vrijedi

$$\begin{aligned} \langle\, Tw \mid w \,\rangle_L &= \frac{1}{2}\langle\, (T+\tilde{T})w \mid w \,\rangle_L + \frac{1}{2}[\, w \mid w\,]\,, \\ \langle\, \tilde{T}w \mid w \,\rangle_L &= \frac{1}{2}\langle\, (T+\tilde{T})w \mid w \,\rangle_L - \frac{1}{2}[\, w \mid w\,]\,, \end{aligned}$$

odakle iz (T3) slijedi

$$\begin{aligned} \langle\, Tw \mid w \,\rangle_L &\geq \mu_0 \|w\|_L^2 + \frac{1}{2}[\, w \mid w\,]\,, \\ \langle\, \tilde{T}w \mid w \,\rangle_L &\geq \mu_0 \|w\|_L^2 - \frac{1}{2}[\, w \mid w\,]\,. \end{aligned}$$

Tvrdnja sada jednostavno slijedi iz (V1).

**Q.E.D.**

U dokazu osnovnog teorem egzistencije i jedinstvenosti ćemo koristiti sljedeći rezultat.

**Teorem 5.** *(**Banach–Nečas–Babuška**) Neka su $V$ i $L$ dva Banachova prostora i $L'$ dual prostora $L$. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne*

*a) $T \in \mathcal{L}(V; L)$ je bijekcija;*

*b) Vrijedi:*

$$\begin{aligned} &(\exists\, \alpha > 0)(\forall\, u \in V) \qquad \sup_{v \in L' \setminus \{0\}} \frac{{}_{L'}\langle\, v, Tu \,\rangle_L}{\|v\|_{L'}} \geq \alpha \|u\|_V\,; \\ &(\forall\, v \in L') \qquad \Big((\forall\, u \in V) \quad {}_{L'}\langle\, v, Tu \,\rangle_L = 0\Big) \quad \Longrightarrow \quad v = 0\,. \end{aligned}$$

∎

**Teorem 6.** *Ako su ispunjene pretpostavke $(T1) - (T3)$ i $(V1) - (V2)$, onda su restrikcije operatora $T_{|_V} : V \longrightarrow L$ i $\tilde{T}_{|_{\tilde{V}}} : \tilde{V} \longrightarrow L$ izomorfizmi.*

Dem. Dokazat ćemo tvrdnju za operator $T$. Budući da je $V$ zatvoren potprostor u $W$, to je i Hilbertov uz pripadni skalarni produkt. Jasno je da je restrikcija operatora $T$ na $V$ neprekinuto linearno preslikavanje s $V$ u $L$, pa je za dokaz teorema dovoljno provjeriti da vrijede uvjeti (b) u Banach–Nečas–Babuška teoremu, uz $L' = L$. Dokažimo prvu tvrdnju: Lema 10 povlači da je (za proizvoljan $u \in V \subseteq L$)

$$\sup_{v \in L \setminus \{0\}} \frac{\langle\, v \mid Tu \,\rangle_L}{\|v\|_L} \geq \frac{\langle\, u \mid Tu \,\rangle_L}{\|u\|_L} \geq \frac{\mu_0 \|u\|_L^2}{\|u\|_L} = \mu_0 \|u\|_L\,.$$

Ako gornju nejednakost podjelimo s $\mu_0$ i pribrojimo joj sljedeću jednakost

$$\sup_{v \in L \setminus \{0\}} \frac{\langle\, v \mid Tu \,\rangle_L}{\|v\|_L} = \sup_{v \in L \setminus \{0\}} \frac{|\langle\, v \mid Tu \,\rangle_L|}{\|v\|_L} = \|Tu\|_L\,,$$

dobivamo

$$\Big(1+\frac{1}{\mu_0}\Big)\sup_{v\in L\setminus\{0\}}\frac{\langle\, v \mid Tu\,\rangle_L}{\|v\|_L} \geq \|u\|_L + \|Tu\|_L \geq \|u\|_W\,,$$

pa je prvi uvjet zadovoljen za $\alpha = \frac{\mu_0}{\mu_0+1}$.

Dokažimo da je ispunjen i drugi uvjet: neka je $v \in L$ takav da je

$$(\forall\, u \in V) \qquad \langle\, Tu \mid v\,\rangle_L = 0\,.$$

Kako je $W_0 \subseteq V$, to iz (1) slijedi

$$(\forall\, \varphi \in W_0) \qquad {}_{W_0'}\langle\, \tilde{T}v, \varphi\,\rangle_{W_0} = \langle\, v \mid Tu\,\rangle_L = 0\,,$$

pa je $\tilde{T}v = 0$ u $W_0'$. Posebno je $\tilde{T}v \in L$, odnosno $v \in W$. Budući da je

$$(\forall\, u \in V) \qquad [\, u \mid v\,] = \langle\, Tu \mid v\,\rangle_L - \langle\, u \mid \tilde{T}v\,\rangle_L = 0 - 0 = 0\,,$$

to je $v \in V^{[\perp]} = \tilde{V}$, a kako je $\tilde{T}$ $L$–koercitivan na $\tilde{V}$, dobivamo

$$\mu_0\|v\|_L^2 \leq \langle\, \tilde{T}v \mid v\,\rangle_L = 0\,,$$

što povlači $v = 0$ i dokazuje drugu tvrdnju.

Dokaz da je $\tilde{T}_{|_{\tilde{V}}} : \tilde{V} \longrightarrow L$ izomorfizam se provodi analogno.

**Q.E.D.**

Gornji teorem daje dovoljne uvjete na potprostore $V$ i $\tilde{V}$ da bi sljedeće zadaće bile dobro postavljene:

1) Za dani $f \in L$ naći $u \in V$ za koji je $Tu = f$;
2) Za dani $f \in L$ naći $v \in \tilde{V}$ za koji je $\tilde{T}v = f$.

Njegova važnost je i u tome što su uvjeti (V1)–(V2) relativno jednostavni (geometrijski) i ne uključuju (direktno) pitanje tragova funkcija iz prostora grafa.

### Drugi način zadavanja rubnog uvjeta

Sada ćemo razmotriti alternativni način zadavanja rubnih uvjeta, koji je u bliskoj vezi s Friedrichsovom originalnom idejom—dopustivim rubnim uvjetima. U ostatku ovog poglavlja pretpostavljamo da vrijedi (T1)–(T3) (ponekad ćemo to i eksplicitno naglasiti).

Pretpostavimo da postoji operator $M \in \mathcal{L}(W; W')$ koji zadovoljava

(M1) $$(\forall\, u \in W) \quad {}_{W'}\langle\, Mu, u\,\rangle_W \geq 0\,,$$

(M2) $$W = \mathrm{Ker}\,(D - M) + \mathrm{Ker}\,(D + M)\,.$$

Analogija između svojstava (M1)–(M2) za operator $M$ i uvjeta (FM1)–(FM2) za matrični rubni uvjet $\mathbf{M}$ je očita. Pitanje koje se sada prirodno nameće je dovoljnost uvjeta (M1)–(M2) da bi operator $T_{|_{\mathrm{Ker}\,(D-M)}} : \mathrm{Ker}\,(D - M) \longrightarrow L$ bio izomorfizam? O tome će biti više riječi u sljedećem potpoglavlju.

Sada ćemo istražiti svojstva operatora $M$ (koja opet imaju jaku analogiju sa svojstvima matričnog rubnog polja $\mathbf{M}$ u slučaju Friedrichsovih sustava). Neka je $M^* \in \mathcal{L}(W; W')$ adjungirani operator operatoru $M$ (uz identifikaciju prostora $W$ i $W''$), zadan s

$$(\forall\, u, v \in W) \quad {}_{W'}\langle\, M^*u, v\,\rangle_W = {}_{W'}\langle\, Mv, u\,\rangle_W\,.$$

**Lema 11.** *Ako $M$ zadovoljava (M1)–(M2), onda je*

$$\mathrm{Ker}\, D = \mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, M^*\,, \quad i$$

$$\mathrm{Im}\, D = \mathrm{Im}\, M = \mathrm{Im}\, M^*\,.$$

Dem. Pokažimo najprije da je $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} M^*$: za proizvoljne $u \in \operatorname{Ker} M$, $v \in W$ i $\lambda \in \mathbf{R}$ je

$$0 \leq_{W'} \langle M(\lambda u + v), \lambda u + v \rangle_W = \lambda_{W'}\langle Mv, u \rangle_W +_{W'} \langle Mv, v \rangle_W \,,$$

pa zbog proizvoljnosti $\lambda$ slijedi ${}_{W'}\langle Mv, u \rangle_W = 0$ za svaki $v \in W$, odnosno $u \in \operatorname{Ker} M^*$. Analogno se pokaže da je i $\operatorname{Ker} M \supseteq \operatorname{Ker} M^*$.

Pokažimo sada da je $\operatorname{Im} D = \operatorname{Im} M$: za $f \in \operatorname{Im} D$ postoji $u \in W$ za koji je $Du = f$. Neka su sada $u_\pm \in \operatorname{Ker}(D \pm M)$ takvi da je $u = u_+ + u_-$. Tada je

$$f = Du_+ + Du_- = -Mu_+ + Mu_- = M(u_- - u_+) \,,$$

što povlači $f \in \operatorname{Im} M$. Isto tako se pokaže i $\operatorname{Im} D \supseteq \operatorname{Im} M$.

Kako za proizvoljan $N \in \mathcal{L}(W; W')$ vrijedi $\operatorname{Ker} N^* = (\operatorname{Im} N)^0$, to iz $\operatorname{Im} D = \operatorname{Im} M$ slijedi

$$\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} D^* = (\operatorname{Im} D)^0 = (\operatorname{Im} M)^0 = \operatorname{Ker} M^* \,,$$

čime je prva tvrdnja dokazana.

Sada iz $(\operatorname{Ker} N)^0 = \overline{\operatorname{Im} N^*}$ za proizvoljni $N \in \mathcal{L}(W; W')$, i $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} M$, slijedi

$$\overline{\operatorname{Im} D} = \overline{\operatorname{Im} D^*} = (\operatorname{Ker} D)^0 = (\operatorname{Ker} M)^0 = \overline{\operatorname{Im} M^*} \,.$$

Budući da je $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} D$ po Lemi 8 zatvoreno, to je prema teoremu o zatvorenoj slici i $\operatorname{Im} M^*$ zatvoreno, pa dobivamo $\operatorname{Im} D = \operatorname{Im} M^*$, što dokazuje i drugu tvrdnju.

**Q.E.D.**

**Napomena.** Zbog $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} D = W_0$ ima smisla i $M$ zvati *rubnim operatorom*. ∎

**Napomena.** Analogon prethodne lema se može dokazati i za matrične rubne uvjete za Friedrichsov sustav (tehnika dokaza je ista). Preciznije, (FM1)–(FM2) povlače

$$\operatorname{Ker} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) = \operatorname{Ker} \mathbf{M}(\mathbf{x}) = \operatorname{Ker} \mathbf{M}^\top(\mathbf{x}) \qquad (\text{ss } \mathbf{x} \in \partial\Omega) \,,$$

$$\operatorname{Im} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) = \operatorname{Im} \mathbf{M}(\mathbf{x}) = \operatorname{Im} \mathbf{M}^\top(\mathbf{x}) \qquad (\text{ss } \mathbf{x} \in \partial\Omega) \,.$$

Uočimo da ta tvrdnja povlači tvrdnje lema 3 i 4. ∎

**Lema 12.** *Ako je ispunjeno (M1)–(M2), onda je $Du = M^*v$ ako i samo ako je $Dv = M^*u$, za proizvoljne $u, v \in W$.*

Dem. Kako za proizvoljna dva potprostora $U_1$, $U_2$ prostora $W$ vrijedi $(U_1 + U_2)^0 = U_1^0 \cap U_2^0$, to iz (M2) slijedi

$$\overline{\operatorname{Im}(D - M^*)} \cap \overline{\operatorname{Im}(D + M^*)} = W^0 = \{0\} \,.$$

Neka su sada $u, v \in W$ takvi da je $Du = M^*v$. Iz

$$M^*u - Dv = (D + M^*)(u - v) = (D - M^*)(-u - v)$$

slijedi da je $M^*u - Dv \in \operatorname{Im}(D - M^*) \cap \operatorname{Im}(D + M^*)$, odnosno $M^*u - Dv = 0$. Druga implikacija se dokazuje analogno.

**Q.E.D.**

Dokažimo sada analogon uvjeta (FM4) za Friedrichsove sustave.

**Lema 13.** *Neka vrijedi (M1). Tada (M2) vrijedi ako i samo ako je*

$$W = \operatorname{Ker}(D - M^*) + \operatorname{Ker}(D + M^*)\,. \tag{M4}$$

Dem. Neka vrijedi (M1)–(M2). Za $w \in W$ uzmimo $w_\pm \in \operatorname{Ker}(D \pm M)$ takve da je $w = w_+ + w_-$. Tada je $D(w_+ + w_-) = M(w_- - w_+) \in \operatorname{Im} M$, pa prema Lemi 11 ($\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} M^*$) postoji $z \in W$ za koji je $D(w_+ + w_-) = M^* z$. Iz prethodne leme slijedi $M^*(w_+ + w_-) = Dz$, pa ako označimo $u_\pm := \frac{1}{2}(w_+ + w_- \pm z)$ (tako da je $w = u_+ + u_-$), dobivamo

$$2(D - M^*)u_+ = (D - M^*)(w_+ + w_- + z) = D(w_+ + w_-) - M^* z + Dz - M^*(w_+ + w_-) = 0\,,$$

te analogno $(D + M^*)u_- = 0$, što povlači (M4). Na isti način se pokaže da (M1) i (M4) povlače (M2).

**Q.E.D.**

## 3. Međuovisnost različitih načina zadavanja rubnog uvjeta

Do sada smo vidjeli dva načina zadavanja rubnih uvjeta. Jedan je neposredno preko potprostora $V$ i $\tilde{V}$ koji zadovoljavaju (V1)–(V2), dok je drugi preko rubnog operatora $M$ koji zadovoljava (M1)–(M2). Vidjeli smo i da svojstva (V1)–(V2) osiguravaju da je zadaća

*za dani $f \in L$ naći $u \in V$, takav da je $Tu = f$*

dobro postavljena. Svojstva (M1)–(M2) i (V1)–(V2) imaju jasnu analogiju sa svojstvima (FM1)–(FM2) i (FV1)–(FV2) za Friedrichsove sustave, pa je prirodno pogledati koji bi bio analogon maksimalnih rubnih uvjeta (svojstva (FX1)–(FX2)) u apstraktnom okružju. Pojam maksimalnog nenegativnog potprostora je dobro poznat u prostorima indefinitnog skalarnog produkta: za potprostor $V$ prostora $(W, [\,\cdot \mid \cdot\,])$ kažemo da je *maksimalan nenegativan*, ukoliko vrijedi

(X1) $\qquad$ $V$ je nenegativan u $(W, [\,\cdot \mid \cdot\,])$: $\qquad V \subseteq C^+\,,$

(X2) $\qquad$ ne postoji nenegativan potprostor u $(W, [\,\cdot \mid \cdot\,])$ koji je pravi nadskup od $V$.

Vidjeli smo da su u slučaju Friedrichsovih sustava uvjeti (FM1)–(FM2), (FV1)–(FV2) i (FX1)–(FX2) međusobno ekvivalentni. Preostali dio ovog potpoglavlja ćemo proučavati odnos između uvjeta (M1)–(M2), (V1)–(V2) i (X1)–(X2). U tu svrhu ćemo koristiti poznate rezultate vezane uz Kreinove prostore, koji su zapisani u Dodatku. Naime, Kreinovi prostori imaju strukturu koja je dovoljno bliska Hilbertovim prostorima, te stoga za njih vrijede mnoga svojstva koja znamo u Hilberovim prostorima. Međutim, prostor $(W, [\,\cdot \mid \cdot\,])$ nije Kreinov (degeneriran je), nego ima samo strukturu indefinitnog skalarnog produkta. To nam nije dovoljno za dobivanje zadovoljavajućih rezultata, pa smo prisiljeni promatrati kvocijentni prostor, za koji ćemo pokazati da jest Kreinov (za što je ključno da je $\operatorname{Im} D$ zatvorena: vidi Lemu 15 niže).

Označimo s $Q : W \longrightarrow W_0^\perp$ ortogonalni projektor na potprostor $W_0^\perp$ prostora $W$. $W_0^\perp$ je unitarno izomorfan kvocijentnom prostoru $\hat{W} := W/W_0$ (izomorfizam je dan s $\hat{x} \mapsto Qx$, za $x \in W$, gdje je $\hat{x} = x + W_0$). Stoga je, uz pripadni skalarni produkt, $\hat{W}$ Hilbertov prostor. Kako je $W_0$ zatvoren u $W$, to slijedi (vidi [Ku, str. 393])

**Lema 14.** *Potprostor $V \supseteq W_0$ prostora $W$ je zatvoren u $W$ ako i samo ako je $\hat{V} := \{\hat{v} : v \in V\}$ zatvoren u $\hat{W}$.* ∎

Ključni argument u dokazu sljedeće leme je to što je $\operatorname{Im} D$ zatvorena.

**Lema 15.** *Par $(\hat{W}, [\,\cdot \mid \cdot\,]\hat{})$, gdje je $[\,\cdot \mid \cdot\,]\hat{} : \hat{W} \times \hat{W} \longrightarrow \mathbf{R}$ indefinitni skalarni produkt definiran s*

$$[\,\hat{u} \mid \hat{v}\,]\hat{} := [\,u \mid v\,]\,, \qquad u, v \in W\,,$$

*čini Kreinov prostor.*

Dem. Neka je $j : W' \longrightarrow W$ izomorfizam (koji postoji prema Rieszovom teoremu reprezentacija) za koji vrijedi

$$(\forall\, f \in W')(\forall\, u \in W) \quad {}_{W'}\langle\, f, u\,\rangle_W = \langle\, j(f) \mid u\,\rangle_W\,.$$

Tada je $G := j \circ D : W \longrightarrow W$ neprekinut linearni operator, te za $u, v \in W$ vrijedi

$$[\,u \mid v\,] =_{W'} \langle\, Du, v\,\rangle_W = \langle\, j(Du) \mid v\,\rangle_W = \langle\, Gu \mid v\,\rangle_W\,.$$

Kako je $[\,u \mid v\,] = [\,v \mid u\,]$, to slijedi da je $G = G^*$, pa je $G$ Grammov operator prostora $(W, [\,\cdot \mid \cdot\,])$. Također je $\operatorname{Ker} G = \operatorname{Ker} D = W_0$, te je $\operatorname{Im} G = j(\operatorname{Im} D)$ zatvorena (jer je $\operatorname{Im} D$ zatvorena i $j$ izomorfizam Hilbertovih prostora), pa je prema Teoremu 1 (Dodatak) $(\hat{W}, [\,\cdot \mid \cdot\,]\hat{})$ Kreinov prostor.

**Q.E.D.**

Sada ćemo pobliže proučiti vezu između pojmova ortogonalnosti i maksimalnosti u kvocijentnom prostoru $\hat{W}$ i polaznom prostoru $W$.

**Lema 16.** *Neka je $U$ potprostor prostora $W$. Tada je*

$$(\hat{U})^{[\perp]\hat{}} = \widehat{U^{[\perp]}}\,.$$

Dem. Neka je $\hat{v} \in \widehat{U^{[\perp]}}$ za neki $v \in U^{[\perp]}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} v \in U^{[\perp]} \quad &\iff \quad (\forall\, u \in U)[\,u \mid v\,] = 0 \\ &\iff \quad (\forall\, \hat{u} \in \hat{U})[\,\hat{u} \mid \hat{v}\,]\hat{} = 0 \quad \iff \quad \hat{v} \in (\hat{U})^{[\perp]\hat{}}\,. \end{aligned}$$

**Q.E.D.**

**Lema 17.** *Neka je $V$ potprostor prostora $W$. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

*a) ako je $V$ maksimalan nenegativan (nepozitivan) u $W$, onda je $\hat{V}$ maksimalan nenegativan (nepozitivan) u $\hat{W}$;*

*b) ako je $W_0 \subseteq V$ i $\hat{V}$ maksimalan nenegativan (nepozitivan) u $\hat{W}$, onda je $V$ maksimalan nenegativan (nepozitivan) u $W$.*

Dem. **a)** Neka je $V$ maksimalan nenegativan u $W$. Tada za $\hat{u} \in \hat{V}$ (gdje je $u \in V$) vrijedi

$$[\,\hat{u} \mid \hat{u}\,]\hat{} = [\,u \mid u\,] \geq 0\,,$$

što povlači da je $\hat{V}$ nenegativan u $\hat{W}$. Pretpostavimo da $\hat{V}$ nije maksimalan nenegativan, odnosno da postoji $\hat{v} \in \hat{W} \setminus \hat{V}$ (tada je i $v \notin V$), takav da za proizvoljne $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $u \in V$, vrijedi

$$[\,\alpha\hat{u} + \beta\hat{v} \mid \alpha\hat{u} + \beta\hat{v}\,]\hat{} \geq 0\,.$$

Budući da je $\widehat{(\alpha u+\beta v)}=\alpha\hat{u}+\beta\hat{v}$, to je i

$$[\,\alpha u+\beta v \mid \alpha u+\beta v\,]=[\,\widehat{(\alpha u+\beta v)} \mid \widehat{(\alpha u+\beta v)}\,]\hat{} = [\,\alpha\hat{u}+\beta\hat{v} \mid \alpha\hat{u}+\beta\hat{v}\,]\hat{} \geq 0\,,$$

pa slijedi da je $[v]+V\supset V$ nenegativan u $W$, a što je kontradikcija s maksimalnošću prostora $V$.

Tvrdnja se analogno pokaže i za slučaj maksimalnog nepozitivnog prostora.

**b)** Neka je sada $\hat{V}$ maksimalan nenegativan u $\hat{W}$, i $W_0\subseteq V$. Za $u\in V$ je

$$[\,u \mid u\,]=[\,\hat{u} \mid \hat{u}\,]\hat{} \geq 0\,,$$

pa je $V$ nenegativan u $W$. Kada ne bi bio maksimalan nenegativan, onda bi postojao $v\in W\setminus V$, takav da za proizvoljne $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$, $u\in V$, vrijedi

$$[\,\alpha u+\beta v \mid \alpha u+\beta v\,]\geq 0\,.$$

Tada bi bilo i

$$[\,\alpha\hat{u}+\beta\hat{v} \mid \alpha\hat{u}+\beta\hat{v}\,]\hat{} = [\,\widehat{(\alpha u+\beta v)} \mid \widehat{(\alpha u+\beta v)}\,]\hat{} = [\,\alpha u+\beta v \mid \alpha u+\beta v\,]\geq 0\,,$$

pa bi slijedilo da je $[\hat{v}]+\hat{V}$ nenegativan u $W$. Preostaje pokazati da je $\hat{V}\neq[\hat{v}]+\hat{V}$, odnosno da je $\hat{v}\notin\hat{V}$. Zaista, ako je $\hat{v}\in\hat{V}$, onda postoji $u\in V$, takav da je $v\in u+W_0$. Budući da je $W_0\subseteq V$, to slijedi $v\in V$, a što je kontradikcija.

Ako je $\hat{V}$ maksimalan nepozitivan, tvrdnja se pokaže na isti način.

**Q.E.D.**

**Napomena.** Iz dokaza gornje leme slijedi da je potprostor $V$ prostora $W$ nenegativan (nepozitivan) ako i samo ako je $\hat{V}$ nenegativan (nepozitivan) u $\hat{W}$. ∎

## Uvjeti (V1)–(V2) su ekvivalentni uvjetima (X1)–(X2)

Već je u [EGC] pokazano da uvjeti (V1)–(V2) povlače da je $V$ maksimalan nenegativan u $W$. Ovdje ćemo dati bitno drugačiji (i jednostavniji) dokaz te tvrdnje, te ćemo dokazati i njezin obrat.

**Teorem 7.**

*a) Neka potprostori $V$ i $\tilde{V}$ zadovoljavaju (V1)–(V2). Tada je $V$ maksimalan nenegativan u $W$ (zadovoljava (X1)–(X2)) i $\tilde{V}$ je maksimalan nepozitivan u $W$.*

*b) Neka je $V$ maksimalan nenegativan u $W$. Tada $V$ i $\tilde{V}:=V^{[\perp]}$ zadovoljavaju (V1)–(V2).*

Dem. **a)** Budući da je $V$ nenegativan, to je i $\hat{V}$ nenegativan u $\hat{W}$. Isto tako je i $\hat{\tilde{V}}$ nepozitivan u $\hat{W}$. Iz (V2) i Leme 16 je

$$\hat{\tilde{V}}=\widehat{V^{[\perp]}}=\hat{V}^{[\perp]\hat{}},$$

pa su zadovoljeni uvjeti Teorema 2 u Dodatku, što povlači da je $\mathrm{Cl}\,\hat{V}$ maksimalan nenegativan u $\hat{W}$. Budući da je $V$ zatvoren (Lema 9), to je i $\hat{V}=\mathrm{Cl}\,\hat{V}$, a kako je $W_0\subseteq V$ (Lema 9), to prema Lemi 17.b slijedi da je $V$ maksimalan nenegativan. Analogno se pokaže da je $\tilde{V}$ maksimalan nepozitivan.

**b)** Budući da je ortogonalni komplement maksimalnog nenegativnog potprostora nepozitivan (Lema 1, Dodatak), to slijedi (V1). Prema Lemi 17.a je $\hat{V}$ maksimalan nenegativan u $\hat{W}$, pa je prema teoremima 3 i 4 (Dodatak) $\hat{V}$ zatvoren i $\hat{V} = (\hat{V}^{[\perp]\hat{}})^{[\perp]\hat{}}$. Prema Lemi 16 je onda

$$\hat{V} = (\hat{V}^{[\perp]\hat{}})^{[\perp]\hat{}} = (\widehat{V^{[\perp]}})^{[\perp]\hat{}} = (\widehat{V^{[\perp][\perp]}})\,.$$

Budući da je $W_0 \subseteq V$ ($V$ je maksimalan nenegativan, pa sadrži izotropni dio prostora – Lema 2, Dodatak), te $W_0 \subseteq V^{[\perp][\perp]}$, to slijedi da je $V = V^{[\perp][\perp]}$, odnosno $V = \tilde{V}^{[\perp]}$, i time je pokazano (V2).

**Q.E.D.**

Kao posljedicu prethodnog teorema i Teorema 6 imamo sljedeći korolar.

**Korolar 2.** *Neka vrijede (T1)–(T3), $V$ je maksimalan nenegativan u $W$, i označimo $\tilde{V} := V^{[\perp]}$. Tada su operatori*

$$T_{|_V} : V \longrightarrow L \qquad i \qquad \tilde{T}_{|_{\tilde{V}}} : \tilde{V} \longrightarrow L$$

*izomorfizmi.*

∎

### Veza između uvjeta (V1)–(V2) i (M1)–(M2)

Sljedeći teorem je dokazan u [EGC], a ovdje je zapisan u terminologiji prostora indefinitnog skalarnog produkta.

**Teorem 8.** *Neka vrijedi (T1)–(T3) i neka $M \in \mathcal{L}(W; W')$ zadovoljava (M1)–(M2). Ako označimo*

$$V := \mathrm{Ker}\,(D - M) \quad i \quad \tilde{V} := \mathrm{Ker}\,(D + M^*)\,,$$

*onda $V$ i $\tilde{V}$ zadovoljavaju (V1)–(V2).*

Dem. Budući da za $u \in V$ vrijedi $Du = Mu$, to (M1) povlači

$$[\, u \mid u \,] = _{W'}\langle\, Du, u \,\rangle_W = _{W'}\langle\, Mu, u \,\rangle_W \geq 0\,,$$

odnosno $V \subseteq C^+$. Analogno se pokaže $\tilde{V} \subseteq C^-$, pa je (V1) zadovoljeno.

Pokažimo sada da je $V^{[\perp]} \subseteq \tilde{V}$: uzmimo $v \in V^{[\perp]}$, te za proizvoljan $z \in W$ neka su $z_\pm \in \mathrm{Ker}\,(D \pm M)$ takvi da je $z = z_+ + z_-$. Tada je

$$_{W'}\langle\, (D + M^*)v, z_+ \,\rangle_W = _{W'}\langle\, (D + M)z_+, v \,\rangle_W = 0\,,$$

a zbog $z_- \in V = \mathrm{Ker}\,(D \pm M)$, te $v \in V^{[\perp]}$ je i

$$_{W'}\langle\, M^*v, z_- \,\rangle_W = _{W'}\langle\, Mz_-, v \,\rangle_W = _{W'}\langle\, Dz_-, v \,\rangle_W = [\, z_- \mid v \,] = 0\,.$$

To zajedno daje

$$_{W'}\langle\, (D + M^*)v, z \,\rangle_W = _{W'}\langle\, (D + M^*)v, z_+ \,\rangle_W + _{W'}\langle\, (D + M^*)v, z_- \,\rangle_W = 0\,,$$

odnosno $v \in \mathrm{Ker}\,(D + M^*) = \tilde{V}$.

Pokažimo drugu inkluziju, to jest da je $V^{[\perp]} \supseteq \tilde{V}$: za $v \in \tilde{V}$ i proizvoljan $u \in V$ (za koji je onda $Du = Mu$) vrijedi

$$[\, u \mid v \,] = _{W'}\langle\, Du, v \,\rangle_W = \frac{1}{2}\, _{W'}\langle\, (D + M)u, v \,\rangle_W = \frac{1}{2}\, _{W'}\langle\, (D + M^*)v, u \,\rangle_W = 0\,,$$

što povlači $v \in V^{[\perp]}$.

Analogno se dokaže da je $\tilde{V}^{[\perp]} = V$.

**Q.E.D.**

Direktna posljedica teorema 6 i 8 je sljedeći korolar.

**Korolar 3.** *Ukoliko vrijedi (T1)–(T3), te ukoliko operator $M \in \mathcal{L}(W;W')$ zadovoljava (M1)–(M2), onda su restringirani operatori*

$$T|_{\mathrm{Ker}\,(D-M)} : \mathrm{Ker}\,(D-M) \longrightarrow L \qquad i \qquad \tilde{T}|_{\mathrm{Ker}\,(D+M^*)} : \mathrm{Ker}\,(D+M^*) \longrightarrow L$$

*izomorfizmi.* ∎

Vidimo da su svojstva (M1)–(M2) dovoljna da bi odgovarajući rubni problem bio dobro postavljen. Iako formalno izgledaju jednako kao i Friedrichsovi uvjeti (FM1)–(FM2) za matrične rubne uvjete, čini se da sadrže više informacija od njih. O pitanju odnosa između uvjeta (M1)–(M2) i (FM1)–(FM2) će biti više riječi u sljedećem potpoglavlju.

Prema Teoremu 8 uvjeti (M1)–(M2) povlače (V1)–(V2) (uz $V := \mathrm{Ker}\,(D-M)$ i $\tilde{V} := \mathrm{Ker}\,(D+M^*)$). Postavlja se pitanje obrata: za dane $V$ i $\tilde{V}$ koji zadovoljavaju (V1)–(V2), postoji li operator $M \in \mathcal{L}(W;W')$ koji zadovoljava (M1)–(M2), te $V := \mathrm{Ker}\,(D-M)$ i $\tilde{V} := \mathrm{Ker}\,(D+M^*)$? Sljedeći rezultati (dokazani u [EGC]) daju nepotpun odgovor.

**Teorem 9.** *Neka su $V$ i $\tilde{V}$ dva potprostora prostora $W$ koji zadovoljavaju (V1)–(V2). Pretpostavimo da postoje operatori $P \in \mathcal{L}(W;V)$ i $Q \in \mathcal{L}(W,\tilde{V})$ takvi da je*

$$\begin{aligned} (\forall\, v \in V) \quad & D(v - Pv) = 0\,, \\ (\forall\, v \in \tilde{V}) \quad & D(v - Qv) = 0\,, \\ & DPQ = DQP\,. \end{aligned}$$

*Definirajmo $M \in \mathcal{L}(W;W')$ s*

$$\begin{aligned} {}_{W'}\langle\, Mu, v\,\rangle_W = {}& {}_{W'}\langle\, DPu, Pv\,\rangle_W - {}_{W'}\langle\, DQu, Qv\,\rangle_W \\ & + {}_{W'}\langle\, D(P+Q-PQ)u, v\,\rangle_W - {}_{W'}\langle\, Du, (P+Q-PQ)v\,\rangle_W\,, \end{aligned}$$

*za $u, v \in W$.*
*Tada je $V := \mathrm{Ker}\,(D-M)$, $\tilde{V} := \mathrm{Ker}\,(D+M^*)$, i $M$ zadovoljava (M1)–(M2).* ∎

Tehnički zahtjevan dokaz gornjeg teorema inspiriran je (Friedrichsovim) dokazom Teorema 4, te ga ovdje nećemo prikazati. Dok je u konačnodimenzionalnom slučaju (Teorem 4) egzistencija odgovarajućih projektora osigurana, autori rada [EGC] naglašavaju da nije jasno da li operatori $P$ i $Q$ iz prethodnog teorema uvijek postoje, te daju dovoljan uvjet za njihovo postojanje:

**Lema 18.** *Pretpostavimo da je $V + \tilde{V}$ zatvoreno. Tada postoje projektori $P : W \longrightarrow V$ i $Q : W \longrightarrow \tilde{V}$ takvi da je $PQ = QP$, te $M \in \mathcal{L}(W;W')$ može biti konstruiran kao u prethodnom teoremu.*

Dem. Ukoliko je $V + \tilde{V}$ zatvoreno, onda je $(V + \tilde{V}) \dot{+} S = W$, gdje je $S = (V + \tilde{V})^{\perp}$. Označimo s $V_1$ ortogonalni komplement prostora $V \cap \tilde{V}$ u $V$, te s $V_2$ ortogonalni komplement prostora $V \cap \tilde{V}$ u $\tilde{V}$ (svi ortogonalni komplementi su u odnosu na skalarni produkt $\langle \cdot \mid \cdot \rangle_T$). Zbog zatvorenosti prostora $V$ i $\tilde{V}$ je onda

$$W = V_1 \dot{+} (V \cap \tilde{V}) \dot{+} V_2 \dot{+} S\,.$$

Za dani $w \in W$, neka je $w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4$ rastav induciran gornjom direktnom sumom. Definiramo linearne operatore $P : W \longrightarrow V$ i $G : W \longrightarrow \tilde{V}$ s

$$Pw := w_1 + w_2 \qquad \text{i} \qquad Qw := w_2 + w_3\,.$$

Očito je da su $P$ i $Q$ projektori na $V$ i $\tilde{V}$, te da je $PQ = QP$, pa i zadovoljavaju uvjete Teorema 9.

**Q.E.D.**

Vidjet ćemo da $V + \tilde{V}$ ne mora biti uvijek zatvoreno, kao ni da operatori $P$ i $Q$ iz Teorema 9 ne moraju uvijek postojati Time je pitanje ekvivalencije uvjeta (V1)–(V2) u (M1)–(M2) još uvijek otvoreno.

### Pitanje zatvorenosti prostora $V + \tilde{V}$

Koristeći aparaturu Kreinovih prostora konstruirat ćemo primjer koji pokazuje da $V+\tilde{V}$ ne mora biti uvijek zatvoreno u $W$, te analizirati neke slučajeve kada jest zatvoreno.

Lako se vidi da za dva potprostora $V_1, V_2 \subseteq W$ vrijedi

$$\widehat{(V_1 + V_2)} = \{u + v + W_0 : u \in V_1, v \in V_2\} = \hat{V}_1 + \hat{V}_2 ,$$

pa ukoliko je i $W_0 \subseteq V_1 + V_2$, to je (Lema 14) $V_1 + V_2$ zatvoreno ako i samo ako je $\hat{V}_1 + \hat{V}_2$ zatvoreno.

**Teorem 10.** *Neka potprostori $V$ i $\tilde{V}$ prostora $W$ zadovoljavaju (V1)–(V2), $V \cap \tilde{V} = W_0$, te $W \neq V + \tilde{V}$. Tada $V + \tilde{V}$ nije zatvoreno u $W$.*

Dem. Zbog $V \cap \tilde{V} = W_0$ je $\hat{V} \cap \hat{\tilde{V}} = \{\hat{0}\}$, a iz (V2) i Leme 16 slijedi $\hat{\tilde{V}} = \widehat{V^{[\perp]}} = (\hat{V})^{[\perp]}$. Sada je prema Teoremu 5 (Dodatak) $\mathrm{Cl}\,(\hat{V} + \hat{\tilde{V}}) = \hat{W}$. Zbog $W \neq V + \tilde{V}$ i $V \cap \tilde{V} = W_0$ je i $\hat{V} + \hat{\tilde{V}} \neq \hat{W}$, pa slijedi da je $\hat{V} + \hat{\tilde{V}} \neq \mathrm{Cl}\,(\hat{V} + \hat{\tilde{V}})$, te stoga nije ni zatvoreno u $\hat{W}$. To povlači da ni $V + \tilde{V}$ nije zatvoreno u $W$.

**Q.E.D.**

**Napomena.** Uočimo da je u gornjem korolaru umjesto svojstava (V1)–(V2) dovoljno zahtijevati samo $\tilde{V} = V^{[\perp]}$.

∎

Gornji teorem daje polazište za konstrukciju primjera prostora koji zadovoljavaju (V1)–(V2), a čija suma nije zatvorena.

**Primjer 2.** Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen s Lipschitzovim rubom ($d > 1$), te $\mu \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ udaljena od nule (tj. $|\mu(\mathbf{x})| \geq \alpha_0 > 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$) ). Promotrimo skalarnu eliptičku jednadžbu

$$-\triangle u + \mu u = f ,$$

gdje je $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ zadana funkcija. Dana jednadžba se može zapisati kao sustav prvog reda

$$\begin{cases} \mathsf{p} + \nabla u = 0 \\ \mu u + \mathrm{div}\mathsf{p} = f \end{cases} ,$$

štoviše kao Friedrichsov sustav (pa vrijede (T1)–(T3)) uz sljedeći odabir matrica $\mathbf{A}_k$ ($k \in 1..d$) i $\mathbf{C}$:

$$(\mathbf{A}_k)_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in \{(k, d+1), (d+1, k)\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases} ;$$

$$(\mathbf{C})_{ij} = \begin{cases} \mu(x), & i = j = d+1 \\ 1, & i = j \neq d+1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases} .$$

Jednostavno se može provjeriti da je tada

$$\begin{aligned} W &= \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega) , \\ W_0 &= \mathrm{L}^2_{\mathrm{div},0}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \mathrm{Cl}\,_W \mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{R}^{d+1}) . \end{aligned}$$

Također je

$$[\,(\mathsf{p},u)^\top \mid (\mathsf{r},v)^\top\,] = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\,,$$

gdje su $\mathcal{T}_{\mathrm{div}} : \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \longrightarrow \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ i $\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} : \mathrm{H}^1(\Omega) \longrightarrow \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ operatori traga (vidi [EGC]).

Uzmimo $\alpha > 0$ fiksan i definirajmo skupove (koji zadaju Robinov rubni uvjet za polaznu jednadžbu)

$$\begin{aligned} V &:= \{(\mathsf{p},u)^\top \in W : \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p} = \alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\}\,, \\ \tilde{V} &:= \{(\mathsf{r},v)^\top \in W : \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r} = -\alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\}\,. \end{aligned}$$

Pokažimo sada da ovako definirani $V$ i $\tilde{V}$ zadovoljavaju uvjete Teorema 10. Dakle, potrebno je dokazati sljedeće:

a) $V$ i $\tilde{V}$ zadovoljavaju (V1)–(V2);
b) $V \cap \tilde{V} = W_0$;
c) $V + \tilde{V} \neq W$.

Krenimo redom:

**a)** Za $(\mathsf{p},u)^\top \in V$ je

$$\begin{aligned} [\,(\mathsf{p},u)^\top \mid (\mathsf{p},u)^\top\,] &= 2\,{}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \\ &= 2\alpha\,{}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 2\alpha\int\limits_{\partial\Omega}(\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u)^2 dS \geq 0\,, \end{aligned}$$

pa je $V \subseteq C^+$. Analogno se vidi i da je $\tilde{V} \subseteq C^-$, te je time (V1) dokazano.

Pokažimo sada da je $\tilde{V} = V^{[\perp]}$: uvjet $(\mathsf{r},v)^\top \in V^{[\perp]}$ je prema definiciji ekvivalentan s

$$(\forall\,(\mathsf{p},u)^\top \in V) \quad [\,(\mathsf{p},u)^\top \mid (\mathsf{r},v)^\top\,] = 0\,,$$

odnosno s

$$(\forall\,(\mathsf{p},u)^\top \in V) \qquad {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0\,.$$

Budući da je

$${}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \int\limits_{\partial\Omega}\alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v dS = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\,,$$

to slijedi

$$\begin{aligned} (\mathsf{r},v)^\top \in V^{[\perp]} \quad &\Longleftrightarrow \quad (\forall\,(\mathsf{p},u)^\top \in V) \quad {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r} + \alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad (\forall\, z \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)) \quad {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r} + \alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v, z\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r} + \alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathsf{r},v)^\top \in \tilde{V}\,. \end{aligned}$$

Analogno se pokaže da je $V = \tilde{V}^{[\perp]}$ i time je dokazano svojstvo (V2).

**b)** Za $(\mathsf{p},u)^\top \in W_0 = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div},0}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ je $\mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p} = \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u = 0$, pa slijedi i $(\mathsf{p},u)^\top \in V \cap \tilde{V}$. Obratno, ako je $(\mathsf{p},u)^\top \in V \cap \tilde{V}$, tada iz sustava

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p} &= \alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u \\ \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p} &= -\alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u \end{aligned}$$

slijedi $\mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{p} = \mathcal{T}_{\rm H^1}u = 0$, odnosno $(\mathsf{p}, u)^\top \in {\rm L}^2_{{\rm div},0}(\Omega) \times {\rm H}^1_0(\Omega) = W_0$.

**c)** Neka je $(\mathsf{s}, w)^\top \in W$ takav da je $\mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{s} \in {\rm H}^{-\frac12}(\partial\Omega) \setminus {\rm L}^2(\partial\Omega)$ (budući da je ${\rm Im}\,\mathcal{T}_{\rm div} = {\rm H}^{-\frac12}(\partial\Omega)$, da bi takav $\mathsf{s}$ postojao, nužno je i dovoljno da je $d > 1$). Kada bi postojali $(\mathsf{p}, u)^\top \in V$ i $(\mathsf{r}, v)^\top \in \tilde V$ takvi da je $(\mathsf{s}, w)^\top = (\mathsf{p}, u)^\top + (\mathsf{r}, v)^\top$, tada bi vrijedilo

$$\mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{s} = \mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{p} + \mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{r} = \alpha(\mathcal{T}_{\rm H^1}u - \mathcal{T}_{\rm H^1}v) \in {\rm L}^2(\partial\Omega)\,,$$

a to je kontradikcija s odabirom $\mathsf{s}$.

Teorem 10 povlači da za ovako odabrane $V$ i $\tilde V$ prostor $V + \tilde V$ nije zatvoren, odnosno svojstva (V1)–(V2) ne povlače zatvorenost prostora $V + \tilde V$. Štoviše, na ovome primjeru možemo vidjeti da niti svojstva (M1)–(M2) ne povlače (općenito) zatvorenost prostora $V + \tilde V$. U tu svrhu definirajmo operator $M \in \mathcal{L}(W; W')$ s

$$\begin{aligned} {}_{W'}\langle\, M(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \,\rangle_W = &- {}_{{\rm H}^{-\frac12}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\rm H^1}v \,\rangle_{{\rm H}^{\frac12}(\partial\Omega)} \\ &+ {}_{{\rm H}^{-\frac12}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\rm H^1}u \,\rangle_{{\rm H}^{\frac12}(\partial\Omega)} \\ &+ 2\alpha \int_{\partial\Omega} \mathcal{T}_{\rm H^1}u\,\mathcal{T}_{\rm H^1}v\,dS\,, \end{aligned}$$

te pokažimo da zadovoljava (M1)–(M2), $V = {\rm Ker}\,(D - M)$ i $\tilde V = {\rm Ker}\,(D + M^*)$. Zbog

$${}_{W'}\langle\, M(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{p}, u)^\top \,\rangle_W = 2\alpha \int_{\partial\Omega} (\mathcal{T}_{\rm H^1}u)^2 dS \geq 0$$

je zadovoljeno (M1).
Da bismo provjerili (M2), najprije moramo identificirati prostore ${\rm Ker}\,(D - M)$ i ${\rm Ker}\,(D + M)$. Zbog

$${}_{W'}\langle\, (D - M)(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \,\rangle_W = 2\,{}_{{\rm H}^{-\frac12}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{p} - \alpha\mathcal{T}_{\rm H^1}u, \mathcal{T}_{\rm H^1}v \,\rangle_{{\rm H}^{\frac12}(\partial\Omega)}$$

se lako vidi da je

$$(D - M)(\mathsf{p}, u)^\top = \mathsf{0} \quad\iff\quad \mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{p} - \alpha\mathcal{T}_{\rm H^1}u = 0 \quad\iff\quad (\mathsf{p}, u)^\top \in V\,,$$

odnosno ${\rm Ker}\,(D - M) = V$. Isto tako je

$${}_{W'}\langle\, (D + M)(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \,\rangle_W = 2\,{}_{{\rm H}^{-\frac12}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{r} + \alpha\mathcal{T}_{\rm H^1}v, \mathcal{T}_{\rm H^1}u \,\rangle_{{\rm H}^{\frac12}(\partial\Omega)}\,,$$

pa je (zbog ${\rm Im}\,\mathcal{T}_{\rm div} = {\rm H}^{-\frac12}(\partial\Omega)$)

$$(D + M)(\mathsf{p}, u)^\top = \mathsf{0} \quad\iff\quad \mathcal{T}_{\rm H^1}u = 0 \quad\iff\quad u \in {\rm H}^1_0(\Omega)\,,$$

odnosno ${\rm Ker}\,(D + M) = {\rm L}^2_{\rm div}(\Omega) \times {\rm H}^1_0(\Omega)$.

Pokažimo da je $W = V + {\rm L}^2_{\rm div}(\Omega) \times {\rm H}^1_0(\Omega)$. Zaista, za proizvoljan $(\mathsf{s}, w)^\top \in W$, odaberimo $u = 0$, $v = w$, $\mathsf{r} \in {\rm L}^2_{\rm div}(\Omega)$ takav da je $\mathcal{T}_{\rm div}\mathsf{r} = \alpha\mathcal{T}_{\rm H^1}v$, te $\mathsf{p} = \mathsf{s} - \mathsf{r}$. Sada se lako provjeri da je $(\mathsf{s}, w)^\top = (\mathsf{p}, u)^\top + (\mathsf{r}, v)^\top$, te da su $(\mathsf{p}, u)^\top \in V$, $(\mathsf{r}, v)^\top \in {\rm L}^2_{\rm div}(\Omega) \times {\rm H}^1_0(\Omega)$, čime je (M2) dokazano.

Da bismo dokazali da svojstva (M1)–(M2) ne povlače zatvorenost prostora $V+\tilde{V}$, potrebno je još samo pokazati da je $\operatorname{Ker}(D+M^*)=\tilde{V}$. Kako je

$$
\begin{aligned}
{}_{W'}\langle\, M^*(\mathsf{p},u)^\top,(\mathsf{r},v)^\top\,\rangle_W ={}& {}_{W'}\langle\, M(\mathsf{r},v)^\top,(\mathsf{p},u)^\top\,\rangle_W \\
={}& -{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r},\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega)} + {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p},\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega)} + 2\alpha\int_{\partial\Omega}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\,dS\,,
\end{aligned}
$$

to je

$$
{}_{W'}\langle\,(D+M^*)(\mathsf{p},u)^\top,(\mathsf{r},v)^\top\,\rangle_W = 2\,{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega)}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}+\alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u,\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega)}\,,
$$

a odavjde, kao i prije, lako slijedi $\operatorname{Ker}(D+M^*)=\tilde{V}$.

∎

Prethodni primjer pokazuje da ni uvjeti (V1)–(V2), niti (M1)–(M2), nisu dovoljni da bi $V+\tilde{V}$ bilo zatvoreno. U sljedećem odjeljku ćemo pokazati da za gornji primjer ne postoje operatori $P$ i $Q$ koji zadovoljavaju uvjete Teorema 9. Stoga je pitanje ekvivalencije uvjeta (V1)–(V2) i (M1)–(M2) i dalje otvoreno.

Sada ćemo promotriti slučaj kada $V+\tilde{V}$ jest zatvoreno.

**Teorem 11.** *Ako je* $\operatorname{codim} W_0 (=\dim W/W_0)$ *konačna, onda je za sve* $V$, $\tilde{V}$ *koji zadovoljavaju (V1)–(V2),* $V+\tilde{V}$ *zatvoreno.*

Dem. Kako je $V$ i $\tilde{V}$ zatvoreno u $W$, to je i $\hat{V}$, te $\hat{\tilde{V}}$ zatvoreno u $\hat{W}$. Budući da je $\dim\hat{W}$ konačna, to je i $\hat{V}+\hat{\tilde{V}}$ zatvoreno u $\hat{W}$, a to povlači tvrdnju.

**Q.E.D.**

**Lema 19.** *Neka je* $I=\langle a,b\rangle\subseteq\mathbf{R}$ *konačan interval. Tada je* $\dim \mathrm{H}^1(I)/\mathrm{H}^1_0(I)=2$.

Dem. Neka su $e,f\in\mathrm{H}^1(I)$ takve da je $e(a)=1$, $e(b)=0$, $f(a)=0$, i $f(b)=1$. Pokažimo da je skup $B:=\{\hat{e},\hat{f}\}$ baza za $\widehat{\mathrm{H}^1(I)}=\mathrm{H}^1(I)/\mathrm{H}^1_0(I)$. Kada bi $B$ bio linearno zavisan, onda bi iz $\hat{f}-\alpha\hat{e}=\hat{0}=\mathrm{H}^1_0(I)$ slijedilo da je $f-\alpha e\in\mathrm{H}^1_0(I)$, a to nije (jer je $(f-\alpha e)(b)=1$). Lako se vidi i da $B$ razapinje $\widehat{\mathrm{H}^1(I)}$, jer je za dani $g\in\mathrm{H}^1(I)$, $g-g(a)e-g(b)f\in\mathrm{H}^1_0(I)$, a to povlači

$$
\hat{g}=g(a)\hat{e}+g(b)\hat{f}\,.
$$

**Q.E.D.**

**Primjer 3.** Neka je $I=\langle a,b\rangle\subseteq\mathbf{R}$, te neka su operatori $T,\tilde{T}:\mathcal{D}(I)\longrightarrow\mathrm{L}^2(I)$ definirani formulama

$$
\begin{aligned}
Tu ={}& u'+\gamma u\,,\\
\tilde{T}u ={}& -u'+\gamma u\,,
\end{aligned}
$$

gdje je $\gamma>0$ konstanta. Tada se lako provjeri da $T$ i $\tilde{T}$ zadovoljavaju (T1)–(T3), te da je $W=\mathrm{H}^1(I)\hookrightarrow\mathrm{C}(I)$ i $W_0=\mathrm{H}^1_0(I)$. Također je

$$
[\,u\mid v\,]=u(b)v(b)-u(a)v(a)\,.
$$

Već nam je poznato (iz Teorema 11 i Leme 19) da je u ovom primjeru uvijek $V+\tilde{V}$ zatvoreno, čim $V$ i $\tilde{V}$ zadovoljavaju (V1)–(V2). Sada želimo napraviti potpunu klasifikaciju parova $(V,\tilde{V})$ koji zadovoljavaju (V1)–(V2) (za ovaj primjer). Pokazat će se da svega nekoliko parova dolazi u obzir. Prije nego li ih sve nabrojimo, uočimo da (V1) i (V2) imaju sljedeći zapis:

(V1)
$$\begin{aligned}(\forall\, u \in V) \quad u^2(b) - u^2(a) \geq 0\,,\\ (\forall\, v \in \tilde{V}) \quad v^2(b) - v^2(a) \leq 0\,,\end{aligned}$$

(V2)
$$\begin{aligned}\tilde{V} &= \{v \in \mathrm{H}^1(I) : (\forall\, u \in V) \quad u(b)v(b) - u(a)v(a) = 0\}\,,\\ V &= \{u \in \mathrm{H}^1(I) : (\forall\, v \in \tilde{V}) \quad u(b)v(b) - u(a)v(a) = 0\}\,.\end{aligned}$$

Primijetimo i da ne može biti $V = \mathrm{H}^1_0(I)$. Naime, tada bi iz (V2) slijedilo da je $\tilde{V} = \mathrm{H}^1(I)$, pa ne bi vrijedilo $\tilde{V} \subseteq C^-$. Analogno je i $\tilde{V} \neq \mathrm{H}^1(I)$.

**a)** Lako se može provjeriti da uz odabir

$$V = \tilde{V} = \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(a) = u(b)\} \qquad \text{ili} \qquad V = \tilde{V} = \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(a) = -u(b)\}$$

slijedi da par $(V, \tilde{V})$ zadovoljava (V1)–(V2), te je očito i $V + \tilde{V} = V = \tilde{V}$ zatvoreno.

**b)** Sljedeći par za koji je lako provjeriti da zadovoljava (V1)–(V2) je

$$\begin{aligned}V &= \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(a) = 0\}\,,\\ \tilde{V} &= \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(b) = 0\}\,.\end{aligned}$$

Ukoliko za proizvoljni $w \in \mathrm{H}^1(I)$ odaberemo $u \in \mathrm{H}^1(I)$ takav da je $u(a) = 0$ i $u(b) = w(b)$, te definiramo $v := w - u$, tada je očito $w = u + v$, a lako se provjeri da je $u \in V$ i $v \in \tilde{V}$, pa je $V + \tilde{V} = \mathrm{H}^1(I)$ zatvoreno.

**c)** Neka je $\alpha$ realna konstanta i $|\alpha| > 1$. Jednostavno se provjeri da

$$\begin{aligned}V &= \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(b) = \alpha u(a)\}\,,\\ \tilde{V} &= \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(b) = \frac{1}{\alpha} u(a)\}\,,\end{aligned}$$

zadovoljavaju (V1)–(V2). Pokažimo da je i u ovom slučaju $V + \tilde{V} = \mathrm{H}^1(I)$: za dani $w \in \mathrm{H}^1(I)$ odaberimo $u \in \mathrm{H}^1(I)$ takav da je

$$\begin{aligned}u(a) &= \frac{1}{\alpha^2+1}\Big(\alpha w(b) - w(a)\Big)\,,\\ u(b) = \alpha u(a) &= \frac{\alpha}{\alpha^2+1}\Big(\alpha w(b) - w(a)\Big)\,.\end{aligned}$$

Tada je očito $u \in V$. Definirajmo $v := w - u \in \mathrm{H}^1(I)$; vrijedi

$$\begin{aligned}v(a) &= w(a) - \frac{1}{\alpha^2+1}\Big(\alpha w(b) - w(a)\Big) = \frac{\alpha}{\alpha^2+1}\Big(\alpha w(a) - w(b)\Big)\,,\\ v(b) &= w(b) - \frac{\alpha}{\alpha^2+1}\Big(\alpha w(b) - w(a)\Big) = \frac{1}{\alpha^2+1}\Big(\alpha w(a) - w(b)\Big)\,,\end{aligned}$$

odakle slijedi $v(b) = \frac{1}{\alpha} v(a)$, odnosno $v \in \tilde{V}$.

Pokažimo sada da su nabrojani slučajevi i jedini koji se mogu pojaviti, odnosno da je svaki par $(V, \tilde{V})$ koji zadovoljava (V1)–(V2) nužno jednog od gornja tri oblika. Razlikujemo dva slučaja:

**I.** Neka je $V = \tilde{V}$. Tada (V1) povlači $u^2(b) = u^2(a)$, za svaki $u \in V$. Kako je $\mathrm{H}^1_0(I) \subset V$, to postoji $\bar{v} \in V \setminus \mathrm{H}^1_0(I)$ za koji je

$$\bar{v}(b) = \bar{v}(a) \neq 0 \qquad \text{ili} \qquad \bar{v}(b) = -\bar{v}(a) \neq 0\,.$$

Prema (V2) je onda

$$(\forall\, u \in V) \quad u(b)\bar{v}(b) = u(a)\bar{v}(a) \qquad \text{ili} \qquad (\forall\, u \in V) \quad u(b)\bar{v}(b) = -u(a)\bar{v}(a)\,,$$

pa slijedi

$$(\forall\, u \in V) \quad u(b) = u(a) \qquad \text{ili} \qquad (\forall\, u \in V) \quad u(b) = -u(a)\,,$$

odnosnu, uz oznaku

$$U^{\pm} = \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(a) = \pm u(b)\}\,,$$

vrijedi $V \subseteq U^+$ ili $V \subseteq U^-$. Promotrimo slučaj $V \subseteq U^+$: tada je i $(U^+)^{[\perp]} \subseteq V^{[\perp]} = V$ (zbog (V2)). Kako je i $(U^+)^{[\perp]} = U^+$ (pogledati (a)), to slijedi $U^+ = V$. Analogno se analizira slučaj $V \subseteq U^-$. Dakle, ako je $V = \tilde{V}$ onda je nužno oblika kao u primjeru (a).

**II.** Ako je $V \neq \tilde{V}$, onda razlikujemo dva podslučaja

**II.1.** Neka postoji $\bar{u} \in V$ takav da je $\bar{u}(a) \neq 0 \neq \bar{u}(b)$. Ako označimo $\alpha := \frac{\bar{u}(b)}{\bar{u}(a)} \neq 0$ (uočimo da (V1) povlači $|\alpha| > 1$), tada iz (V2) slijedi

$$(\forall\, v \in \tilde{V}) \quad v(b) = \frac{\bar{u}(a)}{\bar{u}(b)} v(a) = \frac{1}{\alpha} v(a)\,.$$

Budući da je $\mathrm{H}^1_0(I) \subset \tilde{V}$, to postoji $\bar{v} \in \tilde{V}$ takav da je $\bar{v}(b) = \frac{1}{\alpha}\bar{v}(a) \neq 0$. Opet primjenjujući (V2) dobivamo

$$(\forall\, u \in V) \quad u(b) = \frac{\bar{v}(a)}{\bar{v}(b)} v(a) = \alpha u(a)\,.$$

Stoga, uz oznake

$$\begin{aligned} V_\alpha &= \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(b) = \alpha u(a)\}\,,\\ \tilde{V}_\alpha &= \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(b) = \frac{1}{\alpha} u(a)\}\,, \end{aligned}$$

$|\alpha| > 1$, vrijedi $V \subseteq V_\alpha$ i $\tilde{V} \subseteq \tilde{V}_\alpha$. Također, iz (c) znamo da je $V_\alpha = \tilde{V}_\alpha^{[\perp]}$ i $\tilde{V}_\alpha = V_\alpha^{[\perp]}$. Sada iz (V2) lako slijedi $\tilde{V}_\alpha = V_\alpha^{[\perp]} \subseteq V^{[\perp]} = \tilde{V}$, te $V_\alpha = \tilde{V}_\alpha^{[\perp]} \subseteq \tilde{V}^{[\perp]} = V$, odnosno $V = V_\alpha$ i $\tilde{V} = \tilde{V}_\alpha$.

**II.2.** Neka za svaki $u \in V$ vrijedi $u(a) = 0$ ili $u(b) = 0$. Zbog $V \neq \mathrm{H}^1_0(I)$ i (V1) postoji $\bar{u} \in V$ takav da je $\bar{u}(a) = 0$ i $\bar{u}(b) \neq 0$. Sada (V2) povlači

$$(\forall\, v \in \tilde{V}) \quad v(b)\bar{u}(b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\forall\, v \in \tilde{V}) \quad v(b) = 0\,,$$

pa ako uzmemo $\bar{v} \in \tilde{V}$ za koji je $\bar{v}(a) \neq 0$, slijedi (opet iz (V2))

$$(\forall\, u \in V) \quad u(a)\bar{v}(a) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\forall\, u \in V) \quad u(a) = 0\,,$$

odnosno $V \subseteq U_a$ i $\tilde{V} \subseteq U_b$, gdje su

$$\begin{aligned} U_a &= \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(a) = 0\}\,,\\ U_b &= \{u \in \mathrm{H}^1(I) : u(b) = 0\}\,. \end{aligned}$$

Sada slično kao prije, koristeći (b) dobivamo $V = U_a$ i $\tilde{V} = U_b$.

Time je napravljena potpuna klasifikacija parova $(V, \tilde{V})$ koji zadovoljavaju (V1)–(V2) za ovaj primjer.

$\blacksquare$

**Primjer 4.** Neka je $I = \langle a,b\rangle \subseteq \mathbf{R}$, te neka su dane matrične funkcije $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top \in \mathrm{W}^{1,\infty}(I;\mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ i $\mathbf{C} \in \mathrm{L}^\infty(I;\mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$, takve da je

$$\mathbf{C} + \mathbf{C}^\top - \mathbf{A}' \geq \mu_0 \mathbf{I}\,,$$

za neku konstantu $\mu_0 > 0$. Tada se lako provjeri da preslikavanja $T$ i $\tilde{T}$, definirana s

$$\begin{aligned} Tu :=& \mathbf{A}u' + \mathbf{C}u\,, \\ \tilde{T}u :=& -\mathbf{A}^\top u' + (\mathbf{C}^\top - \mathbf{A}^\top)u \end{aligned}$$

zadovoljavaju (T1)–(T3). Neka je dodatno $\mathbf{A}(x)$ regularna (ss $x \in I$), te neka je $\mathbf{A}^{-1} \in \mathrm{L}^\infty(I;\mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$. Tada iz uvjeta

$$u \in \mathrm{L}^2(I;\mathbf{R}^r) \quad \text{i} \quad Tu = f \in \mathrm{L}^2(I;\mathbf{R}^r)$$

slijedi

$$u' = \mathbf{A}^{-1}(f - \mathbf{C}u) \in \mathrm{L}^2(I;\mathbf{R}^r)\,,$$

odnosno $u \in \mathrm{H}^1(I;\mathbf{R}^r)$. Dakle, $W = \mathrm{H}^1(I;\mathbf{R}^r)$ i $W_0 = \mathrm{H}^1_0(I;\mathbf{R}^r)$, pa se lako vidi da je

$$W/W_0 \cong \Big(\mathrm{H}^1(I)/\mathrm{H}^1_0(I)\Big)^r\,,$$

što povlači

$$\dim W/W_0 = 2^r < \infty\,.$$

Stoga je i za ovaj primjer $V + \tilde{V}$ zatvoreno čim $V$ i $\tilde{V}$ zadovoljavaju (V1)–(V2). ∎

### Pitanje egzistencije operatora $P$ i $Q$

**Teorem 12.** *Neka su $V$ i $\tilde{V}$ dva potprostora prostora $W$ koji zadovoljavaju (V1)–(V2), i pretpostavimo da postoje operatori $P \in \mathcal{L}(W;V)$ i $Q \in \mathcal{L}(W,\tilde{V})$, takvi da je*

$$\begin{aligned} (\forall\, v \in V) &\quad D(v - Pv) = 0\,, \\ (\forall\, v \in \tilde{V}) &\quad D(v - Qv) = 0\,, \\ &\quad DPQ = DQP\,. \end{aligned} \tag{3}$$

*Tada su formulama*

$$\hat{P}\hat{w} := \widehat{Pw}\,, \quad \hat{Q}\hat{w} := \widehat{Qw}\,, \quad w \in W$$

*dobro definirani projektori $\hat{P}, \hat{Q} : \hat{W} \longrightarrow \hat{W}$, koji zadovoljavaju*

$$\begin{aligned} \hat{P}^2 = \hat{P} \quad &i \quad \hat{Q}^2 = \hat{Q}\,, \\ \mathrm{Im}\,\hat{P} = \hat{V} \quad &i \quad \mathrm{Im}\,\hat{Q} = \hat{\tilde{V}}\,, \\ \hat{P}\hat{Q} &= \hat{Q}\hat{P}\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Dem. Većinu tvrdnji ćemo dokazati za operator $\hat{P}$, dok se za $\hat{Q}$ dokazi provode analogno.

**a)** Pokažimo da je $\hat{P}$ dobro definiran. Iz $(3_1)$ i $W_0 \subseteq V$ dobivamo

$$(\forall\, v_0 \in W_0) \quad DPv_0 = Dv_0 = 0\,,$$

pa je $Pv_0 \in \mathrm{Ker}\, D = W_0$, što povlači da je $W_0$ invarijantan na $P$. To povlači da za proizvoljne $u, v \in W$, takve da je $\hat{u} = \hat{v}$, vrijedi $P(u - v) \in W_0$, odnosno $\widehat{Pu} = \widehat{Pv}$, pa je $\hat{P}$ dobro definiran.

**b)** Pokažimo da je $\hat{P} \in \mathcal{L}(\hat{W};\hat{W})$: označimo s $\pi \in \mathcal{L}(W;\hat{W})$ kanonsku projekciju definiranu s $\pi w := \hat{w}$. Budući da su $P$ i $\pi$ linearni, to se lako provjeri da je i $\hat{P}$ linearan. Slično slijedi i neprekidnost: za dane $w, u \in W$, takve da je $\hat{u} = \hat{w}$ je

$$\|\hat{P}\hat{w}\|_{\hat{W}} = \|\pi \circ Pu\|_{\hat{W}} \leq \|\pi\|_{\mathcal{L}(W;\hat{W})}\|P\|_{\mathcal{L}(W;W)}\|u\|_W \,,$$

pa iz definicije norme na $\hat{W}$ slijedi neprekidnost operatora $\hat{P}$.

**c)** Pokažimo $\hat{P}^2 = \hat{P}$: iz $(3_1)$ slijedi da je $v - Pv \in W_0$, čim je $v \in V$. Stoga je za takav $v$ i $\hat{P}\hat{v} = \widehat{Pv} = \hat{v}$, odnosno

$$(\forall\, \hat{v} \in \hat{V}) \quad \hat{P}\hat{v} = \hat{v}\,. \tag{5}$$

Odavdje lako slijedi da je $\hat{P}^2 = \hat{P}$.

**d)** Pokažimo $\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P}$: $(3_3)$ povlači

$$(\forall\, w \in W) \quad PQw - QPw \in W_0\,,$$

pa je i $\widehat{PQw} = \widehat{QPw}$. Budući da je

$$\widehat{PQw} = \hat{P}\widehat{Qw} = \hat{P}\hat{Q}\hat{w} \qquad \text{i} \qquad \widehat{QPw} = \hat{Q}\widehat{Pw} = \hat{Q}\hat{P}\hat{w}\,,$$

to slijedi tvrdnja.

**e)** Pokažimo da je $\mathrm{Im}\,\hat{P} = \hat{V}$: iz $\mathrm{Im}\,P \subseteq V$ slijedi $\mathrm{Im}\,\hat{P} \subseteq \hat{V}$, a zbog (5) je i $\mathrm{Im}\,\hat{P} \supseteq \hat{V}$.

**Q.E.D.**

**Teorem 13.** *Neka su $V$ i $\tilde{V}$ dva potprostora prostora $W$ koji zadovoljavaju (V1)–(V2), te neka je $V \cap \tilde{V} = W_0$, $V + \tilde{V} \neq W$. Tada ne postoje operatori $P$ i $Q$, takvi da zadovoljavaju uvjete prethodnog teorema.*

Dem. Pretpostavimo da takvi operatori postoje i da su $\hat{P}, \hat{Q}$ definirani kao u prethodnom teoremu. Lema 14 povlači da su $\hat{V}$ i $\hat{\tilde{V}}$ zatvoreni, dok iz dokaza Teorema 10 slijedi

$$\hat{V} \cap \hat{\tilde{V}} = \{\hat{0}\}\,, \qquad \hat{V} \dotplus \hat{\tilde{V}} \neq \hat{W}\,, \qquad \mathrm{Cl}\,(\hat{V} \dotplus \hat{\tilde{V}}) = \hat{W}\,. \tag{6}$$

Iz $(6_1)$, $(4_2)$ i $(4_3)$ slijedi $\hat{P}\hat{Q} = \hat{Q}\hat{P} = 0$, te

$$\begin{aligned} &(\forall\, \hat{v} \in \hat{V}) \quad \hat{Q}\hat{v} = 0\,,\\ &(\forall\, \hat{v} \in \hat{\tilde{V}}) \quad \hat{P}\hat{v} = 0\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Za dani $\hat{w} \in \hat{W}$ neka je $\hat{w}_n$ niz u $\hat{V} \dotplus \hat{\tilde{V}}$ koji konvergira k $\hat{w}$ u $\hat{W}$, te neka je

$$\hat{w}_n = \hat{u}_n + \hat{v}_n\,, \qquad \hat{u}_n \in \hat{V}\,, \hat{v}_n \in \hat{\tilde{V}}$$

rastav u skladu s direktnom sumom u $(6_2)$. Sada iz neprekinutosti operatora $\hat{P}$ i $(7_2)$ slijedi

$$\hat{P}\hat{w} = \lim_n \hat{P}\hat{w}_n = \lim_n (\hat{P}\hat{u}_n + \hat{P}\hat{v}_n) = \lim_n \hat{P}\hat{u}_n = \lim_n \hat{u}_n\,,$$

te analogno

$$\hat{Q}\hat{w} = \lim_n \hat{v}_n\,.$$

Stoga je i

$$(\hat{P} + \hat{Q})\hat{w} = \lim_n \hat{u}_n + \lim_n \hat{v}_n = \lim_n (\hat{u}_n + \hat{v}_n) = \hat{w}\,,$$

što povlači da je $\hat{P} + \hat{Q}$ identiteta na $\hat{W}$, a to je u kontradikciji s $(4_2)$ i $(6_2)$.

**Q.E.D.**

S obzirom da smo prije već konstruirali primjer koji zadovoljava uvjete prethodnog teorema (Primjer 2), to slijedi da $P$ i $Q$ ne moraju uvjek postojati. Uprkos tome u Primjeru 2 smo vidjeli da operator $M$ ipak postoji. Stoga Teorem 9 nije jedini mogući način konstruiranja operatora $M$, te je pitanje ekvivalencije uvjeta (V1)–(V2) i uvjeta (M1)–(M2) i dalje otvoreno.

## 4. Odnos između matričnog polja i rubnog operatora

U preostalom dijelu ovog poglavlja uzimamo da je operator $T$ jednak Friedrichsovom operatoru

$$\mathcal{L}\mathsf{u} := \sum_{k=1}^{d} \partial_k(\mathbf{A}_k\mathsf{u}) + \mathbf{C}\mathsf{u}\,,$$

te da vrijede pretpostavke s početka ovog poglavlja. Vidjeli smo da su u klasičnom Friedrichsovom pristupu rubni uvjeti zadavani pomoću omeđene matrične funkcije $\mathbf{M} : \partial\Omega \longrightarrow \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$, koja za skoro svaki $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ zadovoljava

$$\text{(FM1)} \qquad (\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^r) \quad \mathbf{M}(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} \geq 0\,,$$

$$\text{(FM2)} \qquad \mathbf{R}^r = \mathrm{Ker}\,\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x})\Big) + \mathrm{Ker}\,\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}(\mathbf{x})\Big)\,.$$

Izrazom

$$\Big(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) - \mathbf{M}(\mathbf{x})\Big)\mathsf{u}(\mathbf{x}) = 0\,, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega\,,$$

se onda zadaju rubni uvjeti.

Da bi se bolje razumio odnos između rezultata egzistencije i jedinstvenosti za Friedrichsove sustave objavljenih u [EGC] i nekih ranije poznatih rezultata (vidi [Fr], [J], [Ra1], [Ra2]), korisno bi bilo shvatiti odnose između matrične funkcije $\mathbf{M}$ koja zadovoljava (FM1)–(FM2) i uvjeta (M1)–(M2) za rubni operator $M$. Preciznije, bilo bi zanimljivo istražiti određuje li matrično polje $\mathbf{M}$ operator $M$ na neki razuman način, te povlače li uvjeti (FM1)–(FM2) uvjete (M1)–(M2). S obzirom na već viđenu reprezentaciju rubnog operatora $D$ preko matrične funkcije $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$:

$${}_{W'}\langle\, D\mathsf{u}, \mathsf{v}\,\rangle_W = \int_{\partial\Omega} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\mathsf{u}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x})\cdot\mathsf{v}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x})dS(\mathbf{x})\,, \qquad \mathsf{u},\mathsf{v} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)\,,$$

razumno je očekivati operator $M$ oblika

$$\text{(8)} \qquad {}_{W'}\langle\, M\mathsf{u}, \mathsf{v}\,\rangle_W = \int_{\partial\Omega} \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathsf{u}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x})\cdot\mathsf{v}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x})dS(\mathbf{x})\,, \qquad \mathsf{u},\mathsf{v} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)\,.$$

Da bi gornjom formulom bio zadan jedinstven operator iz $\mathcal{L}(W;W')$, nužno je i dovoljno da postoji $C > 0$ takav da

$$\text{(9)} \qquad (\forall\, \mathsf{u},\mathsf{v} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)) \qquad \Big|\int_{\partial\Omega} \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathsf{u}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x})\cdot\mathsf{v}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x})dS(\mathbf{x})\Big| \leq C\|\mathsf{u}\|_W\|\mathsf{v}\|_W\,,$$

gdje je sada $W = \mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega;\mathbf{R}^r)$. Međutim, sami uvjeti (FM1)–(FM2) nisu dovoljni da bi taj uvjet bio ispunjen, kao što će se vidjeti iz primjera koji slijedi.

**Primjer 5.** Neka je $\Omega := \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle \subseteq \mathbf{R}^2$ otvoren jedinični kvadrat u prvom kvadrantu, te neka se $\Gamma_1 := \langle 0,1\rangle \times \{0\}$, $\Gamma_2 := \{1\} \times \langle 0,1\rangle$, $\Gamma_3 := \langle 0,1\rangle \times \{1\}$ i $\Gamma_4 := \{1\} \times \langle 0,1\rangle$ označavaju njegove stranice (bez vrhova). Nadalje, neka su operatori $\mathcal{L}$ i $\tilde{\mathcal{L}}$ definirani s

$$\mathcal{L}\mathsf{u} := \partial_2(\mathbf{A}_2\mathsf{u}) + \mathbf{C}\mathsf{u}\,, \qquad \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{u} := -\partial_2(\mathbf{A}_2^\top\mathsf{u}) + (\mathbf{C}^\top + \partial_2\mathbf{A}_2^\top)\mathsf{u}\,,$$

gdje su

$$\mathbf{A}_2(x_1,x_2) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}}(x_2-1) & -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}}(x_2-1) \\ -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}}(x_2-1) & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathrm{M}_2(\mathbf{R}))\,,$$

$$\mathbf{C}(x_1,x_2) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}} + \varepsilon(x_1,x_2) & -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}} \\ -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}} & \varepsilon(x_1,x_2) \end{bmatrix} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathrm{M}_2(\mathbf{R}))\,,$$

za neki $\varepsilon \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, takav da je $\varepsilon \geq 4\mu_0 > 0$ skoro svuda. Lako se može provjeriti da su tada zadovoljeni uvjeti (F1)–(F2), pa je stoga $\mathcal{L}$ Friedrichsov operator.

Ako definiramo

$$\mathbf{M}(x_1,x_2) = \begin{cases} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}} & -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}} \\ -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}} & 2 \end{bmatrix}, & \text{na} \quad \Gamma_1 \\ \mathbf{0}, & \text{na} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \end{cases} \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega;\mathrm{M}_2(\mathbf{R}))\,,$$

lako se provjeri da vrijedi (FM1). Budući da je

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(x_1,x_2) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}} & -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}} \\ -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}} & 0 \end{bmatrix}, & \text{na} \quad \Gamma_1 \\ \mathbf{0}, & \text{na} \quad \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \end{cases},$$

to je na $\Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M} = \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M} = \mathbf{0}\,,$$

te je tu i (FM2) trivijalno zadovoljeno. Na $\Gamma_1$ je

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M} = -\begin{bmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}} & -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}} \\ -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

pa se jednostavno provjeri da je za $(x_1,0) \in \Gamma_1$

$$\mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})(x_1,0) = \{(y_1,y_2)^\top \in \mathbf{R}^2 : y_2 = -\mathrm{e}^{-\frac{1}{x_1}}y_1\}\,,$$
$$\mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})(x_1,0) = \{(y_1,y_2)^\top \in \mathbf{R}^2 : y_2 = 0\}\,,$$

te stoga očito vrijedi (FM2) i na $\Gamma_1$.

Pokažimo sada da pripadni operator $M$ nije neprekinut, odnosno da ne vrijedi (9). Ako odaberemo $\mathsf{u}$ i $\mathsf{v}$ takve da je $\mathsf{u} = \mathsf{v} = (0,u_2)^\top$, dobivamo

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathsf{u}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x}) \cdot \mathsf{v}_{|_{\partial\Omega}}(\mathbf{x})dS(\mathbf{x}) = \int_0^1 u_2(x_1,0)dx_1\,,$$

te

$$
\begin{aligned}
\|u\|_W^2 &= \int_\Omega u_2^2 + \frac{1}{16}\int_\Omega \Big(\mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}} + \varepsilon(\mathbf{x})\Big) u_2^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&\quad + 4\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}}(x_2-1)\partial_2 u_2(\mathbf{x})\Big(u_2(\mathbf{x}) + (x_2-1)\partial_2 u_2(\mathbf{x})\Big) d\mathbf{x} \\
&\quad \le C_1 \underbrace{\int_\Omega u_2^2}_{I_1} + \frac{1}{4}\underbrace{\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}}(x_2-1)u_2(\mathbf{x})\partial_2 u_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}_{I_2} + \frac{1}{4}\underbrace{\int_\Omega \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}}(x_2-1)^2(\partial_2 u_2(\mathbf{x}))^2 d\mathbf{x}}_{I_3} ,
\end{aligned}
$$

za neki $C_1 > 0$. Uz poseban odabir $u_2(x_1, x_2) = (1-x_1)^m(1-x_2)^m$, $m \in \mathbf{N}$, je

$$
\int_{\partial\Omega} \mathbf{M}(\mathbf{x})\mathsf{u}_{|\partial\Omega}(\mathbf{x}) \cdot \mathsf{u}_{|\partial\Omega}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = \frac{1}{2m+1} ,
$$

dok je

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(2m+1)^2} , \\
I_2 &= \frac{m}{2m+1}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}}(1-x_1)^{2m} dx_1 , \\
I_3 &= \frac{m^2}{2m+1}\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}}(1-x_1)^{2m} dx_1 .
\end{aligned}
$$

Nakon što se lakim računom pokaže da za svaki $m$ počevši od nekog vrijedi

$$
\int_0^1 \mathrm{e}^{-\frac{2}{x_1}}(1-x_1)^{2m} dx_1 \le \frac{1}{m^3} ,
$$

dobivamo da je

$$
\|\mathsf{u}\|_W^2 \le C_2 \frac{1}{2m+1}\Big(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\Big) = C_2\Big(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}\Big)\int_{\partial\Omega} \mathbf{M}\mathsf{u}\cdot\mathsf{u}\, dS ,
$$

za neki $C_2 > 0$, te stoga (9) ne vrijedi i formulom (8) ne može biti zadano neprekinuto preslikavanje s $W$ u $W'$. ∎

Očito uvjeti (FM1)–(FM2) nisu dovoljni da bi formulom (8) bio definiran operator $M \in \mathcal{L}(W; W')$. U svrhu pronalaženja dodatnih uvjeta koji će biti dovoljni, korisna će nam biti sljedeća lema.

**Lema 20.** *Ako je $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ Lipschitzova funkcija, onda je preslikavanje $\mathsf{u} \mapsto f\mathsf{u}$ neprekinut linearan operator na $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{R}^r)$.*

Dem. Budući da je $\mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^r)$ gusto u $\mathrm{H}^{\mathcal{L}}(\Omega; \mathbf{R}^r)$, to je dovoljno pokazati da postoji konstanta $C > 0$, takva da vrijedi

$$
\|f\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}} \le C\|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}} ,
$$

za svaki $\mathsf{u} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^r)$. Za takav $\mathsf{u}$ jednostavno se vidi da je

$$\|f\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)} \le \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \|\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)} ,$$

a ako označimo

$$A := \max_{k\in 1..d} \|\mathbf{A}_k\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathrm{M}_r(\mathbf{R}))} ,$$

upotrebom Leibnitzove formule (Lema 2.b iz prvog poglavlja) dobivamo

$$\begin{aligned}\|\mathcal{L}(f\mathsf{u})\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)} &= \Big\|\sum_{k=1}^d (\partial_k f)\mathbf{A}_k\mathsf{u} + f\sum_{k=1}^d \partial_k(\mathbf{A}_k\mathsf{u}) + f\mathbf{C}\mathsf{u}\Big\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)} \\ &\le C_1 A \|\nabla f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega;\mathbf{R}^d)} \|\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)} + \|f\|_{\mathrm{L}^\infty(\Omega)} \|\mathcal{L}\mathsf{u}\|_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)} \\ &\le C_2 \|f\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}} ,\end{aligned}$$

za neke pozitivne konstante $C_1, C_2$ koje ne ovise o $\mathsf{u}$. Sada lako slijedi

$$\|f\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}} = \sqrt{\|f\mathsf{u}\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)} + \|\mathcal{L}(f\mathsf{u})\|^2_{\mathrm{L}^2(\Omega;\mathbf{R}^r)}} \le C_3 \|f\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega)} \|\mathsf{u}\|_{\mathcal{L}} ,$$

za neku konstantu $C_3 > 0$, čime je tvrdnja dokazana.

**Q.E.D.**

**Teorem 14.** *Neka matrično polje* $\mathbf{M} \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ *zadovoljava (FM1)–(FM2), te neka su* $\mathbf{Q}_+$ *i* $\mathbf{Q}_-$ *projekcije iz Korolara 1. Pretpostavimo dodatno da su* $\mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_- \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$. *Tada je izrazom (8) definiram operator* $M \in \mathcal{L}(W; W')$.

Dem. Budući da su $\mathbf{Q}_+, \mathbf{Q}_- : \partial\Omega \longrightarrow \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$ Lipschitzova preslikavanja, to se prema Kirszbraunovom teoremu [Fe, §2.10.43] mogu proširiti do Lipschitzovih preslikavanja definiranih na cijelom $\mathbf{R}^d$. Prema Korolaru 1 je

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = (\mathbf{I} - 2\mathbf{Q}_-(\mathbf{x}))\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) \qquad (\text{ss } \mathbf{x} \in \partial\Omega) ,$$

pa za $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathrm{C}^\infty_c(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)$ vrijedi

$$\Big|\int_{\partial\Omega} \mathbf{M}\mathsf{u}\cdot\mathsf{v}dS\Big| = \Big|\int_{\partial\Omega} (\mathbf{I} - 2\mathbf{Q}_-)\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathsf{u}\cdot\mathsf{v}dS\Big| = \Big|\int_{\partial\Omega} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathsf{u}\cdot(\mathbf{I} - 2\mathbf{Q}_-^\top)\mathsf{v}dS\Big| .$$

Upotrebom Teorema 6 iz prvog poglavlja dobivamo

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\partial\Omega} \mathbf{M}\mathsf{u}\cdot\mathsf{v}dS\Big| &= \Big|\langle\, \mathcal{L}\mathsf{u} \mid (\mathbf{I} - 2\mathbf{Q}_-^\top)\mathsf{v}\,\rangle_L - \langle\, \mathsf{u} \mid \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{I} - 2\mathbf{Q}_-^\top)\mathsf{v}\,\rangle_L\Big| \\ &= \Big|{}_{W'}\langle\, D\mathsf{u}, (\mathbf{I} - 2\mathbf{Q}_-^\top)\mathsf{v}\,\rangle_W\Big| \\ &\le \|D\|_{\mathcal{L}(W;W')} \cdot \|\mathsf{u}\|_W \cdot \|(\mathbf{I} - 2\mathbf{Q}_-^\top)\mathsf{v}\|_W .\end{aligned}$$

Iz pretpostavke da je $\mathbf{Q}_-$ Lipschitzova funkcija i prethodne leme slijedi da postoji konstanta $C > 0$ koja ne ovisi o $\mathsf{u}$ i $\mathsf{v}$, takva da je

$$\Big|\int_{\partial\Omega} \mathbf{M}\mathsf{u}\cdot\mathsf{v}dS\Big| \le C\|\mathsf{u}\|_W \cdot \|\mathsf{v}\|_W ,$$

čime je dokaz završen.

**Q.E.D.**

Gornji teorem daje dovoljne uvjete da bi $M$ bio neprekinut s $W$ u $W'$. Za Primjer 5 se jednostavno provjeri da na $\Gamma_1$ projektori $\mathbf{Q}_-$ i $\mathbf{Q}_+$ poprimaju vrijednosti

$$\mathbf{Q}_-(x_1,x_2) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\mathrm{e}^{\frac{1}{x_1}} & 0 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{Q}_+(x_1,x_2) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{\frac{1}{x_1}} & 1 \end{bmatrix},$$

pa ne zadovoljavaju uvjete Teorema 14 (nisu čak ni omeđene funkcije).

Sada ćemo dati dovoljne uvjete da bi bilo zadovoljeno (M1)–(M2). Uočimo odmah da je uvjet (M1) ispunjen čim je $M$ neprekinut: iz izraza (8) i (FM1) slijedi

$$(\forall \mathsf{u} \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)) \qquad {}_{W'}\langle\, M\mathsf{u}, \mathsf{u}\,\rangle_W \geq 0\,,$$

a kako je $\mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)$ gusto u $W$ i $M$ neprekinut, to gornja tvrdnja vrijedi i za $\mathsf{u} \in W$.

Za pronalaženje uvjeta koji osiguravaju da vrijedi i svojstvo (M2) koristit ćemo sljedeću lemu.

**Lema 21.** *[Tr2, str. 205] Ako je* $\mathbf{P} \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega;\mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$, *onda je preslikavanje* $\mathsf{z} \mapsto \mathbf{P}\mathsf{z}$ *neprekinut linearan operator na* $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)$. ∎

Označimo s $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r))$ preslikavanje iz gornje leme definirano s

$$\mathcal{P}(\mathsf{z}) := \mathbf{P}\mathsf{z}\,, \qquad \mathsf{z} \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)\,, \tag{10}$$

i s $\mathcal{P}^* \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r))$ njegov adjungirani operator definiran s

$${}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{P}^*T, \mathsf{z}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} := {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, T, \mathcal{P}\mathsf{z}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}}\,, \qquad T \in \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)\,,\ \mathsf{z} \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)\,.$$

**Lema 22.** *Neka su* $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega;\mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ *takvi da* $\mathbf{P}_1(\mathbf{x})$ *i* $\mathbf{P}_2(\mathbf{x})$ *čine par projekcija* (ss $\mathbf{x} \in \partial\Omega$). *Označimo s* $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r))$ *operatore pridružene redom matričnim poljima* $\mathbf{P}_1$ *i* $\mathbf{P}_2$ *kao gore, te s* $\mathcal{P}_1^*, \mathcal{P}_2^*$ *njihove adjungirane operatore. Tada vrijedi:*

*a) Operator* $\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$ *je identiteta, a* $\mathcal{P}_1 \circ \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \circ \mathcal{P}_1$ *nul-operator na* $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)$*;*

*b) Operator* $\mathcal{P}_1^* + \mathcal{P}_2^*$ *je identiteta, a* $\mathcal{P}_1^* \circ \mathcal{P}_2^* = \mathcal{P}_2^* \circ \mathcal{P}_1^*$ *nul-operator na* $\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)$.

Dem. Tvrdnja (a) je posljedica toga što za skoro svaki $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ vrijedi

$$\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{P}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \quad \text{i} \quad \mathbf{P}_1(\mathbf{x})\mathbf{P}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_2(\mathbf{x})\mathbf{P}_1(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\,,$$

dok (b) slijedi iz (a) i definicije adjungiranog operatora.

**Q.E.D.**

**Teorem 15.** *Neka matrično polje* $\mathbf{M} \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Omega;\mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ *zadovoljava (FM1)–(FM2), te neka su* $\mathbf{S}_+$ *i* $\mathbf{S}_-$ *matrične funkcije koje (kao u dokazu Korolara 1) za skoro svaki* $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ *čine par projekcija i zadovoljavaju*

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{S}_+^\top(\mathbf{x})\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x}) \qquad i \qquad (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})(\mathbf{x}) = 2\mathbf{S}_-^\top(\mathbf{x})\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{x})\,.$$

*Pretpostavimo li dodatno da su* $\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_- \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega;\mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$, *onda je izrazom (8) definiran operator* $M \in \mathcal{L}(W;W')$ *koji zadovoljava (M1).*

*Ako s* $\mathcal{S}_+ \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r))$ *označimo operator pridružen matričnom polju* $\mathbf{S}_+$ *kao u (10), s* $\mathcal{S}_+^*$ *njegov adjungirani operator, a s* $\mathcal{T} : W \longrightarrow \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)$ *operator traga definiran u prvom poglavlju, onda je uvjet* $\mathcal{S}_+(\mathrm{Im}\,\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{Im}\,\mathcal{T}$ *dovoljan da bi vrijedilo svojstvo (M2).*

Dem. Ako su $\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_- \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$, onda iz Teorema 14 slijedi da je $M \in \mathcal{L}(W; W')$. Vidjeli smo da tada vrijedi i (M1), pa preostaje dokazati (M2). Za to će nam biti korisno prikazati operatore $D$ i $M$ pomoću operatora traga $\mathcal{T}$. Iz definicije operatora $D$ i $\mathcal{T}$, te Teorema 6 iz prvog poglavlja slijedi da za $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^r)$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
{}_{W'}\langle D\mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle_W &= \langle \mathcal{L}\mathsf{u} \mid \mathsf{v} \rangle_L - \langle \mathsf{u} \mid \tilde{\mathcal{L}}\mathsf{v} \rangle_L \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle \mathcal{T}\mathsf{u}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} ,
\end{aligned} \tag{11}
$$

gdje je $\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} : \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^r) \longrightarrow \mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{R}^r)$ operator traga. Budući da je $\mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^r)$ gusto u $W$, a $D$ i $\mathcal{T}$ su neprekinuti, to se lako vidi da (11) vrijedi i za $\mathsf{u} \in W$.

Označimo sa $\mathcal{S}_- \in \mathcal{L}(\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{R}^r))$ operator pridružen matričnom polju $\mathbf{S}_-$ kao u (10), te sa $\mathcal{S}_-^*$ njegov adjungirani operator. Iz (8) i definicije operatora $\mathcal{T}$ slijedi da za $\mathsf{u}, \mathsf{v} \in \mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{R}^r)$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
{}_{W'}\langle M\mathsf{u}, \mathsf{v} \rangle_W &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}\mathsf{u} \cdot (\mathbf{I} - 2\mathbf{S}_-)\mathsf{v}\, dS \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle \mathcal{T}\mathsf{u}, (\mathcal{I}_{\mathrm{H}^{\frac12}} - 2\mathcal{S}_-)\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle (\mathcal{I}_{\mathrm{H}^{-\frac12}} - 2\mathcal{S}_-^*)\mathcal{T}\mathsf{u}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} ,
\end{aligned} \tag{12}
$$

gdje su $\mathcal{I}_{\mathrm{H}^{\frac12}} : \mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{R}^r) \longrightarrow \mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{R}^r)$ i $\mathcal{I}_{\mathrm{H}^{-\frac12}} : \mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{R}^r) \longrightarrow \mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{R}^r)$ identitete. Zbog gustoće prostora $\mathrm{C}_c^\infty(\Omega; \mathbf{R}^r)$ u $W$ i neprekinutosti svih operatora koji se pojavljuju u (12), jednostavno se vidi da (12) vrijedi i za $\mathsf{u} \in W$ i $\mathsf{v} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^r)$.

Označimo s $\mathcal{E} : \operatorname{Im}\mathcal{T} \longrightarrow W$ operator podizanja (desni inverz operatora $\mathcal{T}$) definiran u prvom poglavlju. Za dani $\mathsf{w} \in W$ označimo

$$
\mathsf{u} := \mathcal{E}\mathcal{S}_+^*\mathcal{T}\mathsf{w} \quad \text{i} \quad \mathsf{v} := \mathsf{w} - \mathsf{u} .
$$

Zbog uvjeta $\mathcal{S}_+(\operatorname{Im}\mathcal{T}) \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{T}$ je $\mathsf{u}$ dobro definiran, te je očito $\mathsf{w} = \mathsf{u} + \mathsf{v}$.

Pokažimo da je $\mathsf{u} \in \operatorname{Ker}(D - M)$: za $\mathsf{z} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^r)$ iz (11), (12) i Leme 22.b slijedi

$$
\begin{aligned}
{}_{W'}\langle (D - M)\mathsf{u}, \mathsf{z} \rangle_W &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle 2\mathcal{S}_-^*\mathcal{T}\mathsf{u}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle 2\mathcal{S}_-^*\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{S}_+^*\mathcal{T}\mathsf{w}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle 2\underbrace{\mathcal{S}_-^*\mathcal{S}_+^*}_{\mathbf{0}}\mathcal{T}\mathsf{w}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} = 0 ,
\end{aligned}
$$

pa slijedi $(D - M)\mathsf{u} = 0$.

Preostalo je pokazati da je $\mathsf{v} \in \operatorname{Ker}(D + M)$: za $\mathsf{z} \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^r)$ slično kao gore slijedi

$$
\begin{aligned}
{}_{W'}\langle (D + M)\mathsf{v}, \mathsf{z} \rangle_W &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle \mathcal{T}\mathsf{v} + (\mathcal{I}_{\mathrm{H}^{-\frac12}} - 2\mathcal{S}_-^*)\mathcal{T}\mathsf{v}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle 2\mathcal{S}_+^*\mathcal{T}\mathsf{v}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle 2\mathcal{S}_+^*\mathcal{T}(\mathsf{w} - \mathcal{E}\mathcal{S}_+^*\mathcal{T}\mathsf{w}), \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle 2\mathcal{S}_+^*(\mathcal{T}\mathsf{w} - \mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{S}_+^*\mathcal{T}\mathsf{w}), \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle 2\mathcal{S}_+^*(\mathcal{T}\mathsf{w} - \mathcal{S}_+^*\mathcal{T}\mathsf{w}), \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)}\langle 2\underbrace{\mathcal{S}_+^*(\mathcal{I}_{\mathrm{H}^{-\frac12}} - \mathcal{S}_+^*)}_{0}\mathcal{T}\mathsf{w}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^r)} = 0 ,
\end{aligned}
$$

pa slijedi $(D + M)\mathsf{u} = 0$ i tvrdnja je pokazana.

**Q.E.D.**

Gornji teorem daje dovoljne uvjete da bi operator $M : W \longrightarrow W'$ definiran izrazom (8) bio neprekinut, te zadovoljavao (M1)–(M2). Koliko su ti uvjeti *razumni* i ostvarivi vidjet ćemo u sljedećem potpoglavlju.

**Napomena.** Ako su $\mathbf{S}_+(\mathbf{x})$ i $\mathbf{S}_-(\mathbf{x})$ par projekcija za svaki $\mathbf{x} \in \partial\Omega$, onda je $\mathbf{S}_+ \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ ako i samo ako je $\mathbf{S}_- \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$.

Ako je $r = 1$, onda jedini par projekcija čine brojevi 0 i 1. U tom slučaju uvjet $\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_- \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega; \mathrm{M}_1(\mathbf{R}))$ povlači da su $\mathbf{S}_+$ i $\mathbf{S}_-$ konstantne funkcije jednake 0, odnosno 1 (jedna od njih je 0, dok je druga 1). ∎

## 5. Primjeri

Sada ćemo pogledati primjenu gornjih rezultata na nekoliko primjera rubnih zadaća za parcijalne diferencijalne jednadžbe

### Skalarna eliptička jednadžba

Prisjetimo se Primjera 2 iz prošlog potpoglavlja: neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen skup s Lipschitzovim rubom, te $\mu \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ udaljena od nule: $|\mu(\mathbf{x})| \geq \alpha_0 > 0$ (ss $\mathbf{x} \in \Omega$). Promotrimo skalarnu eliptičku jednadžbu

$$-\triangle u + \mu u = f\,,$$

gdje je $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ zadana funkcija. Dana jednadžba se može zapisati kao sustav prvog reda

$$\begin{cases} \mathsf{p} + \nabla u = 0 \\ \mu u + \mathrm{div}\mathsf{p} = f \end{cases},$$

što je zapravo Friedrichsov sustav uz:

$$(\mathbf{A}_k)_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in \{(k, d+1), (d+1, k)\} \\ 0, & \text{inače} \end{cases},$$

$$(\mathbf{C})_{ij} = \begin{cases} \mu(x), & i = j = d+1 \\ 1, & i = j \neq d+1 \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Tada je

$$W = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)\,,$$
$$W_0 = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div},0}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega) = \mathrm{Cl}\,_W \mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{R}^{d+1})\,,$$

te

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \nu_1 \\ 0 & \dots & 0 & \nu_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \nu_d \\ \nu_1 & \dots & \nu_d & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka je $\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} : \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^m) \longrightarrow \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^m)$ operator traga (za svaki $m \in \mathbf{N}$ koristimo istu oznaku za operator traga). Sada ćemo opisati operator traga $\mathcal{T} : W \longrightarrow \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^{d+1})$.

Iz definicije traga i Teorema 6 (prvo poglavlje) slijedi da za $(\mathsf{p}, u)^\top \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^d) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ i $(\mathsf{s}, z)^\top \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^d) \times \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
{}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{s}, z)^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{s}, z)^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, (\boldsymbol{\nu}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} u, \boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{p})^\top, (\mathsf{s}, z)^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\
&= \int\limits_{\partial\Omega} \Big[ (\boldsymbol{\nu}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} u) \cdot \mathsf{s} + (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{p}) z \Big] \, dS \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \boldsymbol{\nu} \cdot \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{p}, z \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} + {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \boldsymbol{\nu}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} u, \mathsf{s} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, z \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} + {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\nabla} u, \mathsf{s} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} ,
\end{aligned}
\tag{13}
$$

gdje su $\mathcal{T}_{\mathrm{div}}$ i $\mathcal{T}_{\nabla}$ kao u primjerima 5 i 4 u prvom poglavlju. Uočimo da u gornjim formulama oznaku ${}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}}$ koristimo za različite dualne produkte (kodomene su različite: $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^d$, ili $\mathbf{R}^{d+1}$). Zbog jednostavnost zapisa i dalje ćemo koristiti istu oznaku za sve te dualne produkte, a iz dimenzija kodomena funkcija koje se u njima pojavljuju biti će jasno o kojem se radi.

Zbog neprekinutosti operatora $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_{\mathrm{div}}$ i $\mathcal{T}_{\nabla}$ lako se vidi da gornja formula vrijedi i za proizvoljni $(\mathsf{p}, u)^\top \in W$.

Iz primjera 4 i 5 u prvom poglavlju i gornje formule slijedi

$$
\operatorname{Im} \mathcal{T} = \operatorname{Im} \mathcal{T}_{\nabla} \times \operatorname{Im} \mathcal{T}_{\mathrm{div}} = \boldsymbol{\nu}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subseteq \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^{d+1}) \,.
\tag{14}
$$

**Dirichletov rubni uvjet** na polaznu zadaću možemo postaviti koristeći razne matrice $\mathbf{M}$. Jedana mogućnost je

$$
\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\nu_1 \\ 0 & \dots & 0 & -\nu_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\nu_d \\ \nu_1 & \dots & \nu_d & 0 \end{bmatrix} .
$$

Zaista, uz takav odabir je uvjet

$$
(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}) \begin{bmatrix} \mathsf{p} \\ u \end{bmatrix}_{|\partial\Omega} = \mathsf{0}
$$

ispunjen ako i samo ako je

$$
(\forall\, k \in 1..d) \quad \nu_k u_{|\partial\Omega} = 0 \,,
$$

a kako ne mogu svi $\nu_k$ istovremeno biti jednaki nuli, to je ekvivalentno s

$$
u_{|\partial\Omega} = 0 \,.
$$

Za takav $\mathbf{M}$ vrijedi

$$
(\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \,,
$$

pa je (FM1) zadovoljeno, a kako je

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}) = \{ \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{d+1} : \xi_{d+1} = 0 \} \,, \\
&\operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}) = \{ (\mathbf{y}, \xi)^\top \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} : \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y} = 0 \} \,,
\end{aligned}
$$

to se lako vidi da vrijedi i (FM2).

Pokušajmo sada naći matrice $\mathbf{S}_+$ i $\mathbf{S}_-$ iz Teorema 15. Budući da je $\mathbf{M}^\top = -\mathbf{M}$, to je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol\nu} + \mathbf{M}^\top) &= \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol\nu} - \mathbf{M}) = \{\boldsymbol\xi \in \mathbf{R}^{d+1} : \xi_{d+1} = 0\}\,,\\
\mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol\nu} - \mathbf{M}^\top) &= \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol\nu} + \mathbf{M}) = \{(\mathbf{y}, \xi)^\top \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} : \boldsymbol\nu \cdot \mathbf{y} = 0\}\,,
\end{aligned}
$$

što povlači $\mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol\nu} - \mathbf{M}^\top) \cap \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol\nu} + \mathbf{M}^\top) \neq \emptyset$, a to za posljedicu ima da odabir para projekcija $\mathbf{S}_+$ i $\mathbf{S}_-$ nije jedinstven. Jedan od mogućih odabira je

$$
\mathbf{S}_- = \mathbf{S}_-^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0\\ 0 & & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_+ = \mathbf{S}_+^\top = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

Budući da su obe gornje matrične funkcije konstantne, to su onda i elementi prostora $\mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega; \mathrm{M}_{d+1}(\mathbf{R}))$. Stoga je preostalo za provjeriti da je $\mathrm{Im}\,\mathcal{T}$ invarijantan potprostor za operator $\mathcal{S}_+$ koji je u ovome slučaju dan s

$$
{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{S}_+ T, \mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, T, \mathbf{S}_+\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, T, (0, \dots, 0, w_{d+1})^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,
$$

za $T \in \mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{R}^{d+1})$ i $\mathsf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{d+1})^\top \in \mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega; \mathbf{R}^{d+1})$. Posebno, za $T = (\boldsymbol\nu e, g) \in \boldsymbol\nu\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega) \times \mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega) = \mathrm{Im}\,\mathcal{T}$ je

$$
{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{S}_+ T, \mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, g, w_{d+1}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,
$$

odnosno

$$
\mathcal{S}_+ T = (0, 0, \dots, 0, g)^\top \in \{\mathsf{0}\} \times \mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega) \subseteq \mathrm{Im}\,\mathcal{T}\,,
$$

pa je zadovoljen i preostali uvjet Teorema 15. Stoga je s (8) definiran operator $M \in \mathcal{L}(W; W')$, koji zadovoljava (M1)–(M2). Operator $M$ možemo dobiti i iz (12): za $(\mathsf{p}, u)^\top \in W = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ i $(\mathsf{r}, v)^\top \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^d) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ je

$$
\begin{aligned}
{}_{W'}\langle\, M(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top\,\rangle_W &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathbf{I} - 2\mathbf{S}_-)(\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} v)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{p}, u)^\top, (-\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} v)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} - {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\nabla} u, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,.
\end{aligned}
$$

Budući da je

$$
{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\nabla} u, \mathsf{r}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \boldsymbol\nu\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} u, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} u(\boldsymbol\nu \cdot \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r})\, dS = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,
$$

to $M$ ima sljedeći oblik

$$
{}_{W'}\langle\, M(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top\,\rangle_W = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} - {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,.
$$

S obzirom da su svi operatori koji se pojavljuju u gornjoj formuli neprekinuti, a $\mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^d) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ gusto u $W$, to ona vrijedi i za $(\mathsf{r}, v)^\top \in W$.

Na isti način se lako vidi da je

$$
{}_{W'}\langle\, D(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top\,\rangle_W = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} + {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1} u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,
$$

pa iz $M^* = -M$ slijedi da su $V = \mathrm{Ker}\,(D - M)$ i $\tilde{V} = \mathrm{Ker}\,(D + M^*)$ dani s

$$V = \tilde{V} = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega)\,,$$

što zaista odgovara Dirichletovom rubnom uvjetu za polaznu jednadžbu.

Kao što je već napomenuto, odabir matrice $\mathbf{M}$ koja zadaje neki rubni uvjet općenito nije jedinstven. Zaista, ako uzmemo

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -\nu_1 \\ 0 & \dots & 0 & -\nu_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\nu_d \\ \nu_1 & \dots & \nu_d & 2\alpha \end{bmatrix},$$

gdje je $\alpha > 0$ konstanta, onda je uvjet

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}) \begin{bmatrix} \mathsf{p} \\ u \end{bmatrix}_{|\partial\Omega} = \mathsf{0}$$

ispunjen ako i samo ako je

$$(\forall\, k \in 1..d) \quad \nu_k u_{|\partial\Omega} = 0 \qquad \text{i} \qquad \alpha u = 0\,,$$

što je pak ekvivalentno s

$$u_{|\partial\Omega} = 0\,,$$

te opet odgovara Dirichletovom rubnom uvjetu.

Za ovaj odabir matrične funkcije $\mathbf{M}$ je

$$(\forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^d) \quad \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = 2\alpha\xi^2_{d+1} \geq 0\,,$$

te

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}) &= \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^{d+1} : \xi_{d+1} = 0\}\,, \\ \mathrm{Ker}\,(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}) &= \{(\mathbf{y}, \xi)^\top \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} : \boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{y} + \alpha\xi = 0\}\,, \end{aligned}$$

pa su uvjeti (FM1)–(FM2) i sada zadovoljeni.

Za matrične funkcije $\mathbf{S}_+$ i $\mathbf{S}_-$ iz Teorema 15 možemo uzeti

$$\mathbf{S}_- = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha\nu_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha\nu_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -\alpha\nu_{d-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha\nu_d \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_+ = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha\nu_1 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha\nu_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha\nu_d \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Da bi sada vrijedilo $\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_+ \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega; \mathrm{M}_{d+1}(\mathbf{R}))$ potrebno je zahtjevati nešto veću glatkoću ruba, primjerice $\mathrm{C}^2$.

Sada je operator $\mathcal{S}_+$ dan s

$${}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{S}_+ T, \mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, T, \mathbf{S}_+\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, T, w_{d+1}(\alpha\boldsymbol{\nu}, 1)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,$$

za $T \in \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^{d+1})$ i $\mathsf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_{d+1})^\top \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^{d+1})$. Posebno, za $T = (\boldsymbol{\nu}e, g) \in \boldsymbol{\nu}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \operatorname{Im}\mathcal{T}$ je

$$ {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{S}_+ T, \mathsf{w} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} = \int\limits_{\partial\Omega} \alpha e w_{d+1}\, dS + {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, g, w_{d+1} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \alpha e + g, w_{d+1} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \,, $$

odnosno

$$ \mathcal{S}_+ T = (0, 0, , \ldots, 0, \alpha e + g) \in \{\mathsf{0}\} \times \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{T} \,, $$

pa je zadovoljen i preostali uvjet Teorema 15. Slijedi da je s (8) definiran operator $M \in \mathcal{L}(W; W')$, koji zadovoljava (M1)–(M2), te ima sljedeći oblik: za $(\mathsf{p}, u)^\top \in W = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ i $(\mathsf{r}, v)^\top \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^d) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ je

$$ \begin{aligned} {}_{W'}\langle\, M(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \,\rangle_W &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathbf{I} - 2\mathbf{S}_-)(\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v)^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\ &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{p}, u)^\top, (2\alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\boldsymbol{\nu} - \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v)^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\ &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} - {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\nabla}u, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\ &\qquad + {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\nabla}u, 2\alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\boldsymbol{\nu} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \,. \end{aligned} $$

Sličnim argumentom kao prije slijedi

$$ {}_{W'}\langle\, M(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \,\rangle_W = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} - {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} + 2\alpha \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\, dS \,, $$

za sve $(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \in W$. Lako se vidi da je onda

$$ {}_{W'}\langle\, M^*(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \,\rangle_W = {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} - {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} + 2\alpha \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\, dS \,, $$

pa jednostavnim računom slijedi da su $V$ i $\tilde{V}$ dani s

$$ V = \tilde{V} = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1_0(\Omega) \,. $$

**Robinov rubni uvjet** možemo zadati odabirom

$$ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 & \nu_1 \\ 0 & \ldots & 0 & \nu_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \nu_d \\ -\nu_1 & \ldots & -\nu_d & 2\alpha \end{bmatrix} , $$

gdje je $\alpha > 0$ konstanta. Sada je uvjet

$$ (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}) \begin{bmatrix} \mathsf{p} \\ u \end{bmatrix}_{|\partial\Omega} = \mathsf{0} $$

ekvivalentan s

$$ (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathsf{p} - \alpha u)_{|\partial\Omega} = 0 \,, $$

što za polaznu jednadžbu odgovara Robinovom rubnom uvjetu

$$(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla u+\alpha u)_{|\partial\Omega}=0\,.$$

Za ovaj odabir matrične funkcije $\mathbf{M}$ je

$$(\forall\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^d)\quad \mathbf{M}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi}=2\alpha\xi_{d+1}^2\geq 0\,,$$

te

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}-\mathbf{M})&=\{(\mathbf{y},\xi)^\top\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}:\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{y}-\alpha\xi=0\}\,,\\ \operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}+\mathbf{M})&=\{\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^{d+1}:\xi_{d+1}=0\}\,,\end{aligned}$$

pa su uvjeti (FM1)–(FM2) zadovoljeni.

Za $\mathbf{S}_+$ i $\mathbf{S}_-$ iz Teorema 15 možemo uzeti

$$\mathbf{S}_-=\begin{bmatrix}0&\dots&0&-\alpha\nu_1\\0&\dots&0&-\alpha\nu_2\\ \vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\dots&0&-\alpha\nu_d\\0&\dots&0&1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{S}_+=\begin{bmatrix}1&0&0&\dots&0&\alpha\nu_1\\0&1&0&\dots&0&\alpha\nu_2\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\dots&0&1&0&\alpha\nu_{d-1}\\0&\dots&0&0&1&\alpha\nu_d\\0&\dots&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

Da bi vrijedilo $\mathbf{S}_-,\mathbf{S}_+\in\mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega;\mathrm{M}_{d+1}(\mathbf{R}))$ potrebno je i ovdje zahtjevati nešto veću glatkoću ruba ($\mathrm{C}^2$ je dovoljno).

Operator $\mathcal{S}_+$ dan je s

$${}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{S}_+T,(\mathsf{s},z)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}={}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,T,\mathbf{S}_+(\mathsf{s},z)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}={}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,T,(\mathsf{s}-\alpha z\boldsymbol{\nu},0)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,$$

za $T\in\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^{d+1})$ i $(\mathsf{s},z)^\top\in\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^d)\times\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega)$. Posebno, za $T=(\boldsymbol{\nu}e,g)^\top\in\boldsymbol{\nu}\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega)\times\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega)=\operatorname{Im}\mathcal{T}$ je

$${}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{S}_+T,\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}=\int_{\partial\Omega}e\boldsymbol{\nu}\cdot\mathsf{s}-\alpha ez\,dS={}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,(e\boldsymbol{\nu},-\alpha e)^\top,(\mathsf{s},z)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,$$

odnosno

$$\mathcal{S}_+T=(e\boldsymbol{\nu},-\alpha e)^\top\in\boldsymbol{\nu}\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega)\times\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega)\subseteq\operatorname{Im}\mathcal{T}\,,$$

pa je zadovoljen i preostali uvjet Teorema 15. Sada operator $M\in\mathcal{L}(W;W')$, definiran s (8) ima sljedeći oblik: za $(\mathsf{p},u)^\top\in W=\mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega)\times\mathrm{H}^1(\Omega)$ i $(\mathsf{r},v)^\top\in\mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{R}^d)\times\mathrm{H}^1(\Omega)$ je

$$\begin{aligned}{}_{W'}\langle\,M(\mathsf{p},u)^\top,(\mathsf{r},v)^\top\,\rangle_W&={}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{T}(\mathsf{p},u)^\top,(\mathbf{I}-2\mathbf{S}_-)(\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r},\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\\ &={}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{T}(\mathsf{p},u)^\top,(\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}+2\alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\boldsymbol{\nu},-\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\\ &=-{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p},\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}+{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{T}_\nabla u,\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\\ &\qquad+{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{T}_\nabla u,2\alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\boldsymbol{\nu}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,\end{aligned}$$

odnosno

$${}_{W'}\langle\,M(\mathsf{p},u)^\top,(\mathsf{r},v)^\top\,\rangle_W={}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r},\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}-{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p},\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}+2\alpha\int_{\partial\Omega}\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\,dS\,,$$

za sve $(\mathsf{p},u)^\top,(\mathsf{r},v)^\top\in W$.

Sada se lako može vidjeti kako izgleda operator $M^*$, te da je

$$\begin{aligned} V &:= \{(\mathsf{p},u)^\top \in W : \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p} = \alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u\}\,, \\ \tilde V &:= \{(\mathsf{r},v)^\top \in W : \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r} = -\alpha\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v\}\,, \end{aligned}$$

kao što smo već vidjeli u Primjeru 2.

**Neumannov rubni uvjet** možemo zadati s

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \nu_1 \\ 0 & \dots & 0 & \nu_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \nu_d \\ -\nu_1 & \dots & -\nu_d & 0 \end{bmatrix},$$

i tada je uvjet

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})\begin{bmatrix}\mathsf{p}\\ u\end{bmatrix}_{|\partial\Omega} = \mathsf{0}$$

ekvivalentan s

$$(\boldsymbol{\nu}\cdot\mathsf{p})_{|\partial\Omega} = 0\,,$$

što za polaznu jednadžbu odgovara Neumannovom rubnom uvjetu

$$(\boldsymbol{\nu}\cdot\nabla u)_{|\partial\Omega} = 0\,.$$

Za takav $\mathbf{M}$ je

$$(\forall\,\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^d)\quad \mathbf{M}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{\xi} = 0\,,$$

te

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}) &= \{(\mathbf{y},\xi)^\top \in \mathbf{R}^d\times\mathbf{R} : \boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{y} = 0\}\,, \\ \operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}) &= \{\boldsymbol{\xi}\in\mathbf{R}^{d+1} : \xi_{d+1} = 0\}\,, \end{aligned}$$

pa su uvjeti (FM1)–(FM2) zadovoljeni.

Za $\mathbf{S}_+$ i $\mathbf{S}_-$ možemo odabrati

$$\mathbf{S}_- = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{S}_+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

pa je očito $\mathbf{S}_-,\mathbf{S}_+\in\mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega;\mathrm{M}_{d+1}(\mathbf{R}))$.

Operator $\mathcal{S}_+$ dan je s

$${}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{S}_+T,(\mathsf{s},z)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,T,\mathbf{S}_+(\mathsf{s},z)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,T,(\mathsf{s},0)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,$$

za $T\in\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^{d+1})$ i $(\mathsf{s},z)^\top\in\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^d)\times\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega)$. Posebno, za $T=(\boldsymbol{\nu}e,g)\in\boldsymbol{\nu}\mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega)\times\mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega)=\operatorname{Im}\mathcal{T}$ je

$${}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,\mathcal{S}_+T,\mathsf{w}\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = \int_{\partial\Omega} e\boldsymbol{\nu}\cdot\mathsf{s}\,dS = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\,(e\boldsymbol{\nu},0)^\top,(\mathsf{s},z)^\top\,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}}\,,$$

odnosno

$$\mathcal{S}_+T = (e\boldsymbol{\nu}, 0)^\top \in \boldsymbol{\nu}\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \times \{0\} \subseteq \mathrm{Im}\,\mathcal{T}\,,$$

pa je zadovoljen i preostali uvjet Teorema 15. Operator $M \in \mathcal{L}(W; W')$, definiran s (8) ima sljedeći oblik: za $(\mathsf{p}, u)^\top \in W = \mathrm{L}^2_{\mathrm{div}}(\Omega) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ i $(\mathsf{r}, v)^\top \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^d) \times \mathrm{H}^1(\Omega)$ je

$$\begin{aligned}
{}_{W'}\langle\, M(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \,\rangle_W &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathbf{I} - 2\mathbf{S}_-)(\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v)^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\
&= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}, -\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v)^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\
&= -{}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} + {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\nabla}u, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}}\,,
\end{aligned}$$

odnosno

$${}_{W'}\langle\, M(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \,\rangle_W = -{}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}v \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} + {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}u \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}}\,,$$

za sve $(\mathsf{p}, u)^\top, (\mathsf{r}, v)^\top \in W$.

Sada se lako može vidjeti da je $M^* = -M$, te da je

$$V = \tilde{V} = \{(\mathsf{p}, u)^\top \in W : \mathcal{T}_{\mathrm{div}}\mathsf{p} = 0\}\,.$$

## Maxwellove jednadžbe u difuznom režimu

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ otvoren i omeđen skup s Lipschitzovim rubom, te $\mu, \sigma \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ udaljene od nule. Za dane $\mathsf{f}, \mathsf{g} \in \mathrm{L}^2(\Omega; \mathbf{R}^3)$ promatramo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned}
\mu\mathsf{H} + \mathsf{rot}\,\mathsf{E} &= \mathsf{f} \\
\sigma\mathsf{E} + \mathsf{rot}\,\mathsf{H} &= \mathsf{g}
\end{aligned}\,.$$

Dani sustav poprima oblik Friedrichsovog sustava uz:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} & \mathbf{0} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & -1 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \mathbf{0} & \\ 0 & -1 & 0 & & & \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} & \mathbf{0} & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 1 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} & \mathbf{0} & & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \sigma\mathbf{I}\,.$$

Očito je da je

$$\begin{aligned}
W &= \mathrm{L}^2_{\mathrm{rot}}(\Omega) \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{rot}}(\Omega)\,, \\
W_0 &= \mathrm{L}^2_{\mathrm{rot},0}(\Omega) \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{rot},0}(\Omega) = \mathrm{Cl}_{\,W}\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{R}^6)\,,
\end{aligned}$$

dok $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}$ možemo zapisati u blok strukturi

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}^{\mathrm{rot}}_{\boldsymbol{\nu}} \\ -\mathbf{A}^{\mathrm{rot}}_{\boldsymbol{\nu}} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

gdje je $\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{rot}}$ matrica koja odgovara diferencijalnom operatoru rot:

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{rot}} = \begin{bmatrix} 0 & -\nu_3 & \nu_2 \\ \nu_3 & 0 & -\nu_1 \\ -\nu_2 & \nu_1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Slično kao i prije koristimo argumente iz prvog poglavlja da bismo opisali operator traga $\mathcal{T} : W \longrightarrow \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^6)$: za $(\mathsf{H}, \mathsf{E})^\top \in \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^3) \times \mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{R}^3)$ i $(\mathsf{s}, \mathsf{z}) \in \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^3) \times \mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^3)$ vrijedi

$$\begin{aligned} {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle \mathcal{T}(\mathsf{H}, \mathsf{E})^\top, (\mathsf{s}, \mathsf{z})^\top \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}(\mathsf{H}, \mathsf{E})^\top, (\mathsf{s}, \mathsf{z})^\top \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\ &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle (\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{rot}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{E}, -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{rot}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{H})^\top, (\mathsf{s}, \mathsf{z})^\top \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \Big[ \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{rot}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{E} \cdot \mathsf{s} - \mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{rot}} \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{H} \cdot \mathsf{z} \Big] \, dS \\ &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle \mathcal{T}_{\mathrm{rot}}\mathsf{E}, \mathsf{s} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} - {}_{\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}}\langle \mathcal{T}_{\mathrm{rot}}\mathsf{H}, \mathsf{z} \rangle_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}} , \end{aligned} \tag{15}$$

gdje je $\mathcal{T}_{\mathrm{rot}}$ kao u Primjeru 6 u prvom poglavlju. Istim argumentom kao i prije gornja formula vrijedi i za $\mathsf{H}, \mathsf{E} \in \mathrm{L}^2_{\mathrm{rot}}(\Omega)$, pa lako slijedi

$$\operatorname{Im} \mathcal{T} = \operatorname{Im} \mathcal{T}_{\mathrm{rot}} \times \operatorname{Im} \mathcal{T}_{\mathrm{rot}} \subseteq \mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{R}^6) . \tag{16}$$

Rubni uvjet

$$\boldsymbol{\nu} \times \mathsf{E}_{|\partial\Omega} = 0 ,$$

možemo zadati odabirom

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{rot}} \\ -\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{rot}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} .$$

Zaista, koristeći

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}}^{\mathrm{rot}} \mathsf{E} = \boldsymbol{\nu} \times \mathsf{E}$$

dobivamo da je uvjet

$$(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}) \begin{bmatrix} \mathsf{H} \\ \mathsf{E} \end{bmatrix}_{|\partial\Omega} = 0$$

ekvivalentan polaznom rubnom uvjetu

Za takav $\mathbf{M}$ je

$$(\forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbf{R}^6) \quad \mathbf{M}\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 ,$$

te

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M}) &= \{(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})^\top \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 : \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\xi} = 0\} , \\ \operatorname{Ker}(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M}) &= \{(\mathbf{y}, \boldsymbol{\xi})^\top \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 : \boldsymbol{\nu} \times \mathbf{y} = 0\} , \end{aligned}$$

pa se lako vidi da su uvjeti (FM1)–(FM2) zadovoljeni.

Prirodan odabir za matrice $\mathbf{S}_+$ i $\mathbf{S}_-$ je

$$\mathbf{S}_- = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} , \qquad \mathbf{S}_+ = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} ,$$

gdje su svi blokovi u gornjim matricama dimenzije 3. Trivijalno je ispunjeno $\mathbf{S}_-, \mathbf{S}_+ \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega; \mathrm{M}_6(\mathbf{R}))$.

Operator $\mathcal{S}_+$ dan je s

$$ {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{S}_+ T, (\mathsf{s},\mathsf{z})^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, T, \mathbf{S}_+(\mathsf{s},\mathsf{z})^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, T, (0,\mathsf{z})^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} \,, $$

za $T \in \mathrm{H}^{-\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^6)$ i $(\mathsf{s},\mathsf{z})^\top \in \mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^3) \times \mathrm{H}^{\frac12}(\partial\Omega;\mathbf{R}^3)$. Posebno, za $T = (K,S)^\top \in \operatorname{Im}\mathcal{T}_{\mathrm{rot}} \times \operatorname{Im}\mathcal{T}_{\mathrm{rot}} = \operatorname{Im}\mathcal{T}$ je

$$ {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{S}_+ T, (\mathsf{s},\mathsf{z})^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} = {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, S, \mathsf{z} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} \,, $$

odnosno

$$ \mathcal{S}_+ T = (0, S)^\top \in \{0\} \times \operatorname{Im}\mathcal{T}_{\mathrm{rot}} \subseteq \operatorname{Im}\mathcal{T} \,, $$

pa je zadovoljen i preostali uvjet Teorema 15. Operator $M \in \mathcal{L}(W;W')$, definiran s (8) ovdje ima sljedeći oblik: za $(\mathsf{H},\mathsf{E})^\top \in W = \mathrm{L}^2_{\mathrm{rot}}(\Omega) \times \mathrm{L}^2_{\mathrm{rot}}(\Omega)$ i $(\mathsf{r},\mathsf{v})^\top \in \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{R}^3) \times \mathrm{H}^1(\Omega;\mathbf{R}^3)$ je

$$ \begin{aligned} {}_{W'}\langle\, M(\mathsf{H},\mathsf{E})^\top, (\mathsf{r},\mathsf{v})^\top \,\rangle_W &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{H},\mathsf{E})^\top, (\mathbf{I} - 2\mathbf{S}_-)(\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v})^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} \\ &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{H},\mathsf{E})^\top, (-\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v})^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} \\ &= -{}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{rot}}\mathsf{E}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} - {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{rot}}\mathsf{H}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} \,, \end{aligned} $$

dok je operator $D$ dan s

$$ \begin{aligned} {}_{W'}\langle\, D(\mathsf{H},\mathsf{E})^\top, (\mathsf{r},\mathsf{v})^\top \,\rangle_W &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}(\mathsf{H},\mathsf{E})^\top, (\mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v})^\top \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} \\ &= {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{rot}}\mathsf{E}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{r} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} - {}_{\mathrm{H}^{-\frac12}}\langle\, \mathcal{T}_{\mathrm{rot}}\mathsf{H}, \mathcal{T}_{\mathrm{H}^1}\mathsf{v} \,\rangle_{\mathrm{H}^{\frac12}} \,. \end{aligned} $$

Koristeći neprekinutost operatora koji se pojavljuju u formulama za $M$ i $D$ jednostavno se pokaže da one vrijede i za $(\mathsf{r},\mathsf{v}) \in W$.

Sada se lako može vidjeti da je $M^* = -M$, te da je

$$ V = \tilde{V} = \{(\mathsf{H},\mathsf{E}) \in W : \mathcal{T}_{\mathrm{rot}}\mathsf{E} = 0\} \,. $$

### Prijenosna jednadžba

Neka je $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i omeđen skup s Lipschitzovim rubom, te $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{W}^{1,\infty}(\Omega;\mathbf{R}^d)$. Nadalje, neka je $\mu \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, takva da vrijedi

$$ (\exists\, \mu_0 > 0) \quad \mu(\mathbf{x}) - \frac12 \mathsf{div}\,\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \geq \mu_0 \qquad (\text{ss } \mathbf{x} \in \Omega) \,. $$

Tada skalarna jednadžba

$$ \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla u + \mu u = f \,, $$

za dani $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, poprima oblik Friedrichsovog sustava (zapravo se radi o jednoj jednadžbi)

$$ \sum_{k=1}^d \partial_k(A_k u) + C u = f $$

za

$$ A_k = \alpha_k \,, \qquad C = \mu - \sum_{k=1}^d \partial_k A_k \,. $$

Sada je prostor grafa dan s

$$W = \{u \in \mathrm{L}^2(\Omega) : \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla u \in \mathrm{L}^2(\Omega)\}\,,$$

dok je $A_{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu}$.

Definirajmo *ulazni rub* $\partial\Omega^-$ i *izlazni rub* $\partial\Omega^+$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\partial\Omega^- &= \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) < 0\}\,,\\
\partial\Omega^+ &= \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) > 0\}\,,
\end{aligned}$$

i dodatno pretpostavimo da su *dobro razdvojeni*: $d(\partial\Omega^-, \partial\Omega^+) > 0$. Tada se može pokazati (vidi [EGC]) da je slika operatora traga prostor s težinskom mjerom

$$\mathrm{L}^2(\partial\Omega, |\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu}|) := \{h : \partial\Omega \longrightarrow \mathbf{R} : \int\limits_{\partial\Omega} |h|^2 |\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu}|\, dS < \infty\}\,,$$

te da je operator $D$ dan s

$${}_{W'}\langle\, Du, v\,\rangle_W = \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{T}u\mathcal{T}v(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu})\, dS\,, \qquad u, v \in W\,.$$

Rubni uvjet

$$u_{|_{\partial\Omega^-}} = 0$$

možemo postaviti odabirom $\mathbf{M} = |\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu}|$, čime je (FM1) trivijalno zadovoljeno, dok iz

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} - \mathbf{M})(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 0\,, & \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \geq 0 \\ 2\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\,, & \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) < 0 \end{cases}\,, \quad \text{i}\\
(\mathbf{A}_{\boldsymbol{\nu}} + \mathbf{M})(\mathbf{x}) &= \begin{cases} 0\,, & \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) \leq 0 \\ 2\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})\,, & \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}\,,
\end{aligned}$$

lako slijedi i (FM2).

Jednostavno je vidjeti da $S_+$ i $S_-$ iz Teorema 15, koji su sada skalari, ne postoje: par projekcija u skalarnom slučaju su jedino 0 i 1, pa je uvjet da su $S_+$ i $S_-$ Lipschitzove ispunjen jedino ako su konstantne funkcije jednake 1, odnosno 0, što ovdje očito nije slučaj jer i $S_+$ i $S_-$ moraju poprimati vrijednosti i 0 i 1. Stoga uvjeti Teorema 15 nisu ispunjeni. Unatoč tome u [EGC] je pokazano da je s

$${}_{W'}\langle\, Mu, v\,\rangle_W = \int\limits_{\partial\Omega} \mathcal{T}u\mathcal{T}v|\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nu}|\, dS\,, \qquad u, v \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R})\,,$$

dobro definiran operator $M \in \mathcal{L}(W; W')$ koji zadovoljava (M1)–(M2). Tada su

$$\begin{aligned}
V &= \{u \in W : \mathcal{T}_{|_{\partial\Omega^-}} = 0\}\,,\\
\tilde{V} &= \{u \in W : \mathcal{T}_{|_{\partial\Omega^+}} = 0\}\,.
\end{aligned}$$

Stoga uvjeti Teorema 15 očito nisu nužni da bi s (8) bio definiran $M \in \mathcal{L}(W; W')$. Preciznije, uvjet $\mathbf{S}_+, \mathbf{S}_- \in \mathrm{C}^{0,1}(\partial\Omega; \mathrm{M}_r(\mathbf{R}))$ nije nužan.

# III. Polulinearni nespareni hiperbolički sustav prvog reda

# 1. Osnovno o običnim diferencijalnim jednadžbama

Da bismo dokazali teorem egzistencije i jedinstvenosti za polulinearni nespareni hiperbolički sustav prvog reda, te dobili odgovarajuće ocjene na rješenje, potrebni su nam neki rezultati o običnim diferencijalnim jednadžbama.

Neka je $h : [-T,T] \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ funkcija iz $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([-T,T] \times \mathbf{R})$, koja je i lokalno Lipschitzova po drugoj varijabli:

$$(\exists\, \Psi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}))(\forall\, u, v \in \mathbf{R}) \quad |u| \geq |v| \Rightarrow |h(t,u) - h(t,v)| \leq \Psi(|u|)|u-v| \quad (\text{ss } t \in [-T,T]).$$

Želimo naći rješenje $u$ Cauchyjeve zadaće

$$\text{(ODJ-h)} \qquad \begin{cases} u'(t) = h(t, u(t)) & (\text{ss } t) \\ u(0) = u_0 \end{cases},$$

za dani $u_0 \in \mathbf{R}$.

**Napomena.** Radi jednostavnosti gornju zadaću promatramo oko točke 0. Svi rezultati ovog potpoglavlja vrijede i za zadaću oko bilo koje druge točke iz $\mathbf{R}$. ∎

**Definicija.** Za funkciju $u : I \longrightarrow \mathbf{R}$ kažemo da je rješenje zadaće (ODJ-h) na otvorenom intervalu $I \ni 0$, ukoliko $u$ ima derivaciju skoro svuda na $I$ i zadovoljava (ODJ-h). ∎

Vrijedi sljedeći rezultat lokalne egzistencije i jedinstvenosti.

**Teorem 1.** *Uz gornje pretpostavke na $h$, postoji $S > 0$ i jedinstvena funkcija $u$ iz $\mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle -S, S\rangle)$ koja je rješenje zadaće (ODJ-h) na $\langle -S, S\rangle$.*

Dem. Egzistenciju dokazujemo koristeći klasični Picardov iterativni proces da bismo konstruirali niz koji konvergira prema rješenju zadaće (ODJ-h). Induktivno definiramo niz funkcija (za $t \in \langle -T, T\rangle$):

$$\begin{aligned} u_0(t) &:= u_0 \qquad , \\ u_k(t) &:= \int_0^t h(s, u_{k-1}(s))\, ds\,, \quad k \in \mathbf{N}\,. \end{aligned}$$

Koristeći lokalnu omeđenost funkcije $h$ po drugoj varijabli indukcijom se lako pokaže da je svaki $u_k$ iz $\mathrm{W}^{1,\infty}(\langle -T, T\rangle)$.

Za $r > 0$ definiramo

$$M(r) := \|h\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T] \times [u_0 - r, u_0 + r])}\,,$$

te

$$S := \min\Big\{T, \sup_{r \in \mathbf{R}^+} \frac{r}{M(r)}\Big\}\,.$$

Dat ćemo dokaz za slučaj $S = \sup_{r \in \mathbf{R}^+} \frac{r}{M(r)}$ koji je složeniji, te ujedno u sebi sadrži i dokaz za $S = T$. Neka je $\varepsilon > 0$ mali (tako da je $S - \varepsilon > 0$), i neka je $r_\varepsilon > 0$ takav da je

$$S - \varepsilon \leq \frac{r_\varepsilon}{M(r_\varepsilon)}\,.$$

Pokazat ćemo da je niz $(u_k)$ konvergentan u $\mathrm{C}([-(S-\varepsilon), S-\varepsilon])$, te da je pripadni limes rješenje polazne zadaće.

Pokažimo najprije da je niz $(u_k)$ omeđen u $\mathrm{C}([-(S-\varepsilon), S-\varepsilon])$, štoviše da vrijedi

$$|u_k(t) - u_0| \le r_\varepsilon\,, \qquad t \in [-(S-\varepsilon), S-\varepsilon]\,. \tag{1}$$

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom: za $k=0$ tvrdnja je trivijalno zadovoljena, te ako pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $k = n \in \mathbf{N}_0$, onda za $k = n+1$ dobivamo

$$|u_{n+1}(t) - u_0| = \Big|\int_0^t h(s, u_n(s))\,ds\Big| \le |t| M(r_\varepsilon) \le (S-\varepsilon) M(r_\varepsilon) \le r_\varepsilon\,,$$

za svaki $t \in [-(S-\varepsilon), S-\varepsilon]$ i time je omeđenost niza $(u_k)$ pokazana.

Pokažimo sada da je niz $(u_k)$ Cauchyjev u $\mathrm{C}([-(S-\varepsilon), S-\varepsilon])$: uz oznaku $C := \Psi(u_0 + r_\varepsilon)$, iz činjenice da je funkcija $h$ lokalno Lipschitzova i (1) slijedi da za svaki $t \in [0, S-\varepsilon]$ vrijedi

$$\begin{aligned} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| &\le \int_0^t \Big| h(s, u_k(s)) - h(s, u_{k-1}(s))\Big|\,ds \\ &\le \int_0^t C|u_k(s) - u_{k-1}(s)|\,ds\,, \end{aligned}$$

pa induktivno dobivamo

$$\begin{aligned} |u_{k+1}(t) - u_k(t)| &\le C^k \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} |u_1(t_k) - u_0|\,dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 \\ &\le C^k \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{k-1}} r_\varepsilon\,dt_k dt_{k-1} \dots dt_1 \le r_\varepsilon C^k \frac{t^k}{k!} \le r_\varepsilon \frac{C^k (S-\varepsilon)^k}{k!}\,. \end{aligned}$$

Lako se može vidjeti da gornja nejednakost vrijedi i kada je $t$ negativan, odnosno za sve $t \in [-(S-\varepsilon), S-\varepsilon]$. Sada za proizvoljne $k, m \in \mathbf{N}$ slijedi

$$\begin{aligned} \|u_{k+m} - u_k\|_{\mathrm{C}([-(S-\varepsilon),S-\varepsilon])} &= \Big\| \sum_{i=k}^{k+m-1} (u_{i+1} - u_i) \Big\|_{\mathrm{C}([-(S-\varepsilon),S-\varepsilon])} \\ &\le \sum_{i=k}^{k+m-1} \|u_{i+1} - u_i\|_{\mathrm{C}([-(S-\varepsilon),S-\varepsilon])} \\ &\le \sum_{i=k}^{k+m-1} r_\varepsilon \frac{C^i (S-\varepsilon)^i}{i!} \le \sum_{i=k}^{\infty} r_\varepsilon \frac{C^i (S-\varepsilon)^i}{i!}\,. \end{aligned}$$

Budući da je izraz na desnoj strani ostatak sume konvergentnog reda, to slijedi da je $(u_k)$ Cauchyjev niz u Banachovom prostoru $\mathrm{C}([-(S-\varepsilon), S-\varepsilon])$, pa stoga i konvergira prema nekom $u_\varepsilon$. Jasno je da tada vrijedi

$$|u_\varepsilon(t) - u_0| \le r_\varepsilon\,, \qquad t \in [-(S-\varepsilon), S-\varepsilon]\,, \tag{2}$$

a kako uniformna konvergencija povlači točkovnu, to za $S > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ vrijedi

$$u_{\varepsilon_1} = u_{\varepsilon_2}\,, \quad \text{na} \quad [-(S-\varepsilon_2), S-\varepsilon_2]\,. \tag{3}$$

Iz (1), (2) i svojstava funkcije $h$ slijedi

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^t h(s,u_\varepsilon(s)) - h(s,u_k(s))\,ds\Big| &\leq \int_{[0,t]} \Big|h(s,u_\varepsilon(s)) - h(s,u_k(s))\Big|\,ds \\
&\leq \int_{[0,t]} C|u_\varepsilon(s) - u_k(s)|\,ds \\
&\leq C(S-\varepsilon)\|u_\varepsilon - u_k\|_{\mathrm{C}([-(S-\varepsilon),S-\varepsilon])}\,,
\end{aligned}$$

što povlači

$$\int_0^t h(s,u_k(s))\,ds \longrightarrow \int_0^t h(s,u_\varepsilon(s))\,ds\,,$$

pa iz definicije niza $u_k$ i njegove konvergencije prema $u_\varepsilon$ slijedi

$$u_\varepsilon = u_0 + \int_0^t h(s,u_\varepsilon(s))\,ds\,, \qquad t \in \langle -(S-\varepsilon), S-\varepsilon\rangle\,.$$

Gornja formula povlači da je $u_\varepsilon$ iz $\mathrm{W}^{1,\infty}(\langle -(S-\varepsilon), S-\varepsilon\rangle)$, te da je rješenje zadaće (ODJ-h) na $\langle -(S-\varepsilon), S-\varepsilon\rangle$.

Iz (3) slijedi da postoji jedinstvena funkcija $u : \langle -S, S\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$, takva da je

$$(\forall\,\varepsilon \in \langle 0, S\rangle) \quad u\big|_{\langle -(S-\varepsilon),S-\varepsilon\rangle} = u_\varepsilon\,.$$

Očito je da je onda $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle -S, S\rangle)$ rješenje zadaće (ODJ-h) na $\langle -S, S\rangle$ i time je egzistencija dokazana.

Jedinstvenost dokazujemo koristeći Gronwallovu nejednakost (vidi niže): ako su $u$ i $w$ iz $\mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle -S, S\rangle)$ dva rješenja zadaće (ODJ-h), za neki $S > 0$, onda za svaki $S_0 < S$ na $[-S_0, S_0]$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|u(t) - w(t)| &\leq \int_{-S_0}^t \Big|h(s,u(s)) - h(s,w(s))\Big|\,ds \\
&\leq \Psi(r)\int_{-S_0}^t |u(s) - w(s)|\,ds\,,
\end{aligned}$$

gdje je

$$r = \max\Big\{\|u\|_{\mathrm{L}^\infty([-S_0,S_0])}, \|w\|_{\mathrm{L}^\infty([-S_0,S_0])}\Big\}\,.$$

Upotrebom Gronwallove nejednakosti za $a = -S_0$, $b = S_0$, $M = 0$, $p = \Psi(r)$ i $f = |u - w|$ slijedi da je $u = w$ na $[-S_0, S_0]$. Zbog proizvoljnosti $S_0$ slijedi da je i $u = w$ na $[-S, S]$, te je time dokazana i jedinstvenost.

**Q.E.D.**

**Lema 1.** *(**Gronwallova nejednakost**, [Ta1, str. 9]) Neka je $a < b$, te $f \in \mathrm{L}^\infty(\langle a,b\rangle)$ i $p \in \mathrm{L}^1(\langle a,b\rangle)$ nenegativne funkcije, takve da postoji $M > 0$ za koji vrijedi*

$$0 \leq f(t) \leq M + \int_a^t p(s)f(s)\,ds\,, \qquad t \in \langle a,b\rangle\,.$$

*Tada vrijedi i*

$$0 \leq f(t) \leq Me^{\int_a^t p(s)\,ds}\,, \qquad t \in \langle a,b\rangle\,.$$

∎

Sljedeću lemu možemo dokazati upotrebom Gronwallove nejednakosti. Budući da je dokaz analogan dokazu jedinstvenosti u Teoremu 1, to ga ovdje ispuštamo.

**Lema 2.** *Neka su $I_1$ i $I_2$ dva otvorena intervala oko nule, te $u_1 \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(I_1)$ i $u_2 \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(I_2)$ dva rješenja zadaće (ODJ-h). Tada je $u_1 = u_2$ na $I_1 \cap I_2$.* ∎

Gornja lema nam omogućuje definiciju maksimalnog rješenja.

**Teorem 2.** *Postoji maksimalan otvoren interval $I \ni 0$ i jedinstveno maksimalno rješenje $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(I)$ zadaće (ODJ-h). Preciznije, ako je $J \subseteq \langle -T,T\rangle$ otvoren interval oko nule i $v \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(J)$ neko rješenje zadaće (ODJ-h), onda vrijedi $J \subseteq I$ i $v = u_{|_J}$.*

Dem. Neka je

$$\mathcal{R} = \{u_\alpha \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(I_\alpha) : \alpha \in A\}$$

familija svih rješenja zadaće (ODJ-h). Tada je

$$I := \bigcup_{\alpha\in A} I_\alpha$$

otvoren interval oko nule, te očito vrijedi $I_\alpha \subseteq I$, za svaki $\alpha \in A$. Definirajmo funkciju $u : I \longrightarrow \mathbf{R}$ na sljedeći način: za dani $t \in I$ i proizvoljan indeks $\alpha \in A$ za koji je $t \in I_\alpha$, uzmimo

$$u(t) := u_\alpha(t)\,.$$

Zbog prethodne leme je definicija funkcije $u$ dobra, te se lako vidi da je $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(I)$ rješenje zadaće (ODJ-h). Iz konstrukcije je jasno da je to i maksimalno rješenje.

**Q.E.D.**

**Lema 3.** *Ako je $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle S_1,S_2\rangle)$ neko rješenje zadaće (ODJ-h), te*

$$\lim_{t\to S_2^-} u(t) \in \mathbf{R}\,,$$

*onda je $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle S_1,S_2])$.*

Dem. Jasno je da je $u \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\langle S_1,S_2])$. Stoga za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi $u \in \mathrm{L}^\infty([S_1+\varepsilon,S_2])$, a kako je $h$ lokalno omeđena, to za $s,t \in [S_1+\varepsilon,S_2]$ imamo

$$|u(t)-u(s)| = \Big|\int_s^t h(\sigma,u(\sigma))d\sigma\Big| \leq \int_{[s,t]} |h(\sigma,u(\sigma))|d\sigma \leq C_\varepsilon|t-s|\,,$$

za neku konstantu $C_\varepsilon > 0$. Odavdje slijedi da je $u$ Lipschitzova na $[S_1+\varepsilon,S_2]$, za svaki $\varepsilon > 0$, što povlači $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle S_1,S_2])$.

**Q.E.D.**

**Teorem 3.** *Pretpostavimo dodatno da je $h \geq 0$ i $u_0 \geq 0$. Ako je $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle\alpha,\beta\rangle)$ maksimalno rješenje zadaće (ODJ-h) i $\beta < T$, onda je*

$$\lim_{t\to\beta^-} u(t) = +\infty\,.$$

Dem. Prvo uočimo da $h \geq 0$ i $u_0 \geq 0$ povlači $u \geq 0$ (svaki član iterativnog niza $(u_k)$ iz Teorema 1 je nenegativan, pa je stoga takav i pripadni uniformni limes). Pretpostavimo sada da je $\lim_{t\to\beta^-} u(t) = u_\beta \in \mathbf{R}$ (taj limes uvijek postoji, jer je $u$ neprekinuta). Prema Teoremu 1 postoji $\varepsilon > 0$ i $\tilde{u} \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon\rangle)$ koji je lokalno rješenje zadaće

$$\begin{cases} \tilde{u}'(t) = h(t,\tilde{u}(t)) & (\text{ss } t) \\ \tilde{u}(\beta) = u_\beta \end{cases}.$$

Neka je $v : \langle\alpha,\beta+\varepsilon\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ funkcija definiranaformulom

$$v(t) := \begin{cases} u(t)\,, & t \in \langle\alpha,\beta] \\ \tilde{u}(t)\,, & t \in [\beta,\beta+\varepsilon\rangle \end{cases}.$$

Prema prethodnoj lemi je $u \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle\alpha,\beta])$, što zajedno s $\tilde{u} \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon\rangle)$ povlači $v \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle\alpha,\beta+\varepsilon\rangle)$. Funkcija $v$ je očito rješenje zadaće (ODJ-h), što je kontradikcija s činjenicom da je $u$ maksimalno rješenje.

**Q.E.D.**

**Napomena.** Iz prethodnog teorema slijedi da *ukoliko maksimalno rješenje postoji samo do trenutka $\beta < T$, onda je to zbog eksplozije u trenutku $\beta$.* ∎

## 2. Postavljanje zadaće i rješenje

Neka su $d$ i $r$ dva prirodna broja, te $\Omega := \langle 0,T\rangle \times \mathbf{R}^d$ pruga u $\mathbf{R}^{d+1}$. Promatramo Cauchyjevu zadaću za polulinearni hiperbolički sustav

$$\begin{cases} \partial_t \mathsf{u}(t,\mathbf{x}) + \displaystyle\sum_{k=1}^{d} \mathbf{A}^k(t,\mathbf{x})\partial_k \mathsf{u}(t,\mathbf{x}) = \mathsf{f}(t,\mathbf{x},\mathsf{u}(t,\mathbf{x})) \\ \mathsf{u}(0,\cdot) = \mathsf{v} \end{cases}.$$

Vektorska funkcija $\mathsf{u} = (u_1,u_2,\cdots,u_r)$ je nepoznata, dok su matrični koeficijenti $\mathbf{A}^k : \Omega \longrightarrow \mathrm{M}_r(\mathbf{R})$, $k \in 1..d$, desna strana $\mathsf{f} = (f_1,f_2,\cdots,f_r)$ i početni uvjet $\mathsf{v} = (v_1,v_2,\cdots,v_r)$ poznate funkcije. Pretpostavljamo da je svaka matrična funkcija $\mathbf{A}^k$ dijagonalna:

$$\mathbf{A}^k = \mathrm{diag}\{a^k_1,a^k_2,\cdots,a^k_r\}\,.$$

Uz ovo pretpostavku gornji sustav poprima *nespareni* oblik: ako definiramo vektorske funkcije $\mathsf{a}_i$ (za $i \in 1..r$)

$$\mathsf{a}_i := (a^1_i,a^2_i,\cdots,a^d_i)\,,$$

gornju Cauchyjevu zadaću možemo zapisati kao

$$(\mathrm{CP}) \qquad \begin{cases} \partial_t u_i(t,\mathbf{x}) + \mathsf{a}_i(t,\mathbf{x})\cdot\nabla u_i(t,\mathbf{x}) = f_i(t,\mathbf{x},\mathsf{u}(t,\mathbf{x})) \\ u_i(0,\cdot) = v_i \end{cases}, \quad \text{za } i \in 1..r\ .$$

Uočimo da se na lijevoj strani $i$-te jednadžbe u (CP) pojavljuje samo komponenta $u_i$ nepoznate funkcije $\mathsf{u}$.

Motivaciju za proučavanje takvih zadaća možemo naći u kinetičkoj teoriji plinova: diskreti modeli za Boltzmannovu jednadžbu – Carlemanov, Broadwellov i Maxwellov sustav (vidi [Ta5]) su upravo ovog tipa. Isto tako, lako se može provjeriti da se svaki polulinearni strogo hiperbolički sustav u jednoj prostornoj varijabli može lako svesti na nespareni sustav (uz pretpostavku da su koeficijenti $\mathrm{C}^1$ glatki). Naravno, jedna polulinearna jednadžba ($r = 1$) je također poseban slučaj nesparenog sustava.

Pretpostavljamo da je svaki koeficijent $\mathsf{a}_i$ (za $i \in 1..r$)

(A1)
- omeđen: $\mathsf{a}_i \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^d)$ ;
- Lipschitzov po $\mathbf{x}$ : $(\exists\, A > 0)(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d)$
$$|\mathsf{a}_i(t, \mathbf{x}) - \mathsf{a}_i(t, \mathbf{y})| \leq A|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\text{ss } t \in \langle 0, T\rangle)\,.$$

Ovdje i u ostatku ovog poglavlja (da bismo izbjegli pisanje nekih konstanti) s $|\cdot|$ označavamo vektorsku normu $|\cdot|_\infty$, te istu oznaku koristimo i za označavanje klasične skalarne norme. S $\mathrm{K}_{\mathbf{R}^r}[0, r_1]$ označavamo zatvorenu jediničnu kuglu $\{\mathbf{z} \in \mathbf{R}^r : |\mathbf{z}| \leq r_1\}$ u $\mathbf{R}^r$. Za početni uvjet i desnu stranu pretpostavljamo da vrijedi:

(A2)
- $\mathsf{v} \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)$ ;
- $\mathsf{f} : \Omega \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}^r$ je izmjeriva ;
- $\mathsf{f}$ je lokalno Lipschitzova po $\mathsf{u}$:
$(\exists\, \Psi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}))(\forall\, r_1 > 0)(\forall\, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathrm{K}_{\mathbf{R}^r}[0, r_1])$
$$|\mathsf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w}) - \mathsf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{z})| \leq \Psi(r_1)|\mathbf{w} - \mathbf{z}| \quad (\text{ss } (t, \mathbf{x}) \in \Omega)\,;$$
- $\mathsf{f}$ je lokalno omeđena po $\mathsf{u}$:
$(\exists\, \Phi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([0, T] \times \mathbf{R}))(\forall\, r_1 > 0)(\forall\, \mathbf{w} \in \mathrm{K}_{\mathbf{R}^r}[0, r_1])$
$$|\mathsf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{w})| \leq \Phi(t, r_1) \quad (\text{ss } (t, \mathbf{x}) \in \Omega)\,.$$

Uz tako slabe pretpostavke na koeficijente, početni uvjet i desnu stranu ne možemo očekivati egzistenciju klasičnog rješenja, te stoga tražimo slabo rješenje.

**Definicija.** Funkcija $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{R}^r)$ je slabo rješenje zadaće (CP) na $\Omega$ (uz pretpostavke (A1) i (A2)), ukoliko za svaki $i \in 1..r$ i za svaki $\varphi \in \mathrm{C}^1_c([0, T\rangle \times \mathbf{R}^d)$ vrijedi

$$-\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} u_i[\partial_t \varphi + \mathsf{div}\,(\varphi \mathsf{a}_i)]d\mathbf{x}dt = \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} f_i(\cdot, \cdot, \mathsf{u}(\cdot, \cdot))\varphi d\mathbf{x}dt + \int_{\mathbf{R}^d} v_i \varphi(0, \cdot)d\mathbf{x}\,.$$

∎

Prostor $\mathrm{C}^1_c([0, T\rangle \times \mathbf{R}^d)$ iz gornje definicije definiramo kao prostor svih restrikcija funkcija iz $\mathrm{C}^1_c(\langle -\infty, T\rangle \times \mathbf{R}^d)$ na $[0, T\rangle \times \mathbf{R}^d$.

### Teorem egzistencije i jedinstvenosti

Dokaz teorema egzistencije i jedinstvenosti za (CP) možemo naći u [Ta1] i [Ta5] (uz pretpostavku (A1) i nešto izmjenjenu pretpostavku (A2): funkcija $\Phi$ koja predstavlja lokalnu među za $\mathsf{f}$ ne ovisi o vremenskoj varijabli). Ovdje ćemo dati nešto precizniju verziju tog teorema, zajedno s dokazom. Dokaz koristi sljedeći rezultat egzistencije i jedinstvenosti za linearnu prijenosnu jednadžbu.

**Teorem 4.** *Za $p \in \langle 1, \infty]$, neka je $\mathsf{a} \in \mathrm{L}^\infty(\Omega; \mathbf{R}^d)$ funkcija koja zadovoljava*

$$(\exists\, A > 0)(\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^d) \quad |\mathsf{a}(t, \mathbf{x}) - \mathsf{a}(t, \mathbf{y})| \leq A|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\text{ss } t \in \langle 0, T\rangle)\,.$$

*Nadalje, neka su $v \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)$ i $f \in \mathrm{L}^1([0, T]; \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d))$. Tada Cauchyjeva zadaća*

$$\begin{cases} \partial_t U(t, \mathbf{x}) + \mathsf{a}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla U(t, \mathbf{x}) = f(t, \mathbf{x}) \quad u \quad \Omega \\ U(0, \cdot) = v \end{cases}$$

*ima jedinstveno slabo rješenje $U$ u prostoru $\mathrm{L}^\infty([0, T]; \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d))$, u smislu*

$$(\forall\, \varphi \in \mathrm{C}^1_c([0, T\rangle \times \mathbf{R}^d)) \quad -\int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} U[\partial_t \varphi + \mathsf{div}\,(\varphi \mathsf{a})] d\mathbf{x} dt = \int_0^T \int_{\mathbf{R}^d} f \varphi d\mathbf{x} dt + \int_{\mathbf{R}^d} v \varphi(0, \cdot) d\mathbf{x}\,.$$

*Štoviše, postoji konstanta $C_p$ koja ovisi samo o $p$, $T$ i $\mathsf{a}$, takva da vrijedi ocjena*

$$\|U(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)} \leq C_p\Big(\|v\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)} + \int_0^t \|f(s, \cdot)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d)} ds\Big) \qquad (\text{ss } t \in [0, T])\,.$$

*Posebno, $C_\infty = 1$.*

∎

**Teorem 5.** *Neka vrijede pretpostavke (A1) i (A2), te pretpostavimo da je $u : [0, S\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ apsolutno neprekinuto rješenje zadaće*

$$\text{(ODJ-}t\text{)} \qquad \begin{cases} u'(t) = \Phi(t, u(t)) \quad (\text{ss } t) \\ u(0) = \|\mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)} \end{cases},$$

*za neki $S \in \langle 0, T]$. Tada postoji jedinstvena funkcija $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([0, S\rangle; \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r))$, koja je slabo rješenje zadaće (CP) na $\langle 0, S\rangle \times \mathbf{R}^d$. K tome, $\mathsf{u}$ zadovoljava ocjenu*

$$\text{(E)} \qquad \|\mathsf{u}(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)} \leq u(t) \quad (\text{ss } t \in \langle 0, S\rangle)\,.$$

Dem. Pokažimo prvo jedinstvenost: pretpostavimo da su $\mathsf{u}, \mathsf{w} \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([0, S\rangle; \mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r))$ dva slaba rješenja zadaće (CP) i označimo $g(t) := \|\mathsf{u}(t, \cdot) - \mathsf{w}(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)}$. Činjenica da je $\mathsf{f}$ lokalno Lipschitzova povlači

$$(\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, D_\varepsilon > 0)(\forall\, i \in 1..r)$$
$$\|f_i(t, \cdot, \mathsf{u}(t, \cdot)) - f_i(t, \cdot, \mathsf{w}(t, \cdot))\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)} \leq D_\varepsilon g(t) \quad (\text{ss } t \in \langle 0, S - \varepsilon\rangle)\,.$$

Oduzmemo li sada jednadžbe za $\mathsf{u}$ i $\mathsf{w}$, odnosno njihove slabe formulacije, koristeći ocjene iz prethodnog teorema dobivamo (za $i \in 1..r$ i skoro svaki $t \in \langle 0, S - \varepsilon\rangle$)

$$\|u_i(t, \cdot) - w_i(t, \cdot)\| \leq \int_0^t \|f_i(s, \cdot, \mathsf{u}(s, \cdot)) - f_i(s, \cdot, \mathsf{w}(s, \cdot))\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)} ds\,.$$

Uzimanjem maksimuma po $i$ slijedi

$$g(t) \leq \int_0^t D_\varepsilon g(s) ds\,, \qquad (\text{ss } t \in \langle 0, S - \varepsilon\rangle)\,,$$

pa Gronwallova nejednakost povlači da je $g = 0$ na $\langle 0, S - \varepsilon\rangle$. Zbog proizvoljnosti $\varepsilon$ slijedi da je $\mathsf{u} = \mathsf{w}$ skoro svuda na $\langle 0, S\rangle$, i time je jedinstvenost dokazana.

Da bismo dokazali egzistenciju, najprije induktivno definirajmo $\mathsf{u}^n$, $n \in \mathbf{N}$, kao slabo rješenje linearne zadaće

$$\begin{cases} \partial_t u_i^n(t, \mathbf{x}) + \mathsf{a}_i(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla u_i^n(t, \mathbf{x}) = f_i(t, \mathbf{x}, \mathsf{u}^{n-1}(t, \mathbf{x})) \\ u_i^n(0, \cdot) = v_i \end{cases}, \quad \text{za } i \in 1..r \ ,$$

počevši s omeđenom funkcijom $\mathsf{u}^0$ na $\langle 0, S\rangle \times \mathbf{R}^d$ koja zadovoljava

$$\|\mathsf{u}^0(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} \le u(t) \quad (\text{ss } t \in \langle 0, S\rangle)\,.$$

Prema prethodnom teoremu je svaki $\mathsf{u}^n$ dobro definirana omeđena funkcija. Također, $\mathsf{u}^1$ zadovoljava ocjenu

$$\begin{aligned} \|\mathsf{u}^1(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} &\le \|\mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)} + \int_0^t \|\mathsf{f}(s, \cdot, \mathsf{u}^0(s, \cdot))\| ds \\ &\le \|\mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d)} + \int_0^t \Phi(s, u(s)) ds = u(t) \quad (\text{ss } t \in \langle 0, S\rangle)\,. \end{aligned}$$

Indukcijom se lako pokaže da ista ocjena vrijedi za svaki $\mathsf{u}^n$, odnosno da vrijedi

$$\|\mathsf{u}^n(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} \le u(t) \quad (\text{ss } t \in \langle 0, S\rangle)\,.$$

U preostalom dijelu dokaza razlikujemo dva slučaja. Prvi je kada $u$ ne eksplodira u trenutku $S$, te je stoga omeđena funkcija na $\langle 0, S\rangle$. Tada postoji konstanta $P$ takva da je $|\Psi(u(\cdot))| \le P$. Ukoliko oduzmemo jednadžbe za $\mathsf{u}^{n+1}$ i $\mathsf{u}^n$ (odnosno pripadne slabe formulacije), koristeći ocjenu iz prethodnog teorema i činjenicu da je $\mathsf{f}$ lokalno Lipschitzova, dobivamo

$$\begin{aligned} \|\mathsf{u}^{n+1}(t, \cdot) - \mathsf{u}^n(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} &\le \int_0^t \|\mathsf{f}(s, \cdot, \mathsf{u}^n(s, \cdot)) - \mathsf{f}(s, \cdot, \mathsf{u}^{n-1}(s, \cdot))\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} ds \\ &\le P \int_0^t \|\mathsf{u}^n(s, \cdot) - \mathsf{u}^{n-1}(s, \cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} ds\,, \end{aligned}$$

za skoro svaki $t \in \langle 0, S - \varepsilon\rangle$. Slično kao u dokazu Teorema 1, indukcijom se sada lako pokaže da za skoro svaki $t \in \langle 0, S - \varepsilon\rangle$ vrijedi

$$\|\mathsf{u}^{n+1}(t, \cdot) - \mathsf{u}^n(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} \le \frac{RP^n t^n}{n!} \le \frac{RP^n S^n}{n!}\,,$$

gdje je $R := \|\mathsf{u}^1 - \mathsf{u}^0\|_{\mathrm{L}^\infty(\langle 0,S\rangle \times \mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)}$. Iz te nejednakosti lako slijedi

$$\sum_{j=0}^n \|\mathsf{u}^{j+1} - \mathsf{u}^j\|_{\mathrm{L}^\infty(\langle 0,S\rangle \times \mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} \le \sum_{j=0}^n \frac{RP^j S^j}{j!} \le R\mathrm{e}^{PS}\,,$$

pa možemo zaključiti da red $\sum_{j=0}^{n}(\mathsf{u}^{j+1} - \mathsf{u}^{j}) = \mathsf{u}^{n+1} - \mathsf{u}^{0}$ konvergira apsolutno u prostoru $\mathrm{L}^\infty(\langle 0, S\rangle \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)$, te zbog potpunosti onda i konvergira. To povlači da niz $(\mathsf{u}^n)$ konvergira, pa ako njegov limes označimo s $\mathsf{u}$, iz činjenice da je $\mathsf{f}$ lokalno Lipschitzova slijedi

$$\mathsf{f}(\cdot,\cdot,\mathsf{u}^n(\cdot,\cdot)) \longrightarrow \mathsf{f}(\cdot,\cdot,\mathsf{u}(\cdot,\cdot)) \qquad \text{u} \qquad \mathrm{L}^\infty(\langle 0, S\rangle \times \mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)\,.$$

Prijelazom na limes u slaboj formulaciji linearne zadaće za $\mathsf{u}^n$ lako se vidi da je $\mathsf{u}$ slabo rješenje zadaće (CP) i da zadovoljava ocjenu (E), te je time egzistencija dokazana u ovome slučaju.

Ukoliko $u$ ima eksploziju u trenutku $S$, onda ponavljamo proceduru iz prethodnog slučaja da bismo dobili slabo rješenje $\mathsf{u}^{S_1}$ zadaće (CP) na $\langle 0, S_1\rangle \times \mathbf{R}^d$, za svaki $S_1 \in \langle 0, S\rangle$. Jedinstvenost slabog rješenja povlači da je $\mathsf{u}^{S_1} = \mathsf{u}^{S_2}$ na $\langle 0, S_1\rangle \times \mathbf{R}^d$, za $0 < S_1 < S_2 < S$, što osigurava egzistenciju funkcije $\mathsf{u} : \langle 0, S\rangle \times \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{R}^r$, sa svojstvom

$$(\forall\, S_1 \in \langle 0, S\rangle) \qquad \mathsf{u}^{S_1} = \mathsf{u}\big|_{\langle 0, S_1\rangle \times \mathbf{R}^d}\,.$$

Jednostavno se vidi da je $\mathsf{u}$ slabo rješenje zadaće (CP) na $\langle 0, S\rangle \times \mathbf{R}^d$, te da zadovoljava ocjenu (E).

**Q.E.D.**

**Napomena.** Jedina pretpostavka na funkciju $\Phi$ je da pripada prostoru $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([0,T] \times \mathbf{R})$, što nije dovoljno da osigura egzistenciju rješenja zadaće (ODJ-t). Budući da je svaka funkcija $\Phi_1$ koja je veća od $\Phi$ također lokalna međa za $\mathsf{f}$, to možemo tražiti rješenje zadaće (ODJ-t) s funkcijom $\Phi_1$ na desnoj strani. Uzmemo li $\Phi_1$ kao niže (tako da je neprekinuta i ne ovisi o vremenskoj varijabli), imamo osiguranu egzistenciju $\mathrm{C}^1$ rješenja zadaće (ODJ-t).

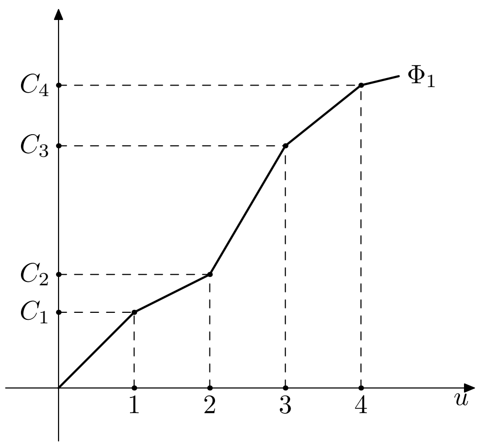
Označimo

$$C_n := \|\Phi\|_{\mathrm{L}^\infty([0,T]\times[0,n])}\,, \quad n \in \mathbf{N}\,,$$

i definirajmo funkciju $\Phi_1$ s

$$\Phi_1(u) := C_{n+1} + (C_{n+2} - C_{n+1})(u - n)\,, \quad u \in [n, n+1]\,. \quad n \in \mathbf{N}_0\,,$$

Graf funkcije $\Phi_1$ dan je na sljedećoj slici.




∎

### $\mathrm{L}^p$ slučaj

Neka je $p \in \langle 1, +\infty \rangle$ i pretpostavimo da početni uvjet i desna strana zadovoljavaju:

$$
\text{(A3)} \quad
\begin{array}{l}
\bullet\ \mathsf{v} \in \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r)\,; \\
\bullet\ \mathsf{f} : \Omega \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}^r \text{ je izmjeriva}\,; \\
\bullet\ (\exists\, \Psi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}))(\forall\, r_1 > 0)(\forall\, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathrm{K}_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)}[0, r_1]) \\
\qquad\qquad \|\mathsf{f}(t, \cdot, \mathbf{w}(\cdot)) - \mathsf{f}(t, \cdot, \mathbf{z}(\cdot))\|_{\mathrm{L}^p} \leq \Psi(r_1)\|\mathbf{w} - \mathbf{z}\|_{\mathrm{L}^p} \quad (\text{ss } t \in [0, T])\,; \\
\bullet\ (\exists\, \Phi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([0, T] \times \mathbf{R}))(\forall\, r_1 > 0)(\forall\, \mathbf{w} \in \mathrm{K}_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)}[0, r_1]) \\
\qquad\qquad \|\mathsf{f}(t, \cdot, \mathbf{w}(\cdot))\|_{\mathrm{L}^p} \leq \Phi(t, r_1) \quad (\text{ss } t \in [0, T])\,.
\end{array}
$$

Vrijedi sljedeći analogon Teorema 5.

**Teorem 6.** *Neka vrijede pretpostavke (A1) i (A3), te neka je $C_p$ konstanta iz Teorema 4. Pretpostavimo da je $u : [0, S\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ apsolutno neprekinuto rješenje zadaće*

$$
\begin{cases}
u'(t) = C_p \Phi(t, u(t)) \\
u(0) = C_p \|\mathsf{v}\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)}
\end{cases},
$$

*za neki $S \in \langle 0, T]$. Tada postoji jedinstvena funkcija $\mathsf{u} \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([0, S\rangle; \mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d; \mathbf{R}^r))$ koja je slabo rješenje zadaće (CP) na $\langle 0, S\rangle \times \mathbf{R}^d$ (uočimo da definicija slabog rješenja ima smisla i uz pretpostavke (A1) i (A3)). K tome, $\mathsf{u}$ zadovoljava ocjenu*

$$
\|\mathsf{u}(t, \cdot)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbf{R}^d;\mathbf{R}^r)} \leq u(t) \quad (\text{ss } t \in \langle 0, S\rangle)\,.
$$

∎

Dokaz gornjeg teorema je analogan dokazu Teorema 5, te ga stoga ovdje izostavljamo.

**Napomena.** Pretpostavke (A3) su teže za provjeriti nego li pretpostavke (A2). Također su prilično ograničavajuće za funkciju $\mathsf{f}$, jer povlače sublinearan rast funkcije $\mathsf{f}$ po varijabli $\mathbf{w}$, što je dobro poznato iz teorije Nemitskijevih operatora. ∎

## 3. Ocjene na rješenje

Ocjena na rješenje $\mathsf{u}$ iz Teorema 5 očito ovisi o rješenju $u$ zadaće (ODJ-t), te stoga i o izboru funkcije $\Phi$. Iz dokaza Teorema 5 je jasno da i vrijeme egzistencije rješenja $\mathsf{u}$ ovisi o vremenu egzistencije rješenja $u$ zadaće (ODJ-t): grubo govoreći, ukoliko rješenje zadaće (ODJ-t) postoji do nekog trenutka $S$, onda i rješenje zadaće (CP) postoji barem do trenutka $S$. Budući da imamo veliki izbor mogućnosti za odabir funkcije $\Phi$ (kao što smo već istakli, ukoliko je neka funkcija lokalna međa za $\mathsf{f}$, onda je svaka veća funkcija također lokalna međa za $\mathsf{f}$), pitanje koje se prirodno postavlja je *koji $\Phi$ će dati najbolju ocjenu na rješenje zadaće (CP)* i *koji $\Phi$ će osigurati najveće vrijeme egzistencije rješenja zadaće (CP).* Sljedeći teorem djelomično daje odgovor na prvo pitanje.

**Teorem 7.** *Pretpostavimo da su $\Phi_1, \Phi_2 : [0, T] \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ dvije izmjerive funkcije takve da je $\Phi_1 \leq \Phi_2$* (ss), *te pretpostavimo da je $\Phi_1$ lokalno Lipschitzova po drugoj varijabli:*

$$
\begin{aligned}
&(\exists\, \Psi \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}))(\forall\, u, v \in \mathbf{R}) \\
&\qquad\qquad |u| \geq |v| \quad \Longrightarrow \quad |\Phi_1(t, u) - \Phi_1(t, v)| \leq \Psi(|u|)|u - v| \quad (\text{ss } t \in \langle 0, T\rangle)\,.
\end{aligned}
$$

*Nadalje, neka je (za $i = 1, 2$ i $T_i \leq T$) $u_i : [0, T_i\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ rješenje zadaće*

$$\begin{cases} u_i'(t) = \Phi_i(t, u_i(t)) & (\text{ss } t) \\ u_i(0) = u_0 \end{cases},$$

*te $u_1 \in \mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}([0, T_1\rangle)$ i $u_2 \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0, T_2\rangle)$. Tada je $u_1 \leq u_2$ na presjeku njihovih intervala egzistencije.*

Dem. Pretpostavimo da postoji $c > 0$ za koji je $u_1(c) > u_2(c)$. Budući da su $u_1$ i $u_2$ neprekinute, to nejednakost $u_1 > u_2$ vrijedi i na nekom otvorenom intervalu koji sadrži $c$. Označimo s $\langle a, b\rangle$ uniju svih takvih intervala. Očito je $u_1(a) = u_2(a) =: u_a$, te za $t \in \langle a, b\rangle$ vrijedi

$$u_i(t) = u_a + \int_a^t \Phi_i(s, u_i(s))ds\,, \qquad i = 1, 2\,.$$

Ako za mali $\varepsilon > 0$ označimo $K := \Psi\Big(\|u_1\|_{\mathrm{L}^\infty([a,b-\varepsilon])}\Big)$, onda za $t \in [a, b-\varepsilon]$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|u_1(t) - u_2(t)| &= u_1(t) - u_2(t) \\
&= \int_a^t \Big[\Phi_1(s, u_1(s)) \overbrace{-\Phi_2(s, u_2(s)) + \Phi_1(s, u_2(s))}^{\leq 0} -\Phi_1(s, u_2(s))\Big]\, ds \\
&\leq \int_a^t \Big[\Phi_1(s, u_1(s)) - \Phi_1(s, u_2(s))\Big]\, ds \\
&\leq \int_a^t |\Phi_1(s, u_1(s)) - \Phi_1(s, u_2(s))|\, ds \leq \int_a^t K|u_1(s) - u_2(s)|\, ds\,.
\end{aligned}$$

Sada Gronwallova nejednakost povlači $u_1 = u_2$ na $[a, b-\varepsilon]$, što je kontradikcija s $u_1 > u_2$ na $\langle a, b\rangle$.

**Q.E.D.**

Gornji teorem sugerira da će najbolja ocjena (tipa (E)) biti dana s najmanjom mogućom funkcijom $\Phi$. U sljedećem teoremu su dana svojstva najmanje moguće međe za $\mathsf{f}$.

**Teorem 8.** *Funkcija*

$$h(t, u) := \max_{|\mathsf{u}|\leq u} \operatorname*{vrai\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d} |\mathsf{f}(t, \mathbf{x}, \mathsf{u})|\,, \quad t \in [0, T]\,,\ u \in \mathbf{R}^+_0\,,$$

*koja je najmanja moguća lokalna međa za $\mathsf{f}$, ima sljedeća svojstva:*

- $h \in \mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([0, T] \times \mathbf{R}^+_0)$;
- $h \geq 0$ *i* $h(t, \cdot)$ *je neopadajuća,* $t \in [0, T]$;
- *$h$ je lokalno Lipschitzova po $u$ (s istim $\Psi$ kao u (A2)):*
  $(\forall\, u, v \in \mathbf{R}^+_0) \quad u \geq v \quad \Longrightarrow \quad |h(t, u) - h(t, v)| \leq \Psi(u)|u - v| \quad (\text{ss } t \in [0, T])$.

Dem. Prva dva svojstva su očita, pa preostaje pokazati zadnje svojstvo. Pokažimo najprije da je funkcija $g : [0,T] \times \mathbf{R}^r \longrightarrow \mathbf{R}$ definirana s

$$g(t, \mathsf{u}) := \operatorname*{vrai\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbf{R}^d} |\mathsf{f}(t, \mathbf{x}, \mathsf{u})|$$

lokalno Lipschitzova po $\mathsf{u}$, odnosno da vrijedi

$$(4)\qquad (\forall\, r_1 > 0)(\forall\, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathrm{K}_{\mathbf{R}^r}[\mathsf{0}, r_1]) \quad |g(t,\mathbf{w}) - g(t,\mathbf{z})| \le \Psi(r_1)|\mathbf{w} - \mathbf{z}| \qquad (\text{ss } t \in [0,t])\,.$$

Zaista, za $r_1 > 0$ i $\mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathrm{K}_{\mathbf{R}^r}[\mathsf{0}, r_1]$ fiksne, činjenica da je $\mathsf{f}$ lokalno Lipschitzova povlači

$$(5)\qquad |\mathsf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{w})| \le |\mathsf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{z})| + \Psi(r_1)|\mathbf{w} - \mathbf{z}| \qquad (\text{ss } (t,\mathbf{x}) \in \Omega)\,.$$

Iz definicije bitnog supremuma slijedi da za svaki $t \in [0,t]$, i svaki $\varepsilon > 0$, postoji skup pozitivne mjere $E_\varepsilon^{t,\mathbf{w}} \subseteq \mathbf{R}^d$, takav da je

$$(\forall\, \mathbf{x} \in E_\varepsilon^{t,\mathbf{w}}) \quad g(t,\mathbf{w}) \le \varepsilon + |\mathsf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{w})|\,,$$

što zajedno s (5) daje

$$g(t,\mathbf{w}) \le \varepsilon + |\mathsf{f}(t,\mathbf{x},\mathbf{z})| + \Psi(r_1)|\mathbf{w} - \mathbf{z}| \qquad (\text{ss } t \in [0,T]\,,\ \mathbf{x} \in E_\varepsilon^{t,\mathbf{w}})\,,$$

odnosno

$$g(t,\mathbf{w}) \le \varepsilon + g(t,\mathbf{z}) + \Psi(r_1)|\mathbf{w} - \mathbf{z}| \qquad (\text{ss } t \in [0,T])\,.$$

Zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$ dobivamo

$$g(t,\mathbf{w}) - g(t,\mathbf{z}) \le \Psi(r_1)|\mathbf{w} - \mathbf{z}| \qquad (\text{ss } t \in [0,T])\,.$$

Na isti način se pokaže i

$$g(t,\mathbf{z}) - g(t,\mathbf{w}) \le \Psi(r_1)|\mathbf{w} - \mathbf{z}| \qquad (\text{ss } t \in [0,T])\,,$$

čime je dokazana tvrdnja (4).

Kako bismo pokazali da je $h$ lokalno Lipschitzova po drugoj varijabli, uzmimo $u \ge v \ge 0$, i za $t \in [0,T]$ označimo s $\mathbf{w}_t$ točku iz $\mathrm{K}_{\mathbf{R}^r}[\mathsf{0}, u]$ za koju je $h(t,u) = g(t,\mathbf{w}_t)$. Ako je $\mathbf{w}_t \in \mathrm{K}_{\mathbf{R}^r}[\mathsf{0}, v]$, onda je $h(t,u) = h(t,v)$, pa je nejednakost iz svojstva lokalne Lipschitzovosti za $h$ trivijalno zadovoljena. Ako je $\mathbf{w}_t \notin \mathrm{K}_{\mathbf{R}^r}[\mathsf{0}, v]$, te ako s $\mathbf{z}_t$ označimo presjek kugle $\mathrm{K}_{\mathbf{R}^r}[\mathsf{0}, v]$ sa spojnicom točaka $\mathbf{w}$ i $\mathsf{0}$ u $\mathbf{R}^r$, onda vrijedi

$$g(t,\mathbf{w}_t) - g(t,\mathbf{z}_t) \le \Psi(u)|\mathbf{w}_t - \mathbf{z}_t| \le \Psi(u)|u - v| \qquad (\text{ss } t \in [0,T])\,,$$

te stoga

$$h(t,u) \le g(t,\mathbf{z}_t) + \Psi(u)|u - v| \le h(t,v) + \Psi(u)|u - v| \qquad (\text{ss } t \in [0,T])\,,$$

što povlači

$$|h(t,u) - h(t,v)| = h(t,u) - h(t,v) \le \Psi(u)|u - v| \qquad (\text{ss } t \in [0,T])\,,$$

i time je tvrdnja dokazana.

**Q.E.D.**

**Napomena.** Proširimo li $h$ na $[-T,T]\times\mathbf{R}$ s

$$h(-t,u) := h(t,u)\,, \quad (t,u)\in[0,T]\times\mathbf{R}_0^+\,,$$
$$h(t,-u) := h(t,u)\,, \quad (t,u)\in[-T,T]\times\mathbf{R}_0^+\,,$$

i dalje će biti lokalno omeđena funkcija (sada iz $\mathrm{L}^\infty_{\mathrm{loc}}([-T,T]\times\mathbf{R})$), te lokalno Lipschitzova po drugoj varijabli (s istim $\Psi$ kao prije). ∎

**Korolar 1.** *Neka je $h$ kao u prethodnom teoremu, $u_0\geq 0$, i neka je $u_h\in\mathrm{W}^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\langle\alpha,\beta\rangle)$ maksimalno rješenje zadaće*

$$\begin{cases} u_h'(t)=h(t,u_h(t)) & (\text{ss } t)\\ u(0)=u_0 \end{cases}$$

*(takav $u_h$ postoji prema Teoremu 2). Pretpostavimo da je $v\in\mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}([0,T'\rangle)$ rješenje zadaće*

$$\begin{cases} v'(t)=\Phi(t,v(t)) & (\text{ss } t\in\langle 0,T'\rangle)\\ v(0)=u_0 \end{cases},$$

*za neku izmjerivu funkciju $\Phi\geq h$. Tada je nužno $T'\leq\beta\leq T$ i $u\leq v$ na $[0,T'\rangle$.*

*Stoga je $u_h$ najbolja ocjena na rješenje* $\mathsf{u}$ *zadaće (CP) tipa (E), i* $\mathsf{u}$ *postoji najmanje do trenutka $\beta$ (koje je ujedno najveće vrijeme egzistencije koje Teorem 5 može osigurati).*

Dem. Iz Teorema 7 znamo da je $u\leq v$ na presjeku njihovih intervala egzistencije. Ako je $\beta=T$, onda je jasno i $T'\leq\beta$, a ako je $\beta<T$, onda iz Teorema 3 slijedi da $u$ ima eksploziju u $\beta$, pa zbog $u\leq v$ slijedi i $T\leq\beta$.

**Q.E.D.**

Pogledajmo sada nekoliko (akademskih) primjera. Prvi pokazuje da je bitno dopustiti da $\Phi$ (lokalna međa za $\mathsf{f}$) ovisi i o vremenskoj varijabli da bi se dobila najbolja moguća ocjena na rješenje (naravno, u onim slučajevima kada i desna strana $\mathsf{f}$ zaista ovisi o vremenskoj varijabli). Stoga Teorem 5 daje precizniju ocjenu na rješenje zadaće (CP), u odnosu na od prije poznate rezultate ([Ta1], [Ta5]).

**Primjer 1.** Promatramo Cauchyjevu zadaću za jednadžbu u jednoj prostornoj dimenziji

$$\begin{cases} \partial_t U(t,x)+\partial_x U(t,x)=f(t,x,U):=tU^2 \quad \text{na} \quad \langle 0,T\rangle\times\mathbf{R}\\ U(0,\cdot)=\dfrac{1}{\gamma} \end{cases},$$

gdje je $\gamma>0$ konstanta. Jedinstveno rješenje danog problema dano je s

$$U(t,x)=\frac{1}{\gamma-t^2/2}\,,$$

i postoji do trenutka $t_c=\min\{T,\sqrt{2\gamma}\}$. Ukoliko ne dopustimo da lokalna međa za $\mathsf{f}$ ovisi o vremenskoj varijabli, onda je najbolja (najmanja) međa dana s $\Phi(u)=Tu^2$, te pripadno rješenje zadaće (ODJ-t):

$$u_1(t)=\frac{1}{\gamma-Tt}$$

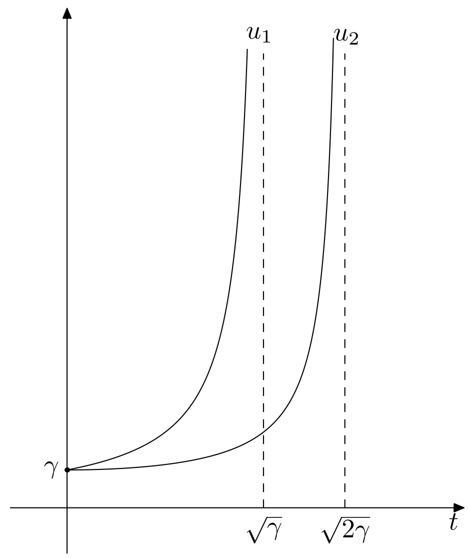
postoji do trenutka $t_1=\min\{T,\dfrac{\gamma}{T}\}$. Međutim, ukoliko dopustimo da lokalna međa za $\mathsf{f}$ ovisi i o vremenskoj varijabli, onda je $h(t,u)=tu^2$ najbolja međa. Sada rješenje

$$u_2(t)=\frac{1}{\gamma-t^2/2}=U(t,x)$$

zadaće (ODJ-h) postoji do trenutka $t_2 = t_c = \min\{T, \sqrt{2\gamma}\}$. Jasno je da je onda i

$$u_1(t) > u_2(t) = \|U(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} \qquad \text{i} \qquad t_1 \le t_2 = t_c\,,$$

kao što je prikazano i na slici niže (kada bismo rješavali gornju Cauchyjevu zadaću na cijelom poluprostoru, dobili bismo $t_1 = \sqrt{\gamma} < \sqrt{2\gamma} = t_2 = t_c$).




∎

Sljedeći primjer pokazuje da ocjena tipa (E) nije najbolja moguća.

**Primjer 2.** Neka je

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}\,, & x \ge 0 \\ e^{x}\,, & x \le 0 \end{cases}.$$

Može se lako provjeriti da je jedinstveno rješenje zadaće na $\langle 0, \infty\rangle \times \mathbf{R}$

$$\begin{cases} \partial_t U + \partial_x U = U^2(g + tg') \\ U(0,\cdot) = \dfrac{1}{\gamma} > 0 \end{cases}$$

dano formulom

$$U(t,x) = \frac{1}{\gamma - tg(x)}\,,$$

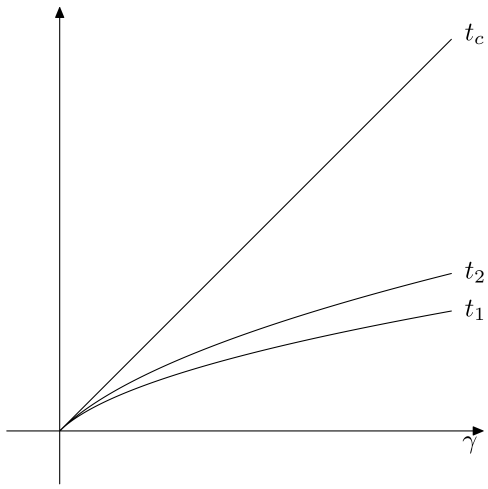
te da postoji do trenutka $t_c = \gamma$. Sada je najbolja moguća lokalna međa na desnu stranu, koja ne ovisi o $t$, dana s $\Phi(u) = (1+T)u^2$ (na pruzi $\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}$), dok je $h(t,u) = (1+t)u^2$. Rješenja $u_1$ zadaće (ODJ-t) i $u_2$ zadaće (ODJ-h) zadovoljavaju (za $t > 0$)

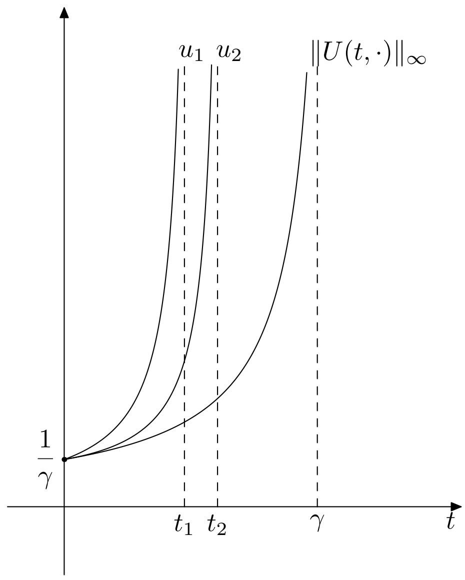
$$\|U(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbf{R})} = \frac{1}{\gamma - t} < u_2(t) = \frac{1}{\gamma - t - \frac{1}{2}t^2} < u_1(t) = \frac{1}{\gamma - (1+T)t}\,,$$

dok za pripadna vremena egzistencije vrijedi

$$T = t_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\gamma}}{2} < t_2 = -1 + \sqrt{1 + 2\gamma} < t_c = \gamma\,,$$

kao što je ilustrirano na sljedećim slikama.




∎

Iz prethodnog primjera se vidi da ocjena tipa (E) nije optimalna.

# Dodatak

**Općenite oznake**

Varijable (vektore) u $\mathbf{R}^d$ ćemo označavati stupčano $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_d)^\top$. Za $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^d$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, s $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^\top \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^n$ označavamo stupac–vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_d, y_1, y_2, \ldots, y_d)^\top$.

S $\mathrm{K}_X(a, \delta)$ označavamo otvorenu kuglu u metričkom prostoru $X$ oko točke $a$, radijusa $\delta$. Posebno, ako je $X$ jednak $\mathbf{R}$ ili $\mathbf{C}$ pišemo samo $\mathrm{K}(a, \delta)$. Analogno s $\mathrm{K}_X[a, \delta]$ (odnosno $\mathrm{K}[a, \delta]$) označavamo zatvorenu kuglu.

Za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$, s $\mathcal{K}(\Omega)$ označavamo skup svih kompaktnih podskupova iz $\mathbf{R}^d$ koji su sadržani u $\Omega$. Za $N, O \subseteq \mathbf{R}^d$, s $N \Subset O$ označavamo da je $N$ kompaktno sadržan u $O$, odnosno da je $\mathrm{Cl}\, N \subseteq \mathsf{Int}\, O$ i $N$ omeđen.

Neka su $V$ i $U$ dva lokalno konveksna topološka vektorska prostora (nad poljem $\mathbf{R}$ ili $\mathbf{C}$). S $\mathcal{L}(V; U)$ označavamo prostor svih neprekinutih linearnih preslikavanja s $V$ u $U$, a s $V'$ dual prostora $V$: sve neprekinute antilinearne funkcionale na $V$, te s ${}_{V'}\langle\, \cdot, \cdot \,\rangle_V$ pripadni seskvilinearni dualni produkt.
Za $S \subseteq V$, sa $S^0$ označavamo anihilator skupa $S$:

$$S^0 := \{T \in V' : (\forall\, v \in V) \quad {}_{V'}\langle\, T, v \,\rangle_V = 0\}.$$

Ako je $V$ unitaran, s $\langle\, \cdot \mid \cdot \,\rangle_V$ označavamo skalarni produkt, te s $S^\perp$ ortogonalni komplement skupa $S \subseteq V$.
Oznaku $\mathrm{supp}\, f$ koristimo za nosač funkcije $f : V \longrightarrow U$:

$$\mathrm{supp}\, f := \mathrm{Cl}\, \{v \in V : f(v) \neq \mathsf{0}\}\,.$$

Niz funkcija $\rho_n : \mathbf{R}^d \longrightarrow \mathbf{C}^r$ nazivamo izglađujući niz, ukoliko je $\rho_n(\mathbf{x}) = n^d \rho(n\mathbf{x})$, za neku funkciju $\rho \in \mathrm{C}_c^\infty(\mathbf{R}^d; \mathbf{R})$ sa svojstvima:

$$\rho \geq 0\,, \qquad \mathrm{supp}\, \rho \subseteq \mathrm{K}[0, 1]\,, \qquad \int\limits_{\mathbf{R}^d} \rho = 1\,.$$

(Na primjer $\rho(\mathbf{x}) = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{1-|\mathbf{x}|^2}}$, gdje je $C$ konstanta određena uvjetom $\int_{\mathbf{R}^d} \rho = 1$.)

**Funkcijski prostori**

$\mathrm{L}^p(X; E)$ – Lebesgueov prostor: za prostor mjere $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ i normiran prostor $(E, |\cdot|)$, sastoji se od svih klasa ekvivalencije skoro svuda jednakih izmjerivih funkcija $u : X \longrightarrow E$ za koje je

$$\|u\|_{\mathrm{L}^p} = \Big(\int\limits_X |u(x)|^p\, d\mu(x)\Big)^{1/p}$$

za $1 \leqslant p < \infty$, odnosno

$$\|u\|_{\mathrm{L}^\infty} = \inf\{C \in \mathbf{R} : |u(x)| \leqslant C \text{ (ss)}\}$$

konačna.
Ukoliko je $E$ unitaran, onda je to i $\mathrm{L}^2$ uz skalarni produkt

$$\langle\, u \mid v \,\rangle_{\mathrm{L}^2} = \int\limits_X \langle\, u(x) \mid v(x) \,\rangle_E \, d\mu(x).$$

$\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; E)$ – prostor lokalno Lebesgueovih funkcija: za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ i normirani prostor $(E, |\cdot|)$, sastoji se od svih klasa ekvivalencije skoro svuda jednakih izmjerivih funkcija $u : \Omega \longrightarrow E$ koje zadovoljavaju

$$(\forall\, K \in \mathcal{K}(\Omega)) \quad f_{|K} \in \mathrm{L}^p(K; E)\,.$$

$\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^r)$ – prostor glatkih funkcija s kompaktnim nosačem (za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren). Ima strukturu LF-prostora, uz pripadnu topologiju strogog induktivnog limes [Bu1, str. 7]. Često se koristi i oznaka $\mathcal{D}(\Omega; \mathbf{C}^r)$.

$\mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^r)$ – prostor distribucija: dual prostora $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^r)$, obično promatran uz slabu $*$ topologiju. Na prostoru distribucija se može definirati (neprekinut) operator deriviranja (po $k$–toj varijabli) $\partial_k : \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^r) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^r)$:

$$(\forall\, T \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbf{C}^r))(\forall\, \boldsymbol{\varphi} \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^r)) \quad {}_{\mathcal{D}'}\langle\, \partial_k T, \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathcal{D}} := -{}_{\mathcal{D}'}\langle\, T, \partial_k \boldsymbol{\varphi} \,\rangle_{\mathcal{D}}\,.$$

Induktivno se mogu definirati i derivacije višeg reda. Mnogi funkcijski prostori su neprekinuto uloženi u distribucije, primjerice $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$, pa i za funkcije iz takvih prostora ima smisla pojam distribucijske derivacije.

$\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ – Soboljevljev prostor (za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren, $p \in [1, \infty]$): sastoji se od elemnata iz $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r)$, čije su sve distribucijske derivacije prvog reda također iz $\mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^r)$. To je Banachov prostor uz normu

$$\|f\|_{\mathrm{W}^{1,p}} = \Big(\|f\|^p_{\mathrm{L}^p} + \sum_{k=1}^d \|\partial_k f\|^p_{\mathrm{L}^p}\Big)^{\frac{1}{p}}\,, \qquad p \in [1, \infty\rangle\,,$$
$$\|f\|_{\mathrm{W}^{1,\infty}} = \max\Big\{\|f\|_{\mathrm{L}^p}, \|\partial_1 f\|_{\mathrm{L}^p}, \|\partial_2 f\|_{\mathrm{L}^p}, \dots, \|\partial_d f\|_{\mathrm{L}^p}\Big\}\,.$$

Ako je $K \in \mathcal{K}(\mathbf{R}^d)$, onda prostor $\mathrm{W}^{1,p}(K; \mathbf{C}^r)$, definiramo kao skup svih $u \in \mathrm{L}^p(K; \mathbf{C}^r)$, za koje postoji otvoren skup $U \supseteq K$ i funkcija $f \in \mathrm{W}^{1,p}(U; \mathbf{C}^r)$, takvi da je $u = f_{|K}$.

$\mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{C}^r)$: zatvarač prostora $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^r)$ u $\mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{C}^r)$.

$\mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r) := \mathrm{W}^{1,2}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ je Hilbertov prostor uz skalarni produkt

$$\langle\, u \mid v \,\rangle_{\mathrm{H}^1} := \langle\, u \mid v \,\rangle_{\mathrm{L}^2} + \sum_{k=1}^d \langle\, \partial_k u \mid \partial_k v \,\rangle_{\mathrm{L}^2}\,.$$

$\mathrm{H}^1_0(\Omega; \mathbf{C}^r) := \mathrm{W}^{1,p}_0(\Omega; \mathbf{C}^r)$: zatvarač prostora $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^r)$ u $\mathrm{H}^1(\Omega; \mathbf{C}^r)$.

$\mathrm{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega) := \{\mathsf{f} \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^d) : \mathsf{div}\,\mathsf{f} \in \mathrm{L}^p(\Omega)\}$ je normiran prostor uz normu

$$\|\mathsf{f}\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{div}}} = \Big(\|\mathsf{f}\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^d)} + \|\mathsf{div}\,\mathsf{f}\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega)}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i $p \in [1, \infty\rangle$.

$\mathrm{L}^p_{\mathrm{div},0}(\Omega)$: zatvarač prostora $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^d)$ u $\mathrm{L}^p_{\mathrm{div}}(\Omega; )$.

$\mathrm{L}^p_{\mathrm{rot}}(\Omega) := \{\mathsf{f} \in \mathrm{L}^p(\Omega; \mathbf{C}^3) : \mathsf{rot}\,\mathsf{f} \in \mathrm{L}^p(\Omega)\}$ je normiran prostor uz normu

$$\|\mathsf{f}\|_{\mathrm{L}^p_{\mathrm{rot}}} = \Big(\|\mathsf{f}\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^3)} + \|\mathsf{rot}\,\mathsf{f}\|^p_{\mathrm{L}^p(\Omega;\mathbf{C}^3)}\Big)^{\frac{1}{p}},$$

za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^3$ otvoren i $p \in [1, \infty\rangle$.

$\mathrm{L}^p_{\mathrm{rot},0}(\Omega)$: zatvarač prostora $\mathrm{C}^\infty_c(\Omega; \mathbf{C}^3)$ u $\mathrm{L}^p_{\mathrm{rot}}(\Omega)$.

$\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ – prostor lokalno Soboljevljevih funkcija (za $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ otvoren i $p \in [1, \infty]$): sastoji se od elemenata $\mathsf{f}$ iz $\mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r)$ sa sljedećim svojstvom

$$(\forall K \in \mathcal{K}(\Omega)) \quad f_{|K} \in \mathrm{W}^{1,p}(K; \mathbf{C}^r)\,.$$

Alternativna definicija je

$$\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r) = \{\mathsf{f} \in \mathrm{L}^p_{\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbf{C}^r) : (\forall \varphi \in \mathrm{C}^\infty_c(\Omega)) \quad \varphi\mathsf{f} \in \mathrm{W}^{1,p}(\Omega; \mathbf{C}^r)\}\,.$$

Za $a < b$, s $\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}([a, b\rangle; \mathbf{C}^r)$ označavamo sve restrikcije na $[a, b\rangle$ funkcija iz prostora $\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\langle-\infty, b\rangle; \mathbf{C}^r)$. Analogno, s $\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\langle a, b]; \mathbf{C}^r)$ označavamo sve restrikcije na $\langle a, b]$ funkcija iz prostora $\mathrm{W}^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\langle a, \infty\rangle; \mathbf{C}^r)$.

$\mathrm{C}^{0,1}(X, Y)$ – prostor svih Lipschitzovih funkcija s metričkog prostora $X$ u metrički prostor $Y$.

$\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^r)$ – Soboljevljev prostor, koji (za otvoren i omeđen skup $\Omega \subseteq \mathbf{R}^d$ s Lipschitzovim rubom) definiramo kao prostor svih funkcija $\mathsf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$ iz $\mathrm{L}^2(\partial\Omega; \mathbf{C}^r)$ za koje je

$$\|f_i\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} := \|f_i\|^2_{\mathrm{L}^2(\partial\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\partial\Omega} \frac{|f_i(\mathbf{x}) - f_i(\mathbf{y})|}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^r}\, dS(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{x})$$

konačno za svaki $i \in 1..k$. Norma je dana s

$$\|\mathsf{f}\|_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega;\mathbf{C}^r)} := \Big(\sum_{i=1}^r \|f_i\|^2_{\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathrm{H}^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^r)$ – dual prostora $\mathrm{H}^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega; \mathbf{C}^r)$.

**Kreinovi prostori**

**Definicija.** Neka je $W$ vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva, te neka preslikavanje $[\,\cdot \mid \cdot\,] : W \times W \longrightarrow \mathbf{C}$ zadovoljava

$$(\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C})(\forall x_1, x_2, y \in W) \quad [\,\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid y\,] = \lambda_1[\,x_1 \mid y\,] + \lambda_2[\,x_2 \mid y\,]\,,$$
$$(\forall x, y \in W) \quad [\,y \mid x\,] = \overline{[\,x \mid y\,]}\,.$$

Tada preslikavanje $[\,\cdot \mid \cdot\,]$ nazivamo *indefinitni skalarni produkt* na $W$, a par $(W, [\,\cdot \mid \cdot\,])$ *prostor indefinitnog skalarnog produkta*. ∎

**Definicija.** Za vektore $x, y \in W$ kažemo da su $[\cdot \mid \cdot]$-*ortogonalni* ukoliko je $[\, x \mid y \,] = 0$, i pišemo $x[\perp]y$. Za dva skupa $K, L \subseteq W$ kažemo da su međusobno $[\cdot \mid \cdot]$-*ortogonalni* ukoliko je

$$(\forall\, x \in K)(\forall\, y \in L) \quad [\, x \mid y \,] = 0\,,$$

i pišemo $K[\perp]L$.

$[\cdot \mid \cdot]$-*ortogonalni komplement* skupa $L \subseteq W$ definiramo s

$$L^{[\perp]} := \{y \in W : (\forall\, x \in L) \quad [\, x \mid y \,] = 0\}\,.$$

∎

Lako se vidi da je $L^{[\perp]}$ potprostor prostora $W$, te da $K \subseteq L$ povlači $L^{[\perp]} \leq K^{[\perp]}$.

**Definicija.** Za vektor $x \in L \leq W$ kažemo da je *izotropan* u $L$ ukoliko je $x \in L^{[\perp]}$. Skup svih izotropnih vektora u $L$ označavamo s

$$L^0 := L \cap L^{[\perp]}\,.$$

Ukoliko je $L^0 = \{0\}$ kažemo da je potprostor $L$ *nedegeneriran*, a u suprotnom da je *degeneriran*. ∎

Označimo kvocijentni prostor $\hat{W} := W/W^0$, i njegove elemente s $\hat{x} := x + W^0$. Lako se može provjeriti [AI, str. 7-8] da je s

$$[\, \hat{x} \mid \hat{y} \,]^{\hat{}} := [\, x \mid y \,]$$

dobro definiran indefinitni skalarni produkt na $\hat{W}$.

**Definicija.** Za vektor $x \in W$ kažemo da je *pozitivan* ukoliko je $[\, x \mid x \,] > 0$. Za podskup $L \subseteq W$ kažemo da je *pozitivan* ukoliko je svaki njegov element pozitivan.
Na isti način se mogu definirati *negativni* ($<$), *nenegativni* ($\geq$), *nepozitivni* ($\leq$), te *neutralni* ($=$) vektori i skupovi. ∎

**Definicija.** Za potprostor $L$ prostora $W$ kažemo da je *maksimalan pozitivan*, ukoliko je pozitivan i ukoliko ne postoji pozitivan potprostor M, sa svojstvom $L \subset M$.
Analogno se definiraju *maksimalni negativni*, *maksimalni nenegativni*, *maksimalni nepozitivni*, i *maksimalni neutralni* potprostori.
Za potprostor kažemo da je *maksimalan definitan* ukoliko je maksimalan pozitivan ili maksimalan negativan. Isto tako kažemo da je *maksimalan semidefinitan* ukoliko je maksimalan nepozitivan ili maksimalan nenegativan. ∎

**Lema 1.** *$[\cdot \mid \cdot]$-ortogonalni komplement maksimalnog nenegativnog (nepozitivnog) potprostora je nepozitivan (nenegativan).* ∎

**Lema 2.** *[AI, str. 7] Svaki maksimalan semidefinitan potprostor sadrži sve izotropne vektore u $W$.* ∎

Direktnu sumu $K \dot{+} L$ dvaju potprostora $K, L \leq W$, koji su međusobno $[\cdot \mid \cdot]$-ortogonalni označavamo s $K[\dot{+}]L$.

**Definicija.** Svaki par pozitivnog potprostora $W^+$ i negativnog potprostora $W^-$, takvih da je

$$W = W^+[\dot{+}]W^-$$

nazivamo *kanonska dekompozicja prostora* $W$. ∎

Ako je $W$ direktna suma pozitivnog i negativnog prostora onda je nužno i nedegeneriran [AI, str. 8].

**Definicija.** Prostor indefinitnog skalarnog produkta koji dopušta kanonsku dekompoziciju oblika $W = W^+[\dot{+}]W^-$, takvu da su prostori $(W^+, [\,\cdot \mid \cdot\,])$ i $(W^-, -[\,\cdot \mid \cdot\,])$ Hilbertovi, nazivamo *Kreinov prostor*. ∎

Neka je $(W, \langle\,\cdot \mid \cdot\,\rangle)$ Hilbertov prostor, i $G \in \mathcal{L}(W, W)$ hermitski ($G = G^*$) operator na $W$. Tada je s

$$[\,x \mid y\,] := \langle\, Gx \mid y\,\rangle\,, \qquad x, y \in W\,,$$

definiran indefinitni skalarni produkt na $W$. $G$ se naziva *Grammov operator* prostora $(W, [\,\cdot \mid \cdot\,])$.

**Teorem 1.** *[AI, str. 40] Neka je $G$ Grammov operator prostora $W$. Tada je prostor $\hat{W} := W/\operatorname{Ker} G$ Kreinov ako i samo ako je $\operatorname{Im} G$ zatvorena.* ∎

**Teorem 2.** *[Bo, str. 106] Ako je $L$ nenegativan (nepozitivan) potprostor Kreinovog prostora, takav da je $L^{[\perp]}$ nepozitivan (nenegativan), onda je $\operatorname{Cl} L$ maksimalan nenegativan (nepozitivan).* ∎

**Teorem 3.** *[Bo, str. 105] Svaki maksimalan semidefinitan potprostor Kreinovog prostora je zatvoren.* ∎

**Teorem 4.** *[Bo, str. 69, 101–102] Potprostor $L$ Kreinovog prostor je zatvoren ako i samo ako je $L = L^{[\perp][\perp]}$.* ∎

**Teorem 5.** *[AI, str. 44] Za potprostor $L \le W$ vrijedi*

$$L \cap L^{[\perp]} = \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \operatorname{Cl}(L + L^{[\perp]}) = W\,.$$

∎

# Literatura


[AB] N. Antonić, K. Burazin: On certain properties of spaces of locally Sobolev functions, Proceedings of the conference on applied mathematics and scientific computing (eds. Z. Drmač, M. Marušić, Z. Tutek), Springer, 2005.

[AF] R. Adams, J. Fournier: Sobolev Spaces, Pure and applied mathematics vol. 140, Academic press, 2003.

[AI] T. I. Azizov, I. S. Iokhvidov: Linear Operators in Spaces with an Indefinite Metric, John Wiley & Sons, 1989.

[AV] N. Antonić, M. Vrdoljak: Mjera i integral, Zagreb, 2001.

[Bo] J. Bognar: Indefinite Iner Product Spaces, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1974.

[BC] C. Baiocchi, A. Capelo: Variational and quasivariational inequalities, Applications to free boundary problems, John Wiley & Sons, 1984.

[Br] H. Brezis: Analyse fonctionnelle, Masson, Paris, 1983.

[BS] S. Benzoni-Gavage, D. Serre: Multidimensional hyperbolic partial differential equations, first-order systems and applications, Clarendon Press, Oxford, 2007.

[Bu1] K. Burazin: Primjena kompaktnosti kompenzacijom u teoriji hiperboličkih sustava, magistarski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2004.

[Bu2] K. Burazin: Estimates on the weak solution of semilinear hyperbolic systems, prihvaćen za objavljivanje

[CL] J.-Y. Chemin, N. Lerner: Flot de champs de vecteurs non Lipschitziens et équations de Navier–Stokes, Journal of Differential Equations, **121** (1995), 314–328

[DL] R. Dautray, J.-L. Lions: Mathematical analysis and numerical methods for science and technology, Springer, 1992.

[DS] N. Dunford, J. T. Schwartz: Linear operators I, Wiley, 1988.

[E] L. C. Evans: Partial differential equations, American Mathematical Society, 1998.

[EE] D.E. Edmunds, W. D. Evans: Spectral theory and differential operators, Clarendon Press, Oxford, 1987.

[EG] L. Evans, R. Gariepy: Measure theory and fine properties of functions, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[EG1] A. Ern, J.-L. Guermond: Theory and practise of finite elements, Applied mathematical science vol. 159, Springer, 2004.

[EG2] A. Ern, J.-L. Guermond: Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs' systems I. General theory, SIAM J. Numer. Anal. **44** (2), 753–778

[EGC] A. Ern, J.-L. Guermond, G. Caplain: An Intrinsic Criterion for the Bijectivity Of Hilbert Operators Related to Friedrichs' Systems, Comunications in Partial Differential Equations, **32** (2007), 317–341

[Fe] H. Federer: Geometric Measure Theory, Die Grundlehren der mathematishen Wissenschaften, vol. 153, Springer–Verlag, Berlin, 1969.

[Fo] G. B. Folland: Real Analysis, Willey, New York, 1984.

[Fr] K. O. Friedrichs: Symetric positive linear differential equatons, Communications on Pure and Applied Mathematics **11** (1958), 333–418

[Fr1] K. O. Friedrichs: The indentity of weak and strong extensions of differential operators, Transactions of the American Mathematical Society **55** (1944), 132–151

[Fr2] K. O. Friedrichs: Symmetric hyperbolic linear differential equations, Communications on Pure and Applied Mathematics **7** (1954) 345–392

[Hö] L. Hörmander: Lectures on Nonlinear hyperbolic differential equations, Springer, 1997.

[HJS] P. Houston, M. Jensen, E. Süli: hp-discontinuous Galerkin finite element methods with least-squares stabilization, Journal of Scientific Computing, vol. 17 (2002), nos. 1–4

[HMSW] P. Houston, J. A. Mackenzie, E. Süli, G. Warnecke: A posteriori error analysis for numerical approximations of Friedrichs systems, Numerische Mathematik **82** (1999), 433–470

[J] M. Jensen: Discontinuous Galerkin Methods for Friedrichs Systems with Irregular Solutions, Ph. D. thesis, University of Oxford, 2004.

[J1] M. Jensen: Remarks on duality in graph spaces of first-order linear operators, Proc. Appl. Math. Mech. **6** (2006), 31–34

[Jo] F. John: Partial differential equations, Springer-Verlag, 1982.

[Ka] T. Kato: Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[Kö] G. Köthe: Topological vector spaces I, Springer, 1983.

[Ku] S. Kurepa: Funkcionalna analiza, Školska knjiga, Zagreb, 1981.

[LL] E. H. Lieb, M. Loss: Analysis, American Mathematical Society, 1997.

[LM] J. L. Lions, E. Magenes: Non–Homogeneous Boundary Value Problems and Applications I, Springer–Verlag, Berlin, 1972.

[LP] P. D. Lax, R. S. Phillips: Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Communications on Pure and Applied Mathematics **13** (1960), 427–455,

[MN1] Masayasu Mimura, Takaaki Nishida: On the Broadwell's model for a simple discrete velocity gas, Proc. Japan Acad. **50** (1974), 812–817

[MN2] Masayasu Mimura, Takaaki Nishida: Global solutions to the Broadwell's model of Boltzmann equation for a simple discrete velocity gas, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics (Kyoto Univ., Kyoto, 1975), pp. 408–412, Lecture Notes in Phys. 39, Springer, Berlin, 1975.

[M1] C. S. Morawetz: Note on a maximum principle and a uniquess theorem for an elliptic-hyperbolic equation, Proceedings of the Royal Society of London **236** (1956), 141-144

[M2] C. S. Morawetz: A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type, Communications on Pure and Applied Mathematics **11** (1958) 315-331

[M3] C. S. Morawetz: The Dirichlet problem for the Tricomi equation, Communications on Pure and Applied Mathematics **23** (1970) 587-601

[M4] C. S. Morawetz: A Uniqueness Theorem for Frankl's problem, Communications on Pure and Applied Mathematics **7** (1954) 697–703

[M5] C. S. Morawetz: A Weak Solution for a System of Equations of Elliptic-Hyperbolic Type, Communications on Pure and Applied Mathematics **11** (1954) 315–331

[Mo] R. Moyer: On the indentity of weak and strong extensions of differential operators, Proceedings of the American Mathematical Society **19** (1968), 487–488

[N] J. Nečas: Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Masson, Paris, 1967.

[NB] L. Narici, E. Beckenstein: Topological vector spaces, Dekker, 1985.

[P] R. S. Phillips: Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Transactions of the American Mathematical Society **90** (1959) 193–254

[PS] R. S. Phillips, L. Sarason: Singular symmetric positive first order differential operators, Journal of Mathematics and Mechanics **15** (1966) 235–271

[Ra] J. Rauch: Partial differential equations, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Ra1] J. Rauch: Symmetric positive systems with boundaray characteristic of constant multiplicity, Transactions of the American Mathematical Society **291** (1), (1985), 167–187

[Ra2] J. Rauch: Boundary value problems with nonuniformly characteristic boundary, Journal de mathèmatiques pures et appliques **73** (4) (1994), 347–353

[RR] M. Renardy, R. Rogers: An introduction to partial differential equations, Springer, 1993.

[Ru] W. Rudin: Functional analysis, Mc Graw Hill, 1973.

[S1] P. Secchi: Linear symetric hyperbolic systems with characteristic boundary, Mathematical Methods in Applied Sciences vol. 18 (1995), 855–870

[S2] P. Secchi: The initial boundary value problem for linear symetric hyperbolic systems with characteristic boundary of constant multiplicity, Differential and Integral Equations , vol. 9 (4), (1996), 671–700

[S3] P. Secchi: A symmetric positive system with nonuniformly characteristic boundary, Differential and Integral Equations , vol. 11 (4), (1998), 605–621

[S4] P. Secchi: Full regularity of solutions to a nonuniformly characteristic boundary value problem for symmetric positive systems, Advances in Mathematical Sciences and Applications , vol. 10 (1), (2000), 39–55

[S] H. H. Shaefer: Topological vector spaces, Springer, 1980.

[Ta1] Luc Tartar: Partial Differential Equations, neobjavljena skripta

[Ta2] Luc Tartar: Oscillations and asymptotic behaviour for two semilinear hyperbolic systems, Dynamics of infinite-dimensional systems (Lisbon, 1986), pp. 341–356, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. F Comput. Systems Sci. 37, Springer, Berlin, 1987.

[Ta3] L. Tartar: On the characterization of traces of a Sobolev space used for Maxwell's equation, Proceedings of the 1997 meeting held in Bordeaux in honour of Michel Artola

[Ta4] L. Tartar: An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces, Springer-Verlag, Berlin Hiedelberg, 2007.

[Ta5] L. Tartar: From Hyperbolic Systems to Kinetic Theory, A Personalized Quest, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008.

[Tr] F. Trèves: Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, 1967.

[Tr1] H. Triebel: Theory of function spaces, Birkäuser Verlag, Basel Boston Stuttgart, 1983.

[Tr2] H. Triebel: Theory of function spaces II, Birkäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 1992.

[Wl] J. Wloka: Partial differential equations, Cambridge University Press, 1987.

[Y] K. Yosida: Functional analysis, Springer, 1980.

# Sažetak


U radu se bavimo različitim pitanjima vezanim uz Friedrichsove sustave (prva dva poglavlja) i polulinearne hiperboličke sustave prvog reda (treće poglavlje).

U prvom poglavlju su dana osnovna svojstva prostora grafa linearnih diferencijalnih operatora prvog reda, te je posebna pažnja posvećena definiciji i svojstvima operatora traga, koji ima veliku važnost u zadavanju rubnih uvjeta. U ovome dijelu slijedimo [J], s tim da su mnogi dokazi pojednostavljeni i skraćeni.

U drugome poglavlju proučavamo Friedrichsove sustave, klasu rubnih zadaća koja omogućava pručavanje velikog broja diferencijalnih jednadžbi na jedinstven način. Uveo ih je K. O. Friedrichs 1958. godine, s namjerom proučavanja jednadžbi mješovitog tipa (poput Tricomijeve jednadžbe). U radu [EGC] je dan nešto drugačiji pogled na teoriju Friedrichsovih sustava. Osim što je iskazana u apstraktnim terminima Hilbertovih prostora i operatora na njima, također je predstavljen drugačiji način postavljanja rubnog uvjeta. Dopustivi rubni uvjeti se zadaju pomoću dva jednostavna geometrijska uvjeta, te se time izbjegavaju pitanja vezana uz tragove funkcija iz prostora grafa. Autori pokazuju da ti uvjeti povlače maksimalnost rubnog uvjeta, a istražuju i zadavanje rubnog uvjeta pomoću rubnog operatora, pokazujući da je taj zapis ekvivalentan geometrijskim uvjetima ukoliko postoje dva specifična operatora $P$ i $Q$.

Uočili smo da se ti geometrijski uvjeti mogu prirodno zapisati u terminima indefinitnog skalarnog produkta na prostoru grafa, te upotrebom klasičnih rezultata za Kreinove prostore konstruirali kontraprimjer kojim je pokazano da gore spomenuti operatori $P$ i $Q$ ne moraju uvijek postojati. Također su diskutirani slučajevi kada operatori $P$ i $Q$ postoje – slučaj jedne prostorne dimenzije. Upotrebom Kreinovih prostora je pokazano da maksimalnost rubnog uvjeta povlači geometrijske uvjete, te je dokaz obrnute tvrdnje bitno pojednostavljen.

Također je razmatrana veza klasične reprezentacije dopustivih rubnih uvjeta (zadanih pomoću matričnog polja na rubu), te one preko rubnog operatora: dani su nužni uvjeti na matrično polje koji omogučuju definiciju rubnog operatora s zadovoljavajučim svojstvima, te su testirani na primjerima.

U trećem poglavlju se bavimo polulinearnim nesparenim hiperboličkim sustavima prvog reda. Rezultat lokalne egzistencije i jedinstvenosti dan je u [Ta1], zajedno s specifičnim ocjenama na rješenje. Ovdje je taj rezultat dokazan uz nešto izmjenjene pretpostavke, koje ne mijenjaju bitno dokaz, ali omogućuju nešto bolje ocjene na rješenje. Ocjene na rješenje i njegovo vrijeme egzistencije su glavno razmatrano pitanje ovog poglavlja. Pokazano je kako postići najbolju ocjenu na rješenje i vrijeme egzistencije rješenja (najbolju između svih mogućih ocjena određenog tipa – onog danog teoremom egzistencije i jedinstvenosti). Kratko je diskutirana i $\mathrm{L}^p$ verzija (za $p \in \langle 1, \infty \rangle$) teorema egzistencije i jedinstvenosti.

# Summary


We study various topics concerning Friedrichs systems (first two chapters) and first-order semilinear hyperbolic systems (third chapter).

In the first part the basic properties of graph spaces of first-order differential operators are given, with special emphasis on investigation of properties of the trace operator, which plays major role when imposing boundary conditions. Here we follow [J], with proves being simplified and shortened.

In the second part we study the Friedrichs systems, a class of boundary value problems that admit the study of a wide range of differential equations in an unified framework. They were introduced by K. O. Friedrichs in 1958. as an attempt to treat equations of mixed type (such as Tricomi equation). In paper [EGC] a new view on the theory of Friedrichs systems has been given, as the theory is written in terms of Hilbert spaces, and a new way of representation of boundary conditions was introduced. Here, the admissible boundary conditions are characterize by two intrinsic geometric conditions in graph space, which avoids invoking traces at the boundary. Authors show that these conditions imply maximality of boundary conditions. They also introduce another representation of boundary conditions via boundary operator, and show that this representation is equivalent with intrinsic one (those enforced by two geometric conditions) if two specific operators $P$ and $Q$ exist. We have noted that these two geometric conditions can be naturally written in terminology of indefinite inner product on graph space, and use of classical results in Krein spaces allowed us to construct the counter–example, which shows that operators $P$ and $Q$ do not always exist. We also investigate situations when existence of $P$ and $Q$ is guarantied – the case of one space dimension. By use of Kreine space we show that maximality of boundary condition implies intrinsic (geometric) conditions, and give more elegant proof for the converse statement.

The relation between *classical* representation of admissible boundary conditions (via matrix fields on boundary), and those given by boundary operator is addressed as well: necessary conditions on boundary matrix in order to define boundary operator with satisfactory properties are given, followed with some examples.

The third part is concerned with first-order decoupled semilinear hyperbolic systems. The local existence and uniqueness result can be found in [Ta1], and it is paired with an estimate on the solution of a certain type. We prove it under slightly generalized assumptions that do not change the proof, but allow a more precise estimate on the solution. The estimates on the solution and the time of its existence is the main topic of this chapter. It is shown how to achieve the best possible estimate on the solution and its time of existence (the best among all estimates of a certain type—the type provided by the existence and uniqueness theorem). Also the $\mathrm{L}^p$ version (for $p \in \langle 1, \infty \rangle$) of the existence and uniqueness theorem is briefly discussed.

# Životopis

Rođen sam 22. veljače 1977. godine u Osijeku. Osnovnu školu sam završio u Komletincima, te matematičku gimnaziju u Vinkovcima. Od sedmog razreda osnovne škole i tijekom cijelog gimnazijskog obrazovanja sudjelovao sam na državnim natjecanjima iz matematike i više puta bio nagrađivan.

U jesen 1995. godine sam se upisao na Matematički odjel Priridoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu, gdje sam i diplomirao u prosincu 1999. godine (inženjerski smjer primjenjene matematike) kod mentora prof. N. Antonića. Naziv diplomskog rada je *Varijacijska teorija faznih prijelaza*.

U prosincu 1999. sam upisao poslijediplomski znanstveni studij matematike na Sveučilištu u Zagrebu, te u ožujku 2004. godine obranio magistarski rad na temu *Primjena kompaktnosti kompenzacijom u teoriji hiperboličkih sustava* (mentor prof. N. Antonić).

Od ožujka 2000. do srpnja 2003. godine sam radio kao znanstveni novak na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, a od kolovoza 2003. godine radim kao znanstveni novak na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Osijeku.

Sudjelovao sam kao suradnik u radu znanstveno-istraživačkih projekata financiranih od strane Ministarstva znanosti: *Oscilatorna rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi*, te *Titrajuća rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi* (glavni istraživač prof. N. Antonić).

Bio sam sudionik petnaestak međunarodnih znanstvenih skupova i matematičkih škola, na kojima sam više puta održao i izlaganja. Aktivno sudjelujem u radu *Seminara za diferenijalne jednadžbe i numeričku analizu*. Bio sam voditelj studentske ekipe Sveučilišta u Osijeku koja je sudjelovala na međunarodnim studentskim natjecanjima iz matematike. Član sam Udruge matematičara Osijek, te tajnik Matematičkog kolokvija Odjela za matematiku, Sveučilišta u Osijeku.

Trenutno živim u Osijeku, oženjen sam i imam jedno dijete.