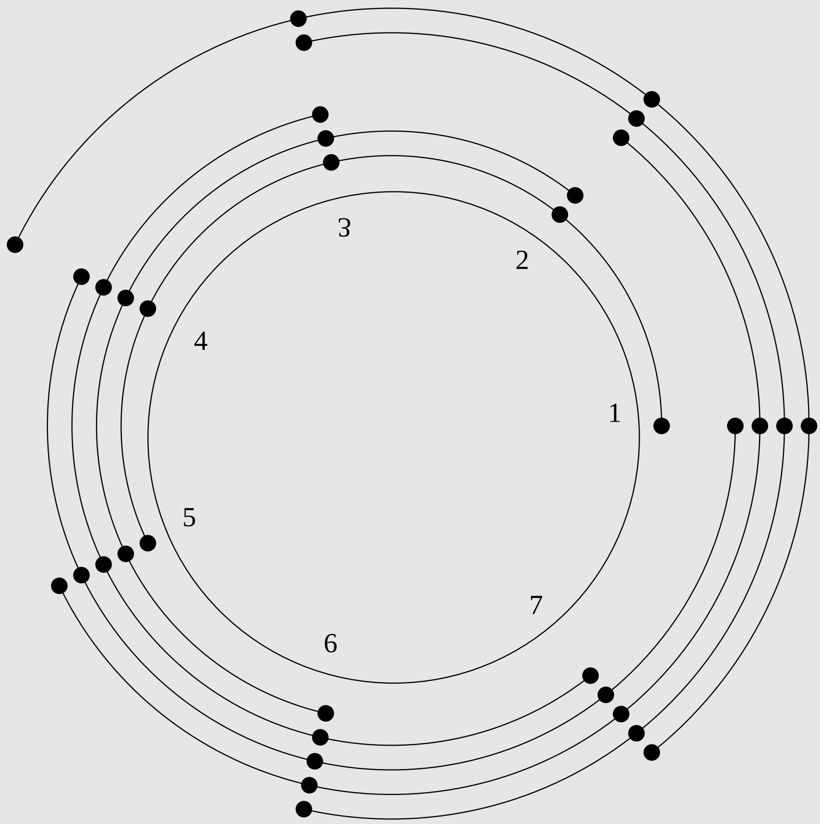
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Linearno programiranje

UDŽBENIK



Ivana Kuzmanović Kristian Sabo

Doc. dr. sc. Ivana Kuzmanović, Izv. prof. dr. sc. Kristian Sabo

LINEARNO PROGRAMIRANJE

Odjel za matematiku
Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Trg Ljudevita Gaja 6
HR-31 000 Osijek

Izdavač:

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku

Recenzenti:

prof. dr. sc. Rudolf Scitovski
Odjel za matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku

izv. prof. dr. sc. Kristina Šorić
Zagrebačka škola ekonomije i menagementa

Lektor:

Davor Tanocki, III. gimnazija, Osijek

CIP zapis dostupan je u računalnom katalogu Gradske
i sveučilišne knjižnice Osijek pod brojem 140521018

ISBN 978-953-6931-88-0

Ovaj udžbenik objavljuje se uz suglasnost Senata Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku pod brojem 1/16.

Ovaj udžbenik objavljuje se uz financijsku pomoć Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta.

Tisak: Studio HS internet d.o.o., Osijek

Predgovor

U različitim primijenjenim istraživanjima pojavljuju se problemi u kojima je potrebno minimizirati ili maksimizirati zadanu funkciju, u ovisnosti o jednoj ili više varijabli. Grana matematike koje izučava ovakve probleme naziva se optimizacija. Optimizacijski problemi ugrubo se mogu podijeliti u dvije bitno različite skupine: probleme bezuvjetne optimizacije te probleme uvjetne optimizacije. Ovdje se promatra jedan specijalni problem uvjetne optimizacije koji je u literaturi poznat kao problem linearnog programiranja. Problem linearnog programiranja ima posebnu strukturu jer je funkcija cilja linearna te samim tim i konveksna. Osim toga, funkcije uvjeta su također linearne te određuju konveksno područje, pa zbog toga problem linearnog programiranja pripada problemima konveksne optimizacije. Navedena svojstva problem linearnog programiranja čine značajno jednostavnijim u odnosu na opći problem uvjetne optimizacije.

Ovaj udžbenik rezultat je priprema za predavanja i vježbe iz predmeta Linearno programiranje, koje su se izvodile proteklih nekoliko godina na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Prilikom pripreme udžbenika namjera je bila na što jednostavniji način obuhvatiti osnovne sadržaje ovog širokog i dobro istraženog područja za koje postoji mnoštvo kvalitetne literature. Pritom se nastojalo što je više moguće sačuvati matematičku preciznost i korektnost.

Udžbenik se sastoji od šest poglavlja. U prvom poglavlju definiran je opći problem uvjetne optimizacije. U drugom poglavlju definiran je problem linearnog programiranja. Treće poglavlje posvećeno je osnovnim pojmovima i tvrdnjama geometrije linearnog programiranja, koje su nužne za konstrukciju numeričkog algoritma za rješavanje problema linearnog programiranja, poznatog kao simpleks–metoda. Algoritam na kojem je zasnovana simpleks–metoda naveden je u četvrtom poglavlju, gdje se ujedno dokazuju odgovarajući teorijski rezultati. U petom poglavlju analizirana je teorija dualnosti, s posebnim naglaskom na probleme linearnog programiranja. U kratkom šestom poglavlju opisani su najvažniji trenuci u povijesnom razvoju linearnog programiranja. U okviru svakog poglavlja naveden je velik broj riješenih ilustrativnih primjera, dok je na kraju svakog poglavlja priložen popis odgovarajućih zadataka pogodnih za vježbu.

Koristimo se prilikom da zahvalimo recenzentima prof. dr. sc. Rudolfu Scitovskom te izv. prof. dr. sc. Kristini Šorić koji su pažljivo pročitali udžbenik te dali značajan broj korisnih primjedbi i prijedloga za njegovo poboljšanje. Također, zahvaljujemo dr.sc. Mariji Miloloža Pandur, koja na nas je upozorila na neke pogreške u tekstu, kao i dr.sc. Domagoju Ševerdiji za izradu naslovnice udžbenika.

Na kraju treba spomenuti da je ovaj materijal tek prvi od dva planirana dijela. Namjera nam je pripremiti njegov prirodni nastavak, a koji bi se odnosio na druge poznate metode za rješavanje problema linearnog programiranja: elipsoidalnu metodu te metodu unutarnje točke, zajedno s odgovarajućom analizom složenosti, dekompozicijske metode kod problema velikih dimenzija te generalizacije problema linearnog programiranja na cjelobrojno i kvadratično programiranje.

Osijek, 2016.

Ivana Kuzmanović i Kristian Sabo

Sadržaj

POGLAVLJE 1

Problem uvjetne optimizacije

Mnogi problemi koji potječu iz različitih područja primjena mogu se formulirati na sljedeći način:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) &\to \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \\
\text{uz uvjete} & \\
g_i(\mathbf{x}) &\geq 0, \quad i = 1,\ldots,m, \\
h_j(\mathbf{x}) &= 0, \quad j = 1,\ldots,p,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

pri čemu su $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,m$, $h_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,p$ zadane funkcije. Problem (1.1) zovemo **problem uvjetne optimizacije** ili ponekad **problem matematičkog programiranja**. Funkciju f zovemo **funkcija cilja**, dok g_i, $i = 1,\ldots,m$ i h_j, $j = 1,\ldots,p$ zovemo **funkcije uvjeta**. Skup $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \geq 0,\ i = 1,\ldots,m,\quad h_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = 1,\ldots,p\}$ zovemo **dopustivo područje**, dok za element skupa $\mathcal{D}$ kažemo da je **dopustivo rješenje**. Dopustivo rješenje $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ za kojeg vrijedi $f(\mathbf{x}^\star) \leq f(\mathbf{x})$ za svaki $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ zovemo **optimalno dopustivo rješenje** ili **točka globalnog minimuma** funkcije f na skupu $\mathcal{D}$.

Ako je $n = 2$ ili $n = 3$, problemi uvjetne optimizacije ponekad se mogu rješavati geometrijski, što ilustriramo sljedećim jednostavnim primjerom.

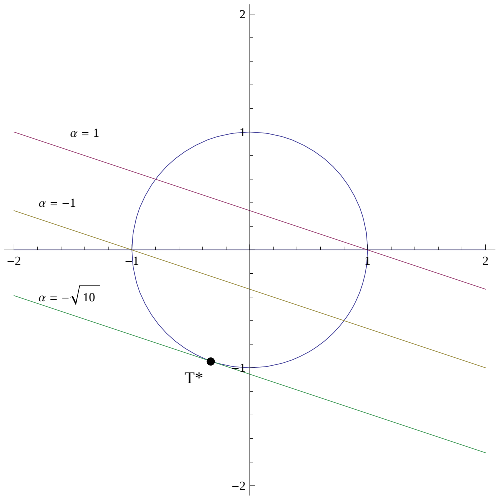
Primjer 1.1. *Riješimo problem uvjetne optimizacije*

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2) = x_1 + 3x_2 &\to \min_{x_1,x_2} \\
\textit{uz uvjet} & \\
x_1^2 + x_2^2 &= 1.
\end{aligned}
$$

Rješenje. Geometrijski gledano, treba odrediti točku $(x_1^\star, x_2^\star)$ na kružnici s jednadžbom $x_1^2 + x_2^2 = 1$, za koju vrijedi

$$\alpha^\star := x_1^\star + 3x_2^\star = \min_{x_1^2+x_2^2=1} (x_1 + 3x_2).$$

U tu svrhu u koordinatnom sustavu promatramo sve pravce p_α oblika $x_1 + 3x_2 = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Uočimo da su pravci p_α međusobno paralelni te da im je $[1,3]^T$ vektor normale. Među svim takvim pravcima treba odabrati onaj za koji je α najmanji mogući, a da pri tome pravac p_α siječe kružnicu. Nije teško vidjeti da je to točka $T^\star = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)$, dok je $\alpha^\star = -\sqrt{10}$ (vidi Sliku 1.1).



Slika 1.1: Geometrijsko rješenje problema iz Primjera 1.1

Ovaj optimizacijski problem možemo rješavati i algebarski. U tu svrhu uvodimo odgovarajuću Lagrangeovu funkciju (vidi [1] te Poglavlje 5)

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) = x_1 + 3x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Pri tome vrijedi

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 - 1, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 1 + 2x_1\lambda, \quad \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 3 + 2x_2\lambda,$$

odakle izjednačavanjem s nulom svih parcijalnih derivacija dobivamo stacionarne točke funkcije $\mathcal{L}$:

$$(x_1^\star, x_2^\star, \lambda^\star) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) \ \text{ i } \ (x_1^\star, x_2^\star, \lambda^\star) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, -\sqrt{\frac{5}{2}}\right).$$

Još je potrebno utvrditi jesu li te stacionarne točke ujedno točke lokalnih ekstrema. To se može provjeriti na osnovi sljedećih tvrdnji (vidi [1]):

- stacionarna točka $(x_1^\star, x_2^\star)$ je točka lokalnog minimuma dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije f, ako je $\det \mathbf{H}(x_1^\star, x_2^\star, \lambda^\star) < 0$,
- stacionarna točka $(x_1^\star, x_2^\star)$ je točka lokalnog maksimuma dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije f, ako je $\det \mathbf{H}(x_1^\star, x_2^\star, \lambda^\star) > 0$,

gdje je $\mathbf{H}(x_1, x_2, \lambda)$ prošireni Hessijan, a izgleda ovako:

$$\mathbf{H}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x_1 & 2x_2 \\ 2x_1 & 2\lambda & 2\lambda \\ 2x_2 & 2\lambda & 2\lambda \end{bmatrix}.$$

Nije teško vidjeti da je $\det \mathbf{H}(x_1, x_2, \lambda) = -8\lambda x_1^2 + 16\lambda x_1 x_2 - 8\lambda x_2^2$, odakle slijedi
$\det \mathbf{H}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right) = -\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, odnosno da je $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}\right)$ točka lokalnog minimuma. S obzirom na to da je jedina točka lokalnog minimuma (u drugoj stacionarnoj točki je $\det H > 0$), a funkcija f ima točku globalnog minimuma na zadanoj domeni, jer je riječ o neprekidnoj funkciji definiranoj na kompaktnom skupu, odakle slijedi da je točka lokalnog minimuma ujedno i točka globalnog minimuma.

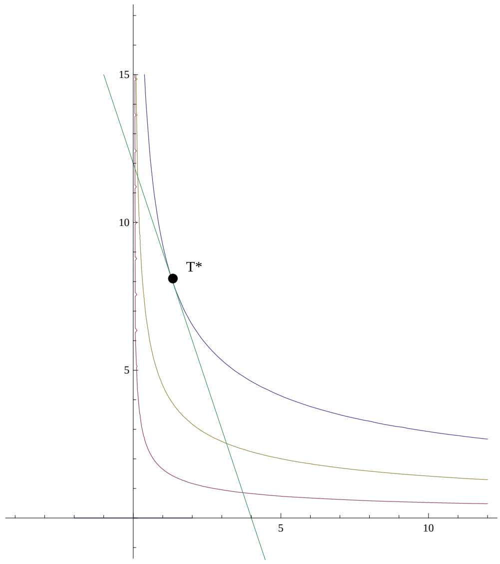
U nastavku navodimo još jedan jednostavan primjer u kojemu je, za razliku od prethodnog primjera, funkcija cilja nelinearna.

Primjer 1.2. *Riješimo sljedeći problem uvjetne optimizacije*

$$\begin{aligned} \ln x_1 + 2\ln x_2 &\to \max_{x_1, x_2} \\ &\textit{uz uvjet} \\ 3x_1 + x_2 &= 12. \end{aligned}$$

Rješenje. Uočimo da se u ovom primjeru radi o problemu maksimizacije koji se može svesti na sljedeći problem minimizacije: $-\ln x_1 - 2\ln x_2 \to \min_{x_1, x_2}$ uz iste uvjete. Sličnom analizom kao u prethodnom primjeru dobivamo $T^\star = \left(\frac{4}{3}, 8\right)$ (Slika 1.2).

Rješavanje općeg problema uvjetne optimizacije (1.1) zahtijeva posebnu analizu Lagrangeove funkcije, a bez posebnih uvjeta na funkcije f, g_i, h_j uvjetna optimizacija predstavlja izrazito zahtjevan i težak posao (vidjeti [1, 12]). U okviru



Slika 1.2: Geometrijsko rješenje problema iz Primjera 1.2

ovog udžbenika analizirat ćemo specijalni najjednostavniji problem uvjetne optimizacije kod kojeg su funkcija cilja te funkcije uvjeta linearne, a u literaturi je poznat pod nazivom **problem linearnog programiranja**. Dat ćemo pregled teorijskih rezultata te detaljno analizirati jedan od najpoznatijih numeričkih algoritama za njegovo rješavanje poznat pod nazivom **simpleks–metoda** (vidjeti [2, 12, 16]).

Na kraju spomenimo da se, osim problema uvjetne optimizacije, u primjenama često pojavljuje i **problem bezuvjetne optimizacije**. Problem bezuvjetne optimizacije može se formulirati na sljedeći način:

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n},$$

pri čemu je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana funkcija. Metode za rješavanje problema bezuvjetne optimizacije bitno su drukčije od onih koje se koriste za rješavanje problema uvjetne optimizacije te slično kao i kod problema uvjetne optimizacije, izbor metode ovisi o uvjetima koje zadovoljava funkcija cilja f. Više o metodama za rješavanje problema bezuvjetne optimizacije može se pronaći u [1, 12, 10, 13, 20, 21].

1.1 Zadaci

Zadatak 1.1. *Riješite sljedeći problem uvjetne optimizacije*

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + x_2^2 &\to \max_{x_1,x_2} \\ \textit{uz uvjet} & \\ x_1 + x_2 &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje. $x_1^* = 1/3$, $x_2^* = 2/3$.

Zadatak 1.2. *Riješite sljedeći problem uvjetne optimizacije*

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2 - \ln x_1 &\to \min_{x_1,x_2} \\ \textit{uz uvjet} & \\ 8x_1 + 3x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje. $x_1^* = -1/2$, $x_2^* = 4/3$.

Zadatak 1.3. *Riješite sljedeći problem uvjetne optimizacije*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\to \max_{x_1,x_2} \\ \textit{uz uvjet} & \\ x_1 x_2 + x_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Rješenje. $x_1^* = 0$, $x_2^* = -1$.

Zadatak 1.4. *Odredite ekstreme funkcije* $f(x, y) = xy$ *uz uvjet* $x^2 + y^2 = 8$.

Rješenje. Maksimim funkcije f je 4 i postiže se u točkama $(2, 2)$ i $(-2, -2)$, dok je minimim -4 i postiže se u točkama $(2, -2)$ i $(-2, 2)$.

Zadatak 1.5. *Riješite sljedeći problem uvjetne optimizacije*

$$\begin{aligned} 6x_2x_3 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 &\to \max_{x_1,x_2,x_3} \\ \textit{uz uvjet} & \\ x_1x_2x_3 &= 96. \end{aligned}$$

Rješenje. $x_1^* = 6$, $x_2^* = x_3^* = 4$.

Zadatak 1.6. *Riješite sljedeći problem uvjetne optimizacije*

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &\rightarrow \min_{x_1, x_2, x_3} \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje. $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 1/3$. (Uputa: Rješava li se problem geometrijski, smisleno je iz jednog od uvjeta izraziti jednu od nepoznanica, te na taj način svesti problem na optimizacijski problem s dvije varijable s jednim uvjetom.)

Zadatak 1.7. *Riješite sljedeći problem uvjetne optimizacije*

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &\rightarrow \min_{x_1, x_2, x_3} \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 4. \end{aligned}$$

Rješenje. $x_1^* = 16/15$, $x_2^* = 1/3$, $x_3^* = -11/15$. (Uputa: Rješava li se problem geometrijski, smisleno je iz jednog od uvjeta izraziti jednu od nepoznanica, te na taj način svesti problem na optimizacijski problem s dvije varijable s jednim uvjetom.)

POGLAVLJE 2

Problem linearnog programiranja

U ovom poglavlju definirat ćemo problem linearnog programiranja kao specijalni slučaj problema uvjetne optimizacije. Navest ćemo različite zapise problema linearnog programiranja te pokazati da se svaki od njih može svesti na tzv. standardni problem lineanog programiranja. Također, analizirat ćemo nekoliko problema iz primjena koji se mogu promatrati i rješavati kao problemi linearnog programiranja.

Prije no što prijeđemo na definiranje problema, uvest ćemo jedan dogovor oko notacije. Kako je $\mathbb{R}^n$ snabdjeven strukturom realnog vektorskog prostora, elemente skupa $\mathbb{R}^n$ ponekad ćemo zvati točkama, a ponekad vektorima u ovisnosti o kontekstu. Pri tome ćemo vektore označavati masnim slovima, a njihove komponente zapisivat ćemo u uglatim zagradama, dok ćemo komponente točaka zapisivati u okruglim zagradama.

2.1 Standardni oblik problema linearnog programiranja

Neka su $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, gdje su M_i, $i = 1, 2, 3$ skupovi indeksa takvi da je $M_i \cap M_j = \emptyset$, $i \neq j$ te $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearna funkcija cilja zadana formulom $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Promatrajmo sljedeći problem uvjetne optimizacije:

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\
\text{uz uvjete}& \\
\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &\geq b_i,\ i \in M_1 \\
\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &\leq b_i,\ i \in M_2 \\
\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &= b_i,\ i \in M_3.
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Problem (2.1) zovemo **problem linearnog programiranja**. Primijetimo da je dopustivo područje određeno s linearnim funkcijama uvjeta.

Primjer 2.1. *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 2x_2 + x_3 &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\
\textit{uz uvjete}& \\
x_1 + 2x_2 + x_4 &\leq 3 \\
2x_2 - x_3 &= 4 \\
x_3 - 3x_4 &\geq 0 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Odgovarajući skupovi indeksa su $M = \{1,2,3,4,5\}$, $M_1 = \{3,4,5\}$, $M_2 = \{1\}$, *i* $M_3 = \{2\}$ *a odgovarajući vektori su* $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$, $\mathbf{c} = [3, -2, 1, 0]^T$, $\mathbf{a}_1 = [1, 2, 0, 1]^T$, $\mathbf{a}_2 = [0, 2, -1, 0]^T$, $\mathbf{a}_3 = [0, 0, 1, -3]^T$, $\mathbf{a}_4 = [1, 0, 0, 0]^T$, $\mathbf{a}_5 = [0, 0, 1, 0]^T$ *te* $\mathbf{b} = [3, 4, 0, 0, 0]^T$.

Primjedba 2.1. Uočimo sljedeće:

a) Maksimizacijski problem
$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \rightarrow \max_{\mathbf{x}}$$
može se svesti na minimizacijski problem
$$-\mathbf{c}^T\mathbf{x} \rightarrow \min_{\mathbf{x}}.$$

b) Uvjet $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$ ekvivalentan je uvjetima
$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i \quad \& \quad \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i.$$

c) Uvjet $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i$ ekvivalentan je uvjetu $-\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq -b_i$.

Sukladno Primjedbi 2.1 svaki problem linearnog programiranja može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet}& \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b}, \end{aligned}$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Pritom uvjet $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ znači da je svaka komponenta vektora $\mathbf{A}\mathbf{x}$ veća ili jednaka odgovarajućoj komponenti vektora $\mathbf{b}$.

Primjer 2.2. *Problem linearnog programiranja iz Primjera 2.1 može se zapisati na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 + x_3 &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \textit{uz uvjete}& \\ -x_1 - 2x_2 - x_4 &\geq -3 \\ 2x_2 - x_3 &\geq 4 \\ -2x_2 + x_3 &\geq -4 \\ x_3 - 3x_4 &\geq 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \textit{uz uvjet}& \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b}, \end{aligned}$$

gdje su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

U sljedećem primjeru ilustriramo jednu mogućnost rješavanja specijalnog problema linearnog programiranja kod kojega je dopustivo područje podskup skupa $\mathbb{R}^2$.

Primjer 2.3. *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} 6x_1 + 7x_2 &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ &\textit{uz uvjete} \\ -\frac{9}{2}x_1 + x_2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 &\leq 16 \\ -\frac{1}{2}x_1 + x_2 &\geq 0 \\ \frac{3}{2}x_1 + x_2 &\geq 12 \end{aligned}$$

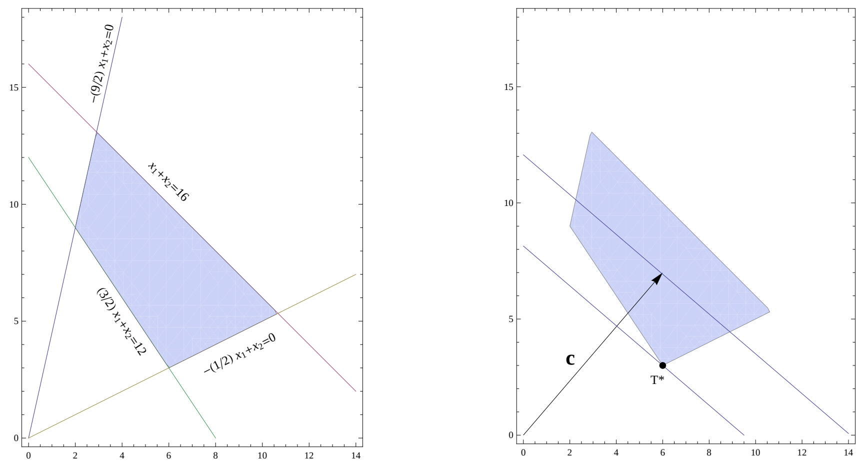
Na Slici 2.1 prikazano je odgovarajuće dopustivo područje. Promatrajmo sve pravce p_α *oblika* $6x_1 + 7x_2 = \alpha$, *gdje je* α *neki realan broj. Primijetimo da je vektor* $\mathbf{c} = [6, 7]^T$ *vektor normale pravca* p_α*. Jednadžba pravca* p_α *u eksplicitnom obliku glasi* $x_2 = -\frac{6}{7}x_1 + \frac{\alpha}{7}$, *pri tome je* $\frac{\alpha}{7}$ *odsječak što ga pravac* p_α *odsijeca na* x_2 *osi. Uočimo da minimizirati funkciju cilja na dopustivom području znači odrediti* α^* *tako da pravac* p_{α^*} *prolazi kroz dopustivo područje te da je pri tome* α^* *najmanji mogući. Broj* α^* *s tim svojstvom odredit ćemo tako da najprije odaberemo početni* α_0 *tako da pravac* p_{α_0} *prolazi dopustivim područjem. Pri tome* p_{α_0} *translatiramo u smjeru vektora* $-\mathbf{c}$ *tako da ostanemo u dopustivom području, sve dok odsječak što ga translatirani pravac* p_α *odsijeca na* x_2 *osi ne postane najmanji mogući (Slika 2.1 - desno). Točka koju smo dobili u tom graničnom slučaju ima koordinate* $T^\star = (6, 3)$ *te je* $\mathbf{x}^* = [6, 3]^T$ *optimalno dopustivo rješenje, dok je odgovarajuća optimalna vrijednost funkcije cilja* $\alpha^* = 57$.

Općenito, pretpostavimo da promatramo problem linearnog programiranja s dvije varijable

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} = c_1x_1 + c_2x_2 &\rightarrow \min_{x_1, x_2} \\ &\text{uz uvjet} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b}, \end{aligned}$$

gdje su $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times 2}$ i $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

Uočimo da se ovakav problem može geometrijski predočiti. Skicirajmo u tu svrhu odgovarajuće dopustivo područje $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Neka je p_α pravac s jednadžbom $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = c_1x_1 + c_2x_2 = \alpha$. Kandidate za optimalno dopustivo rješenje tražimo na pravcima p_α, gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je $p_\alpha \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Odaberimo početni α_0 takav da je $p_{\alpha_0} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$. Promatrajmo proizvoljnu točku na pravcu p_{α_0}, čiji radijus–vektor označimo s $\mathbf{x}_0$. U svrhu traženja optimalnog



Slika 2.1: Dopustivo područje iz Primjera 2.3

dopustivog rješenja trebamo translatirati pravac p_{α_0}. Ako ga translatiramo u smjeru vektora $\mathbf{c}$ za korak $\lambda > 0$ imamo

$$\mathbf{c}^T(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{c}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 + \lambda\|\mathbf{c}\|^2 \geq \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0,$$

tj. povećavamo vrijednost funkcije cilja. Dakle, kako bismo smanjili vrijednost funkcije cilja, pravac p_{α_0} moramo translatirati u smjeru vektora $-\mathbf{c}$ najviše što možemo, a da pri tome ostanemo u području $\mathcal{D}$. Radijus–vektor granične točke je optimalno dopustivo rješenje $\mathbf{x}^*$. Opisano možemo formalizirati sljedećim jednostavnim algoritmom.

Geometrijski algoritam

1. Odabrati α_0 tako da je $p_{\alpha_0} \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$.

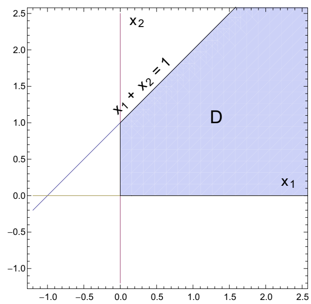
2. Translatirati pravac p_{α_0} u smjeru vektora $-\mathbf{c}$ najviše moguće, a da se pritom ne napusti područje $\mathcal{D}$.

3. Ako postoji granična točka u kojoj se može napustiti područje, radijus–vektor te točke je optimalno dopustivo rješenje x^*. Ako takva točka ne postoji, za optimalnu vrijednost funkcije cilja staviti $-\infty$.

Primjer 2.4. *Jednostavno se vidi da dopustivo područje*

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

nije omeđeno (vidi Sliku 2.2).



Slika 2.2: Dopustivo područje iz Primjera 2.4

Pretpostavimo da funkcija cilja koju minimiziramo ima oblik $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Primjenom geometrijskog algoritma dobivamo:

a) Ako je $\mathbf{c} = [1,1]^T$, onda je $\mathbf{x}^* = [0,0]^T$.

b) Ako je $\mathbf{c} = [1,0]^T$, onda je $\mathbf{x}^* = [0,x_2]^T$, $0 \leq x_2 \leq 1$.

c) Ako je $\mathbf{c} = [0,1]^T$, onda je $\mathbf{x}^* = [x_1,0]^T$, $x_1 \geq 0$.

d) Ako je $\mathbf{c} = [-1,1]^T$, onda je optimalna vrijednost funkcije cilja $-\infty$.

e) Ako u skup uvjeta dodamo uvjet $x_1 + x_2 \leq -1$, onda će dopustivo područje biti prazno.

Ako su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ te $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, onda minimizacijski problem

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

zovemo **standardni oblik problema linearnog programiranja**. Pritom uvjet $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ znači da je svaka komponenta vektora $\mathbf{x}$ nenegativna te stoga taj uvjet zovemo **uvjet nenegativnosti**.

Propozicija 2.1. *Svaki se problem linearnog programiranja može zapisati u standardnom obliku problema linearnog programiranja.*

Dokaz. Ako je x_j slobodna varijabla, tj. $x_j \in \mathbb{R}$, onda se ona može zapisati u obliku $x_j = x_j^+ - x_j^-$, gdje su $x_j^+, x_j^- \geq 0$. Ako je $x_j \leq 0$, onda se ona može zapisati u obliku $x_j = -x_j^+$, $x_j^+ \geq 0$. Uvjetu oblika $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i$ pridružujemo novu varijablu $s_i \geq 0$, pa taj uvjet prelazi u

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + s_i &= b_i \\ s_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Slično, uvjetu oblika $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i$ pridružujemo novu varijablu $s_i \geq 0$ pa taj uvjet prelazi u

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - s_i &= b_i \\ s_i &\geq 0. \end{aligned}$$

□

Primjer 2.5. *Problem linearnog programiranja iz Primjera 2.1 zapisan u standardnom obliku problema linearnog programiranja glasi*

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2^+ + 2x_2^- + x_3 &\to \min_{x_1, x_2^+, x_2^-, x_3, x_4^+, x_4^-, s_1, s_2} \\ &\textit{uz uvjete} \\ x_1 + 2x_2^+ - 2x_2^- + x_4^+ - x_4^- + s_1 &= 3 \\ 2x_2^+ - 2x_2^- - x_3 &= 4 \\ x_3 - 3x_4^+ + 3x_4^- - s_2 &= 0 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2^+ &\geq 0 \\ x_2^- &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0 \\ x_4^+ &\geq 0 \\ x_4^- &\geq 0 \\ s_1 &\geq 0 \\ s_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

odnosno u matričnom obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \textit{uz uvjet} & \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

gdje su

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2^+ \\ x_2^- \\ x_3 \\ x_4^+ \\ x_4^- \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

te $\mathbf{b} = [3, 4, 0]^T$.

Primjer 2.6. *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\rightarrow \min_{x_1, x_2, x_3} \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Iz uvjeta $x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$ *izrazimo slobodnu varijablu* $x_1 = 5 - 2x_2 - x_3$ *te je uvrstimo u drugi uvjet i u funkciju cilja. Na taj način dobivamo novi ekvivalentni problem*

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &\rightarrow \min_{x_2, x_3} \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Uočimo da je novi problem zapisan kao standardni problem linearnog programiranja. Osim toga riječ je o problemu s dvije varijable, koji možemo riješiti primjenom geometrijskog algoritma. Kada dobijemo x_2^* *i* x_3^*, *slijedi da je* $x_1^* = 5 - 2x_2^* - x_3^*$. *Nije teško vidjeti da su* $x_1^* = -3$, $x_2^* = 4$ *te* $x_3^* = 0$.

2.2 Rješavanje problema linearnog programiranja primjenom programskog paketa *Mathematica*

Problem linearnog programiranja moguće je rješavati primjenom nekog programskog paketa. Ovdje opisujemo mogućnost primjene programskog paketa *Mathematica*. Problem linearnog programiranja oblika

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \min\limits_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & & \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} & \geq & b_i,\ i \in M_1 \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} & \leq & b_i,\ i \in M_2 \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} & = & b_i,\ i \in M_3 \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

rješavamo tako da definiramo vektor $\mathbf{s}$ tako da je

$$s_i = \begin{cases} 1, & i \in M_1 \\ -1, & i \in M_2 \\ 0, & i \in M_3 \end{cases}.$$

Primjenom naredbe `LinearProgramming[c,m,{{b1,s1},...,{bl,sl}}]`, gdje su $\mathbf{a}_i$ redci matrice $\mathbf{m}$ te $l = |M_1 \cup M_2 \cup M_3|$, dobivamo optimalno dopustivo rješenje.

Primjer 2.7. *Primjenom programskog paketa* Mathematica *riješimo sljedeće probleme linearnog programiranja:*

a)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \to & \max\limits_{x_1,x_2} \\ \textit{uz uvjete} & & \\ x_1 + 3x_2 & \leq & 2 \\ 3x_1 + x_2 & \leq & 2 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & \to & \min\limits_{x_1,x_2} \\ \textit{uz uvjete} & & \\ x_1 + x_2 & = & 4 \\ x_1, x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\rightarrow \min_{x_1,x_2,x_3} \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje.

a)
```
In[1]:=      m = {{1, 3}, {3, 1}};
             c = {-1, -1};b = {2, 2}; s = {-1, -1};
             LinearProgramming[c, m, {{b[[1]], s[[1]]},
             {b[[2]], s[[2]]}}]
Out[2]=      {1/2, 1/2}
```

b)
```
In[1]:=      m = {{1, 1}};
             c = {1, 3};b = {4}; s = {0};
             LinearProgramming[c, m, {{b[[1]], s[[1]]}}]
Out[2]=      {4, 0}
```

c) Uočimo da je varijabla x_1 slobodna te ju je potrebno napisati u obliku $x_1 = x_1^+ - x_1^-$, $x_1^+, x_1^- \geq 0$.

```
In[1]:=      m={{1,-1,2,1},{2,-2,3,1}};
             c={1,-1,3,4};b={5,6},s={0,0};
             LinearProgramming[c, m, {{b[[1]], s[[1]]},
             {b[[2]], s[[2]]}}];
Out[2]=      {0, 3, 4, 0}
```

Konačno $x_1^\star = -3, x_2^\star = 4, x_3^\star = 0$.

Primjedba 2.2. Postoji više programskih paketa u kojima su uključene gotove rutine za rješavanje problema linearnog programiranja. U *MATLAB-u* se problemi linearnog programiranja oblika (vidi primjerice [14])

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & \\ \mathbf{A}_1\mathbf{x} &\leq \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} &= \mathbf{b}_2 \\ lb \leq \mathbf{x} &\leq ub. \end{aligned}$$

mogu rješavati naredbom `linprog(c,A1,b1,A2,b2,lb,ub)`. Pri tome su *lb* i *ub* vektori čije komponente predstavljaju donju, odnosno gornju među na komponente vektora $\mathbf{x}$. Također postoje i razni specijalizirani softverski paketi za analizu i rješavanje problema linearnog programiranja. Primjerice, software *LINDO* dostupan na `http://www.lindo.com/` besplatan je za primjenu na problemima manjih dimenzija.

2.3 Neki problemi koji se svode na problem linearnog programiranja

2.3.1 Problem optimalne prehrane

Pretpostavimo da na raspolaganju imamo namirnice $N_1, \ldots, N_n$. Cijena po jedinici namirnice N_j iznosi c_j, $j = 1, \ldots, n$. U namirnicama su prisutni nutritivni elementi $E_1, \ldots, E_m$, pri čemu je u namirnici N_j prisutno a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, nutritivnog elementa E_i. Poznato je da svaka osoba mora tijekom jednog dana unijeti barem b_i jedinica nutritivnog elementa E_i, $i = 1, \ldots, m$. Smisleno je postaviti sljedeće pitanje:

Koliko treba konzumirati pojedine namirnice da bi se zadovoljila dnevna potreba za nutritivnim elementima, a da bi se pri tome minimizarala cijena prehrane?

Označimo s x_j, $j = 1, \ldots, n$ količinu konzumirane namirnice N_j, $j = 1, \ldots, n$. Problem se može formulirati kao minimizacijski problem linearnog programiranja na sljedeći način:

$$
\begin{array}{rcl}
c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n & \to & \min\limits_{x_1, \ldots, x_n} \\
\text{uz uvjete} & & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
 & \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \geq & b_m \\
x_1, \ldots, x_n & \geq & 0
\end{array}
$$

ili u matričnom obliku

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \min\limits_{\mathbf{x}} \\
\text{uz uvjete} & & \\
\mathbf{A}\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\
\mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}.
\end{array}
$$

Primjedba 2.3. U popularnijoj varijanti ovaj se problem može formulirati kao problem minimizacije unosa kalorija, tako da cijenu po namirnici zamijenimo s kalorijama. Spomenimo da se na sljedećoj mrežnoj stranici mogu modelirati različite varijante ovog problema: www.zweigmedia.com/RealWorld/dietProblem/diet.html

2.3.2 Problem optimalne proizvodnje

Neko postrojenje prozvodi proizvode $P_1, \ldots, P_n$ te se u tu svrhu upotrebljavaju strojevi $S_1, \ldots, S_m$. Pritom svaki stroj S_i, $i = 1, \ldots, m$ u jednom danu može raditi najviše $b_i, i = 1, \ldots, m$ sati. Neka je a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, broj sati koji je potreban da bi se na $i-$tom stroju proizveo $j-$ti prozvod. Označimo s c_j, $j = 1, \ldots, n$ prihod po proizvodu P_j. Prirodno se nameće sljedeće pitanje:

Koliko treba proizvesti mjernih jedinica pojedinog proizvoda da bi ostvareni prihod bio maksimalan?

Označimo s x_j broj mjernih jedinica proizvoda P_j, $j = 1, \ldots, n$. Problem se može formulrati kao maksimizacijski problem linearnog programiranja na sljedeći način:

$$
\begin{array}{rcl}
c_1x_1 + \cdots + c_nx_n & \to & \max\limits_{x_1,\ldots,x_n} \\
\text{uz uvjete} & & \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
& \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
x_1, \ldots, x_n & \geq & 0
\end{array}
$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \max_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

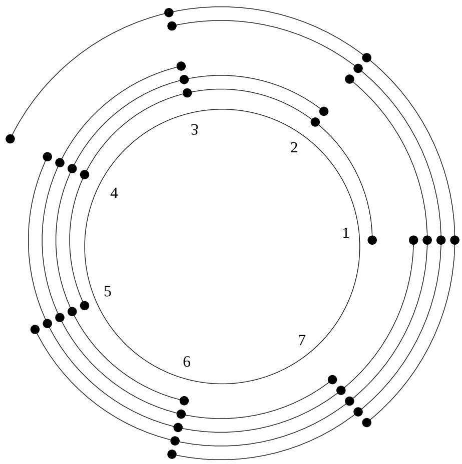
2.3.3 Problem rasporeda taksista

Taksi–služba treba organizirati noćnu vožnju gradom. Poznato je da tijekom noći j, $j = 1, \ldots, 7$ treba angažirati t_j taksista. Radno zakonodavstvo predviđa da taksisti smiju raditi pet noći zaredom. Postavlja se sljedeće pitanje:

Koliki je najmanji broj taksista koje treba angažirati radi organizacije prijevoza?

Označimo s x_j broj taksista koji započinju smjenu na noć j. Lako se vidi (Slika 2.3) da se odgovarajući problem može modelirati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} x_1 + \cdots + x_7 &\rightarrow \min_{x_1,\ldots,x_7} \\ \text{uz uvjete} & \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &\geq t_5 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\geq t_6 \\ x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 &\geq t_7 \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 &\geq t_1 \\ x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 &\geq t_2 \\ x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 &\geq t_3 \\ x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\geq t_4 \\ x_1, \ldots, x_7 &\in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{aligned}$$



Slika 2.3: Slika koja opisuje model rasporeda taksista. Pritom točke na koncentičnim kružnim lukovima predstavljaju dane u tjednu.

Uočimo da općenito ovaj problem nije problem linearnog programiranja jer su varijable cjelobrojne, već je problem *cjelobrojnog programiranja*. Metode za rješavanje problema cjelobrojnog programiranja izlaze izvan okvira ovog udžbenika, a zaiteresiranog čitatatelja upućujemo na [2]. Ponekad je smisleno relaksirati problem cjelobrojnog programiranja tako da se uvjet $x_1, \ldots, x_7 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zamijeni uvjetom $x_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, 7$. Ako relaksirani problem ima cjelobrojno rješenje, onda je to ujedno i rješenje originalnog cjelobrojnog problema.

Ako primjerice, stavimo da je $t_1 = 7, t_2 = 3, t_3 = 9, t_4 = 5, t_5 = 7, t_6 = 7, t_7 = 5$, primjenom *Mathematica* naredbe `LinearProgramming` dobivamo optimalno rješenje $x_1^\star = 3, x_2^\star = 2, x_3^\star = 1, x_4^\star = 0, x_5^\star = 1, x_6^\star = 3, x_7^\star = 0$, koje je cjelobrojno pa ujedno predstavlja rješenje originalnog cjelobrojnog problema. Važno je istaknuti da općenito to neće biti slučaj, odnosno relaksirani problem neće nužno dati cjelobrojno optimalno rješenje.

2.3.4 Problem najboljeg pravca

U pravokutnom koordinatnom sustavu zadani su podaci (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, r$, za koje treba odrediti pravac s jednadžbom $y = kt + l$, $k, l \in \mathbb{R}$ koji u nekom smislu najbolje aproksimira zadane podatke. U literaturi je poznato nekoliko različitih pristupa na osnovi kojih je moguće rješavati ovaj problem (vidjeti primjerice [6, 21]), a u nastavku navodimo neke.

Pristup 1. minimizacija sume kvadrata vertikalnih udaljenosti točaka do pravca, odnosno minimizacija funkcionala

$$F_2(k,l) = \sum_{i=1}^{r}(kt_i + l - y_i)^2.$$

Ovaj je pristup u literaturi poznat pod imenom **metoda najmanjih kvadrata** ili **metoda običnih najmanjih kvadrata** ([3, 21]).

Pristup 2. minimizacija sume vertikalnih udaljenosti točaka do pravca, odnosno minimizacija funkcionala

$$F_1(k,l) = \sum_{i=1}^{r}|kt_i + l - y_i|.$$

Ovaj je pristup u literaturi poznat pod imenom **metoda najmanjih apsolutnih udaljenosti** (vidjeti [6, 17, 18]). Spomenimo da su povijesni počeci ovog pristupa vezani uz ime hrvatskog znanstvenika Ruđera Josipa Boškovića iz 1757. godine (vidjeti [5]).

Pristup 3. minimizacija maksimalne vertikalne udaljenosti točaka do pravca, odnosno minimizacija funkcionala ([6])

$$F_\infty(k,l) = \max_{i=1,\dots,r}|kt_i + l - y_i|.$$

Pristup 1. Graf funkcije F_2 je paraboloid, funkcija F_2 je diferencijabilna te odgovarajući gradijent i Hessijan glase:

$$\nabla F_2(k,l) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{r}(kt_i + l - y_i)t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{r}(kt_i + l - y_i) \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 F_2(k,l) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{r} t_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{r} t_i \\ \sum\limits_{i=1}^{r} t_i & r \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da sustav

$$\nabla F_2(k,l) = \mathbf{0} \tag{2.2}$$

možemo zapisati u obliku

$$\nabla^2 F_2(k,l)\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{r} t_i y_i \\ \sum_{i=1}^{r} y_i \end{bmatrix}.$$

Sukadno Cauchy-Schwartzovoj nejednakosti, determinanta matrice $\nabla^2 F_2(k,l)$ je nenegativna. Specijalno, jednaka je nula onda i samo onda ako je $t_1 = \cdots = t_r$ te u tom slučaju sustav (2.2) ima beskonačno mnogo rješenja. U svim drugim slučajevima determinanta je pozitivna te je prema tome rješenje sustava jednažbi (2.2) jedinstveno. Također, može se pokazati da je u slučaju jedinstvenog rješenja matrica $\nabla^2 F_2(k,l)$ pozitivno definitna te je stoga jedinstveno rješenje sustava (2.2) točka u kojoj se postiže globalni minimum funkcionala F_2.

Određivanje optimalnog pravca primjenom Pristupa 2 i Pristupa 3, svodi se na problem nediferencijalbilne optimizacije. Pokazat ćemo da se oba pristupa mogu svesti na problem linearnog programiranja.

Pristup 2. Primijetimo da je

$$|kt_i + l - y_i| = \max\{kt_i + l - y_i, -kt_i - l + y_i\},\ i = 1, \dots, r.$$

Označimo s $z_i := |kt_i + l - y_i|, i = 1, \dots, r$. Očigledno je

$$\begin{aligned} kt_i + l - y_i &\leq z_i, \\ -kt_i - l + y_i &\leq z_i,\ i = 1, \dots, r. \end{aligned}$$

Problem minimizacije funkcionala F_1 možemo zapisati u obliku

$$\begin{array}{rcl} z_1 + z_2 + \cdots + z_r + 0 \cdot k + 0 \cdot l & \to & \min\limits_{z_1,\dots,z_r,k,l} \\ \text{uz uvjete} & & \\ -z_1 + kt_1 + l & \leq & y_1 \\ -z_1 - kt_1 - l & \leq & -y_1 \\ -z_2 + kt_2 + l & \leq & y_2 \\ -z_2 - kt_2 - l & \leq & -y_2 \\ & \vdots & \\ -z_r + kt_r + l & \leq & y_r \\ -z_r - kt_r - l & \leq & -y_r \end{array}$$

ili zapisano u matričnom obliku

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \min\limits_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b}, \end{array}$$

gdje su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & t_1 & 1 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & -t_1 & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & t_2 & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & -t_2 & -1 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & t_r & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -t_r & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2r\times(r+2)}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_1 \\ y_2 \\ -y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ -y_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2r},$$

te $\mathbf{c} = [1, 1, \dots, 1, 0, 0]^T \in \mathbb{R}^{r+2}$, $\quad \mathbf{x} = [z_1, z_2, \dots, z_r, k, l]^T \in \mathbb{R}^{r+2}$.

Pristup 3. Označimo li s

$$z := \max_{i=1,\dots,r} |kt_i + l - y_i|,$$

slično kao u Pristupu 2, problem se svodi na sljedeći problem linearnog programiranja:

$$\begin{array}{rcl} z + 0 \cdot k + 0 \cdot l & \to & \displaystyle\min_{z,k,l} \\ \text{uz uvjete} & & \\ -z + kt_1 + l & \leq & y_1 \\ -z - kt_1 - l & \leq & -y_1 \\ -z + kt_2 + l & \leq & y_2 \\ -z - kt_2 - l & \leq & -y_2 \\ & \vdots & \\ -z + kt_r + l & \leq & y_r \\ -z - kt_r - l & \leq & -y_r \end{array}$$

ili u matričnom obliku

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \displaystyle\min_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & & \\ \mathbf{Ax} & \leq & \mathbf{b}, \end{array}$$

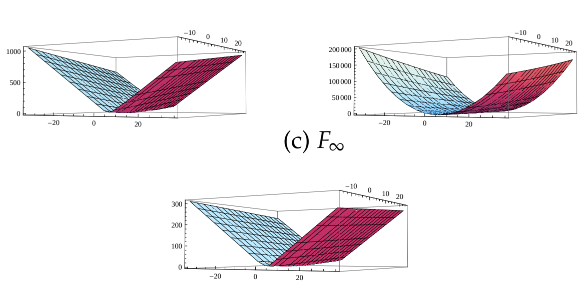
gdje su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & t_1 & 1 \\ -1 & -t_1 & -1 \\ \vdots & & \\ -1 & t_r & 1 \\ -1 & -t_r & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2r\times 3}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ -y_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2r}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

te $\mathbf{x} = [z, k, l]^T$.

Primjer 2.8. *Zadani su podaci* $\{(1,1),(2,3),(2.5,4),(3,5),(4,11),(5,15),(8,16)\}$. *Odredimo pravac s jednadžbom* $y = k\,t + l$, *koji najbolje aproksimira zadani skup podataka u smislu Pristupa 1, 2 i 3.*

Rješenje. Grafovi funkcija F_1, F_2 i F_∞ prikazani su na Slici 2.4. Primjenom



(a) F_1 (b) F_2 (c) F_∞

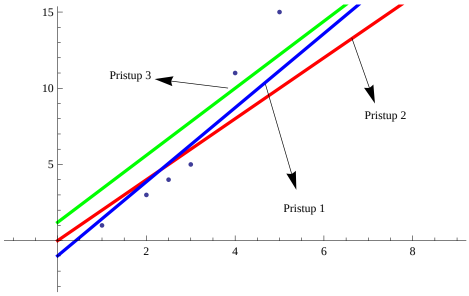
Slika 2.4: Grafovi funkcija F_1, F_2 i F_3

opisanog postupka, Pristupe 2 i 3 svodimo na probleme linearnog programiranja te primijenimo naredbu `LinearProgramming`. Pri tome treba paziti da su varijable k i l u oba pristupa slobodne. Dobivamo sljedeće pravce

- Pristup 1. $y = -0.996689 + 2.43046t$
- Pristup 2. $y = 2t$
- Pristup 3. $y = 1.2 + 2.2t$.

Na Slici 2.5 prikazani su podaci i odgovarajući pravci.

Poznato je da je pravac dobiven primjenom Pristupa 2 najneosjetljiviji na stršeće podatke tzv. *outliere* (vidjeti [17, 18]), dok je pravac dobiven Pristupom 3

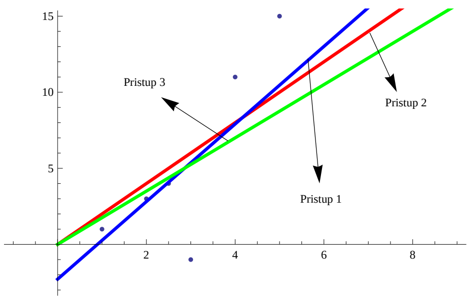


Slika 2.5: Točke i pravci (Pristup 1, Pristup 2 i Pristup 3)

najosjetljiviji na stršeće podatke. Ilustrirat ćemo to tako da podatak $(3,5)$ zamijenimo s podatkom $(3,-1)$, koji možemo smatrati stršećim podatkom. Za nove podatke dobivamo sljedeće pravce:

- Pristup 1. $y = -2.28808 + 2.54967t$
- Pristup 2. $y = 2t$
- Pristup 3. $y = 1.75t$.

Na Slici 2.6 prikazani su novi podaci i odgovarajući pravci.

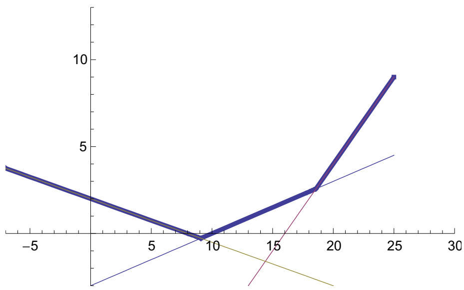


Slika 2.6: Promijenjene točke i pravci (Pristup 1, Pristup 2 i Pristup 3)

2.3.5 Minimizacija po dijelovima linearne funkcije

Pretpostavimo da su zadani vektori $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^n$ te realni brojevi $d_1, \ldots, d_m$. Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ formulom $f(\mathbf{x}) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \{\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i\}$. Funkcija f je po dijelovima linearna funkcija.

Primjer 2.9. *Graf po dijelovima linearne funkcije* $f(x) = \max\{-\frac{1}{4}x + 2, 0.3x - 3, x - 16\}$ *prikazan je na Slici 2.7.*



Slika 2.7: Graf funkcije f iz Primjera 2.9

Promatramo sljedeći problem

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = \max_{i=1,\ldots,m} \{\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i\} \quad &\to \quad \min_{\mathbf{x}} \\ &\text{uz uvjet} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \quad &\geq \quad \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Uvedemo li oznaku

$$z := \max_{i=1,\ldots,m} \{\mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i\},$$

prethodni se problem može napisati u obliku problema linearnog programiranja

$$\begin{aligned} z + \mathbf{0}^T \mathbf{x} \quad &\to \quad \min_{z,\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjete} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \quad &\geq \quad \mathbf{b} \\ -z + \mathbf{c}_1^T \mathbf{x} \quad &\leq \quad -d_1 \\ -z + \mathbf{c}_2^T \mathbf{x} \quad &\leq \quad -d_2 \\ &\vdots \\ -z + \mathbf{c}_m^T \mathbf{x} \quad &\leq \quad -d_m, \end{aligned}$$

što je problem linearnog programiranja.

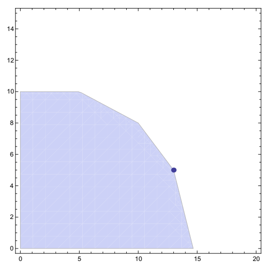
2.4 Zadaci

Zadatak 2.1. *Zadan je problem*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\rightarrow \max_{x_1,x_2} \\ \text{uz uvjete} & \\ x_2 &\leq 10 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 60 \\ x_1 + x_2 &\leq 18 \\ 3x_1 + x_2 &\leq 44 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Riješite problem grafički te pomoću Mathematica *naredbe LinearProgramming.*

Rješenje. $\mathbf{x}^* = [13, 5]^T$. Dopustivo područje prikazano je na Slici 2.8.



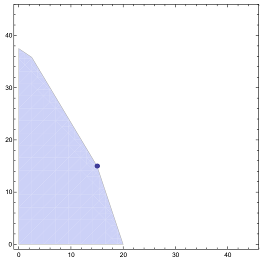
Slika 2.8: Dopustivo područje problema iz Zadatka 2.1.

Zadatak 2.2. *Zadan je problem*

$$\begin{aligned} 500x_1 + 300x_2 &\rightarrow \max_{x_1,x_2} \\ \text{uz uvjete} & \\ 15x_1 + 5x_2 &\leq 300 \\ 10x_1 + 6x_2 &\leq 240 \\ 8x_1 + 12x_2 &\leq 450 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Riješite problem grafički te pomoću programskog paketa Mathematica.

Rješenje. $\mathbf{x}^* = [15, 15]^T$. Dopustivo područje prikazano je na Slici 2.9.



Slika 2.9: Dopustivo područje problema iz Zadatka 2.3.

Zadatak 2.3. *Grafički riješite sljedeći problem linearnog programiranja*

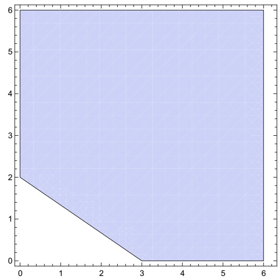
$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \min \\ \textit{uz uvjete} & & \\ 2x_1 + 3x_2 - 6 & \geq & 0 \\ x_1 & \geq & 0 \\ x_1 & \leq & 6 \\ x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

ako je a) $\mathbf{c} = [1, 1]^T$, *b)* $\mathbf{c} = [-1, 0]^T$, *c)* $\mathbf{c} = [2, 3]^T$, *d)* $\mathbf{c} = [0, -1]^T$.

Rješenje. a) $\mathbf{x}^* = [0, 2]^T$, $c^T x^* = 2$, b) $\mathbf{x}^* = [6, x_2]^T$, $x_2 \geq 0$, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = -6$, c) $\mathbf{x}^* = [x_1, 2 - 2/3x_1]^T$, $x_1 \in [0, 3]$, $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = 6$, d) optimalna vrijednost funkcije cilja je $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = -\infty$. Neomeđeno dopustivo područje prikazano je na Slici 2.10.

Zadatak 2.4. *Zapišite sljedeći problem kao problem linearnog programiranja te ga riješite grafički i u* Mathematici*:*

Obrtnik proizvodi dvije vrste proizvoda, A i B. Za (djeljivu) jedinicu proizvoda A potrebno je 2 minute pripreme, 1 minuta izrade i 3 minute završnih radova. Za (djeljivu) jedinicu proizvoda B potrebne su 2 minute pripreme, 2 minute izrade i 1 minuta završnih radova. Svakoga dana moguće je utrošiti 140 minuta za pripremu, 120 minuta za izradu i 150 minuta za završne radove. Koliko jedinica svakog proizvoda obrtnik treba izraditi da bi maksimizirao dobit ako jedinica proizvoda A ima cijenu 10 kn, a jedinica proizvoda B 8 kn?

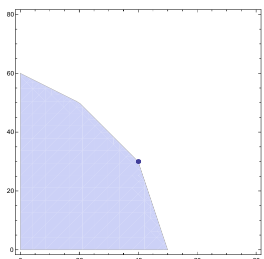


Slika 2.10: Dopustivo područje problema iz Zadatka 2.3.

Rješenje. Neka je x_1 broj proizvedenih jedinica proizvoda A i x_2 broj proizvedenih jedinica proizvoda B. Zadani problem može se zapisati kao problem linearnog programiranja:

$$
\begin{array}{rcl}
10x_1 + 8x_2 & \to & \max\limits_{x_1, x_2} \\
\text{uz uvjete} & & \\
2x_1 + 2x_2 & \leq & 140 \\
x_1 + 2x_2 & \leq & 120 \\
3x_1 + x_2 & \leq & 150 \\
x_1, x_2 & \geq 0, &
\end{array}
$$

odakle je $\mathbf{x}^* = [40, 30]^T$. Dopustivo područje prikazano je na Slici 2.11.



Slika 2.11: Dopustivo područje problema iz Zadatka 2.4.

Zadatak 2.5. *Farmer ima 10 hektara površine koju treba zasaditi pšenicom i kukuruzom, pri čemu mora zasaditi najmanje 7 hektara i pritom smije potrošiti najviše 1200* *eura. Za sjetvu svakog hektara pšenice treba potrošiti 200, a za svaki hektar kukuruza 100 eura. Vrijeme za sjetvu je ograničeno na 12 sati. Za svaki hektar pšenice treba mu 1 sat, a za svaki hektar kukuruza 2 sata. Ako je zarada 500 eura po hektaru pšenice i 300 eura po hektaru kukuruza, koliko hektara svakog treba zasaditi da se maksimizira zarada dobivena od uroda?*

a) Zadani problem zapišite kao problem linearnog programiranje i riješite ga geometrijskom metodom.

b) Zapišite zadani problem linearnog programiranja u standardnom obliku

Rješenje. Neka je x_1 broj zasađenih hektara pšenice i x_2 broj zasađenih hektara kukuruza. Optimalno rješenje je $x_1^* = x_2^* = 4$. Odgovarajući standardni oblik problema linearnog programiranja glasi:

$$\begin{aligned} -500x_1 - 300x_2 &\rightarrow \min \\ \text{uz uvjete} \\ 200x_1 + 100x_2 + s_2 &= 1200 \\ x_1 + x_2 - s_3 &= 7 \\ x_1 + x_2 + s_4 &= 10 \\ x_1 + 2x_2 + s_1 &= 12 \\ x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 2.6. *Zapišite sljedeći problem kao problem linearnog programiranja te ga riješite primjenom* Mathematica *naredbe LinearProgramming.*

$$\begin{aligned} 2|x_1| + 5|x_2 - 5| &\rightarrow \min \\ \textit{uz uvjet} \\ |x_1 - 2| + |x_2| &\leq 2 \end{aligned}$$

Rješenje. Označimo $z_1 := |x_1|$, $z_2 := |x_2 - 5|$, $z_3 := |x_1 - 2|$, $z_4 := |x_2|$. Tada odgovarajući problem lineranog programiranja glasi

$$
\begin{aligned}
2z_1 + 5z_2 &\to \min \\
\text{uz uvjete} & \\
z_3 + z_4 &\le 2 \\
x_1 - z_1 &\le 0 \\
-x_1 - z_1 &\le 0 \\
x_2 - z_2 &\le 5 \\
-x_2 - z_2 &\le -5 \\
x_1 - z_3 &\le 2 \\
-x_1 - z_3 &\le -2 \\
x_2 - z_4 &\le 0 \\
-x_2 - z_4 &\le 0
\end{aligned}
$$

Optimalno rješenje početnog problema je $x_1^* = 2$, $x_2^* = 2$.

Zadatak 2.7. *Zadani su realni brojevi $y_1, y_2, \ldots, y_m$ s težinama $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m \ge 0$. Zapišite sljedeća dva problema u standardnom obliku problema linearnog programiranja:*

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \omega_i |x - y_i| \to \min_x,$

b) $\displaystyle\max_{i=1,\ldots,m} \omega_i |x - y_i| \to \min_x.$

Rješenje.

a) Neka je $z_i := |x - y_i|$, $i = 1, \ldots, m$ i $x = x^+ - x^-$. Tada odgovarajući standardni oblik problema linearnog programiranja glasi

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \omega_i z_i &\to \min \\
\text{uz uvjete} & \\
x^+ - x^- - z_i + s_{1i} &= y_i,\ i = 1, \ldots, m \\
-x^+ + x^- - z_i + s_{2i} &= -y_i,\ i = 1, \ldots, m \\
x^+, x^- &\ge 0 \\
z_i, s_{1i}, s_{2i} &\ge 0,\ i = 1, \ldots, m
\end{aligned}
$$

b) Neka je $z := \max\limits_{i=1,\ldots,m} \omega_i|x-y_i|$ i $x = x^+ - x^-$. Tada odgovarajući standardni oblik problema linearnog programiranja glasi

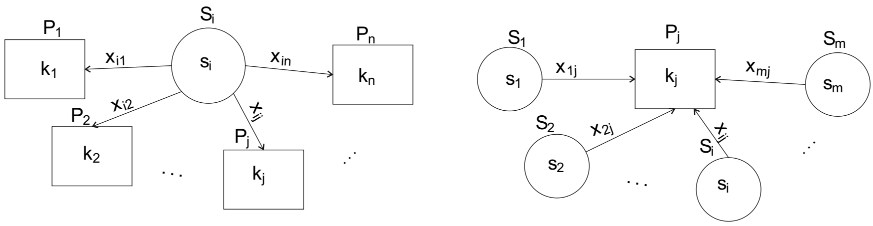
$$\begin{aligned} z &\rightarrow \min \\ \text{uz uvjete} & \\ \omega_i x^+ - \omega_i x^- - z + s_{1i} &= \omega_i y_i,\ i=1,\ldots,m \\ -\omega_i x^+ + \omega_i x^- - z + s_{2i} &= -\omega_i y_i,\ i=1,\ldots,m \\ z, x^+, x^- &\geq 0 \\ s_{1i}, s_{2i} &\geq 0,\ i=1,\ldots,m \end{aligned}$$

Zadatak 2.8. *Sljedeći problem zapišite kao problem linearnog programiranja: Jedna namirnica nalazi se u m skladišta iz kojih se opskrbljuje n prodavaonica. Skladište i, $i = 1,\ldots,m$ sadrži količinu s_i te namirnice, a prodavaonici j, $j = 1,\ldots,n$ treba dostaviti količinu k_j namirnice. Neka je c_{ij}, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$ cijena prijevoza jedinice namirnice od skladišta i do prodavaonice j. Problem je opskrbiti sve prodavaonice potrebnom količinom namirnice tako da je ukupna cijena prijevoza minimalna.*

Rješenje. Neka je x_{ij} količina namirnice koja je prevezena iz skladišta i u prodavaonicu j, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$. Tada odgovarajući problem linearnog programiranja glasi (vidi Sliku 2.12):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} &\rightarrow \min_{\mathbf{x_{ij}}} \\ \text{uz uvjete} & \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} &\leq s_i,\ i=1,\ldots,m \qquad (2.3) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= k_j,\ j=1,\ldots,n \qquad (2.4) \\ x_{ij} &\geq 0,\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n. \end{aligned}$$

Zadatak 2.9. *Neko postrojenje proizvodi jednu vrstu proizvoda. Na kraju i-tog mjeseca mora plasirati d_i jedinica tog proizvoda. Proizvodi proizvedeni tijekom mjeseca mogu se plasirati ili na kraju mjeseca u kojem su proizvedeni ili se mogu uskladištiti i plasirati na kraju sljedećeg mjeseca. Za svaku uskladištenu jedinicu proizvoda trošak skladištenja iznosi c_1 kuna mjesečno. Na početku godine je skladište prazno. Ako postrojenje*



Slika 2.12: Slika uz Zadatak 2.8. Lijevo - uvjet 2.3 - količina namirnica koja se prevozi iz skladišta ne može prelaziti količinu namirnica raspoloživih u skladištu, desno - uvjet 2.4 - potražnja svake prodavaonice treba biti zadovoljena

Mjesec i
proizvedeno x_i
uskladišteno s_i
trošak $c_1 s_{i-1} + c_2 a_{i-1}$, $a_{i-1} = \|x_i - x_{i-1}\|$
uvjet $d_i + s_i = x_i + s_{i-1}$

Tablica 2.1: Podaci za i-ti mjesec. Uvjet osigurava da je količina plasiranog i uskladištenog u mjesecu i jednaka količini proizvedenog u mjesecu i uvećanog za količinu uskladištenog u prethodnom mjesecu.

proizvodi x_i jedinica u mjesecu i te x_{i+1} jedinica u mjesecu $i+1$, tada se javlja trošak $c_2|x_{i+1} - x_i|$ kuna, koji nastaje zbog pripremanja postrojenja na postavke za dukčiji kapacitet proizvodnje.

Formulirajte problem linearnog programiranja s ciljem minimizacije troškova u periodu od 12 mjeseci (pretpostavite da se proizvodi ostavljeni u skladištu na kraju godine uništavaju te nemaju nikakvu vrijednost i ne generiraju troškove skladištenja).

Rješenje. Neka je x_i broj proizvedenih jedinica proizvoda u mjesecu i, $i = 1, \ldots, 12$ s_i broj uskladištenih jedinica proizvoda na kraju mjeseca i, $i = 0, \ldots, 11$, te $a_i = |x_{i+1} - x_i|$, $i = 1, \ldots, 11$.

Odgovarajući problem linearnog programiranja glasi (vidi Tablicu 2.1):

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{11}(c_1 s_i + c_2 a_i) &\rightarrow \min \\
\text{uz uvjete}& \\
s_0 &= 0 \\
d_i + s_i &= x_i + s_{i-1}, \ \ i = 1, \dots, 12 \\
a_i &\geq x_{i+1} - x_i, \ \ i = 1, \dots, 11 \\
a_i &\geq -x_{i+1} + x_i, \ \ i = 1, \dots, 11 \\
x_i &\geq 0, \ \ i = 1, \dots, 12 \\
a_i, s_i &\geq 0, \ \ i = 1, \dots, 11.
\end{aligned}$$

Zadatak 2.10. *(vidi [22]) Iznos od 2 000 kn investira se tijekom pet godina u četiri različita projekta P_1,P_2, P_3 i P_4. Na početku svake godine postoji mogućnost ulaganja bilo kojeg iznosa u projekte P_1 i P_2. Svaka kuna uložena u projekt P_1 početkom godine donosi 1.4 kn dvije godine kasnije. Svaka kuna uložena u projekt P_2 početkom godine donosi 1.7 kn tri godine kasnije. Usto, postoji mogućnost ulaganja bilo kojeg iznosa i u projekte P_3 i P_4. U projekt P_3 može se investirati početkom druge godine i 1 kn uložena u taj projekt donosi 1.9 kn krajem pete godine. Projekt P_4 počinje početkom pete godine i za svaku kunu uloženu početkom pete godine dobiva se 1.3 kn na kraju pete godine. Formulirajte navedeni problem kao problem linearnog programiranja tako da za kriterij optimalnosti uzmete maksimalni akumulirani iznos na kraju pete godine te ga riješite primjenom* Mathematica *naredbe LinearProgramming.*

Rješenje. Neka su

x_{ij}- iznos (u kunama) koji se ulaže u projekt P_i na početku j-te godine, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$

x_{5j}- iznos (u kunama) neiskorištenih sredstava za investiranje na početku j-te godine, $j = 1, 2, 3, 4, 5$

	1. godina	2. godina	3. godina	4. godina	5. godina
Projekt P_1	Ulog x_{11}	Ulog x_{12} Dobit $1.4x_{11}$	Ulog x_{13} Dobit $1.4x_{12}$	Ulog x_{14} Dobit $1.4x_{13}$	Dobit $1.4x_{14}$
Projekt P_2	Ulog x_{21}	Ulog x_{22}	Ulog x_{23} Dobit $1.7x_{21}$	Dobit $1.7x_{22}$	Dobit $1.7x_{23}$
Projekt P_3	—	Ulog x_{32}	—	—	Dobit $1.9x_{32}$
Projekt P_4	—	—	—	—	Ulog x_{45} Dobit $1.3x_{45}$
Ostatak	x_{51}	x_{52}	x_{53}	x_{54}	x_{55}

Tablica 2.2: Ulaganja na početku i dobit na kraju svake godine te ostatak neinvestiranih sredstava

Odgovarajući problem linearnog programiranja je (vidi Tablicu 2.2)

$$
\begin{aligned}
1.4x_{14} + 1.7x_{23} + 1.9x_{32} + 1.3x_{45} + x_{55} &\to \max \\
\text{uz uvjete} & \\
x_{11} + x_{21} + x_{51} &= 2\,000 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{52} &= x_{51} \\
x_{13} + x_{23} + x_{53} &= 1.4x_{11} + x_{52} \\
x_{14} + x_{54} &= 1.4x_{12} + 1.7x_{21} + x_{53} \\
x_{45} + x_{55} &= 1.4x_{13} + 1.7x_{22} + x_{54} \\
x_{1j} &\geq 0, \ j = 1,2,3,4 \\
x_{2j} &\geq 0, \ j = 1,2,3 \\
x_{31} &\geq 0, \\
x_{44} &\geq 0, \\
x_{5j} &\geq 0, \ j = 1,2,3,4,5
\end{aligned}
$$

Optimalno rješenje glasi: $x_{11}^* = 2\,000$, $x_{13}^* = 2\,800$, $x_{45}^* = 3\,920$, $z^* = 5\,096$.

Zadatak 2.11. *Promatrajmo cestu podijeljenu na n područja osvijetljenu s m lampi. Neka p_j označava snagu j-te lampe. Osvijetljenost I_i i-tog područja na cesti je $\sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_j$ gdje su a_{ij} poznati koeficijenti. Neka je I_i^* željena osvijetljenost i-tog područja. Želimo odabrati snage lampi p_i tako da vektor osvijetljenja $I = (I_1, \ldots, I_n)$ bude što bliže željenom vektoru osvjetljenja I^* u smislu l_1 norme. Napišite odgovarajući problem linearnog programiranja.*

Zadatak 2.12. *Neka je $\mathcal{D} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T x \geq b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$, gdje su $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ te $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$. Odredite središte kruga najvećeg mogućeg polumjera koji se* *može upisati u skup $\mathcal{D}$. Pokažite da se ovaj problem može svesti na problem linearnog programiranja. Napravite* Mathematica *modul kojim ćete na osnovi zadanih $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$ te $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ primjenom naredbe RegionPlot prikazati skup $\mathcal{D}$ te primjenom naredbe LinearProgramming riješiti problem. Testirajte modul na primjeru skupa*

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_1 - 3x_2 \geq -1,\ -3x_1 - x_2 \geq -2,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0\}.$$

POGLAVLJE 3

Geometrija linearnog programiranja

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove geometrije linearnog progrmiranja te dokazati neke tvrdnje koje će nam biti potrebne prilikom konstrukcije algoritma za rješavanje problema linearnog programiranja. Kao što smo vidjeli u prethodnom poglavlju, problem linearnog programiranja specijalni je slučaj problema uvjetne optimizacije kod kojeg su funkcija cilja te funkcije uvjeta linearne. Pokazat ćemo da osim toga problem linearnog programiranja ima posebno svojstvo zbog kojeg se ubraja u tzv. konveksne optimizacijske probleme. Zato ćemo u ovom poglavlju posebnu ćemo pažnju posvetiti konveksnim funkcijama i njihovim svojstvima.

3.1 Definicija i jedno svojstvo konveksne funkcije

Na početku se prisjetimo definicije točke lokalnog i globalnog minimuma funkcije $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definicija 3.1. *Funkcija $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ u točki $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$ postiže **lokalni minimum** na $\mathcal{P}$ ako postoji $\rho > 0$ takav da je*

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}), \text{ za svaki } x \in K(\mathbf{x}^*, \rho) \cap \mathcal{P},$$

*gdje je $K(\mathbf{x}^*, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \rho\}$. Kažemo da funkcija f u $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$ postiže **globalni minimum** na $\mathcal{P}$, ako vrijedi*

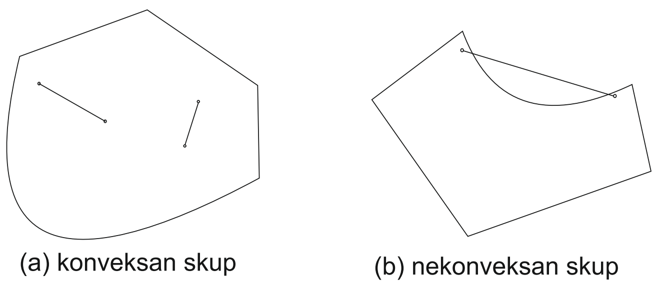
$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x}),$$

za svaki $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$.

Postupak traženja točke globalnog minimuma funkcije $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ općenito predstavlja vrlo težak i numerički zahtjevan zadatak. Iz tog razloga umjesto određivanja točke u kojoj se postiže globalni minimum funkcije, primjenom neke lokalne optimizacijske metode često puta tražimo točku u kojoj se postiže lokalni minimum funkcije.

Pretpostavimo da promatramo funkciju $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ koja postiže lokalni minimum u nekoj točki iz skupa $\mathcal{P}$. U okviru ovog odjeljka analiziramo svojstvo specijalnih funkcija koje imaju svojstvo da točka lokalnog minimuma, koja je određena nekom lokalnom optimizacijskom metodom, ujedno predstavlja točku globalnog minimuma te funkcije. U tu svrhu najprije podsjeti ćemo se nekih pojmova.

Definicija 3.2. *Za skup $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je **konveksan** ako za svaki $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}$ i za svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi $\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \in \mathcal{P}$ (vidi Sliku 3.1).*



Slika 3.1: Konveksan i nekonveksan skup

Definicija 3.3. *Neka su $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$ vektori te $\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, \ldots, k$ realni brojevi takvi da je $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Vektor $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}_i$ zovemo **konveksna kombinacija** vektora $\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, k$.*

Definicija 3.4. *Neka je $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup. Za funkciju $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ kažemo da je **konveksna** (vidi Sliku 3.2) na $\mathcal{P}$ ako za svaki $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}$ i svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

Za funkciju $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ kažemo da je konkavna *na $\mathcal{P}$ ako za svaki $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{P}$ i svaki $\lambda \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y}) \geq \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}).$$

Uočimo da je f konveksna na $\mathcal{P}$ onda i samo onda ako je $-f$ konkavna na $\mathcal{P}$.

Primjer 3.1. *Zadani su* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ *te* $d \in \mathbb{R}$. *Afina funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zadana formulom* $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + d$ *je istovremeno konveksna i konkavna na* $\mathbb{R}^n$. *Zaista, za svaki* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *i za svaki* $\lambda \in [0,1]$ *vrijedi*

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = \mathbf{c}^T(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) + d = \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}).$$

Specijalno je i linearna funkcija $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ *istovremeno konveksna i konkavna.*

Primjer 3.2. *Zadani su* $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$, *te* $d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$. *Pokažimo da je funkcija* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zadana formulom* $f(\mathbf{x}) = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \{\mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + d_i\}$ *konveksna na* $\mathbb{R}^n$. *Zaista, za svaki* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *i za svaki* $\lambda \in [0,1]$ *vrijedi*

$$\begin{aligned}
f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \max_{i=1,\ldots,m} \{\mathbf{c}_i^T(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} + d_i)\} \\
&= \max_{i=1,\ldots,m} \{\lambda(\mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + d_i) + (1-\lambda)(\mathbf{c}_i^T\mathbf{y} + d_i)\} \\
&\leq \max_{i=1,\ldots,m} \{\lambda(\mathbf{c}_i^T\mathbf{x} + d_i)\} + \max_{i=1,\ldots,m} \{(1-\lambda)(\mathbf{c}_i^T\mathbf{y} + d_i)\} \\
&= \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Primjedba 3.1. Analogno kao u Primjeru 3.2, može se pokazati da ako su $f_1, \ldots, f_m : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksne, onda je funkcija $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ zadana formulom

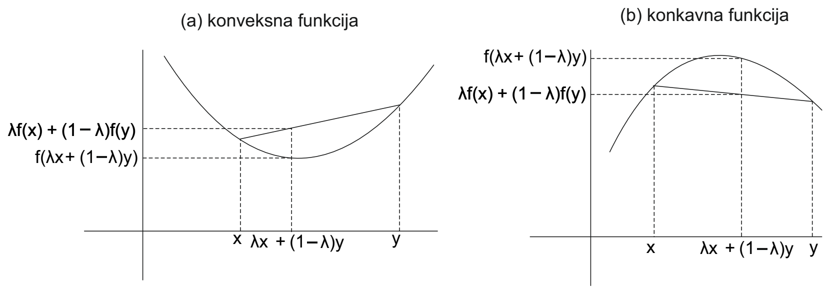
$$f(\mathbf{x}) = \max_{i=1,\ldots,m} \{f_1(x), \ldots, f_m(x)\},$$

konveksna na $\mathcal{P}$.

Primjedba 3.2. Može se pokazati (vidi primjerice [1]) da je funkcija f konveksna onda i samo ako je područje iznad grafa funkcije f konveksan skup. Slično, funkcija f je konkavna onda i samo ako je područje ispod grafa funkcije f konveksan skup (vidi Sliku 3.2).

Na kraju odjeljka navodimo i dokazujemo teorem koji opisuje jedno važno svojstvo konveksnih funkcija. Ovo svojstvo ima posebno veliku važnost u području optimizacije.

Teorem 3.1. *Neka je* $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija definirana na konveksnom skupu* $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$. *Ako funkcija* f *u* $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$ *postiže lokalni minimum, onda je* $\mathbf{x}^*$ *ujedno i točka globalnog minimimuma funkcije* f *na skupu* $\mathcal{P}$.



Slika 3.2: Konveksna i konkavna funkcija

Dokaz. Neka je $\rho > 0$ takav da je $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{y})$ za svaki $\mathbf{y} \in \mathcal{P} \cap K(\mathbf{x}^*, \rho)$. Pretpostavimo da je $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ proizvoljan vektor za kojeg vrijedi $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^\star$ i $\lambda \in \langle 0, 1]$ te definirajmo $\mathbf{y}(\lambda) = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}^*$. Kako je $\mathcal{P}$ konveksan, slijedi $\mathbf{y}(\lambda) \in \mathcal{P}$. Definirajmo je $\lambda_0 := \min\{1, \rho\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|^{-1}\}$. Za svaki $\lambda \in \langle 0, \lambda_0]$ vrijedi

$$\|\mathbf{y}(\lambda) - \mathbf{x}^*\| = \|\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^*\| = |\lambda|\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq |\lambda_0|\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \rho,$$

odnosno $\mathbf{y}(\lambda) \in \mathcal{P} \cap K(\mathbf{x}^*, \rho)$.

To znači da za $\lambda \in \langle 0, \lambda_0]$ vrijedi

$$f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{y}(\lambda)) = f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{x}^*) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{x}^*),$$

odakle slijedi da je $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$, za svaki $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$.

$\square$

3.2 Poliedar u $\mathbb{R}^n$. Ekstremna točka, vrh i bazično dopustivo rješenje

U ovom odjeljku navodimo geometrijska svojstva dopustivog skupa problema linearnog programiranja.

Definicija 3.5. *Neka su* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. *Skup*

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

*zovemo **poliedar** u* $\mathbb{R}^n$.

Uočimo da je skup $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ također poliedar kojeg ćemo zvati **poliedar u standardnom obliku**. Naime, vrijedi

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \,\&\, -\mathbf{A}\mathbf{x} \geq -\mathbf{b} \,\&\mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \\
&= \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Definicija 3.6. *Neka su $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$ i $b_i \in \mathbb{R}$.*

1) *Skup $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i\}$ zovemo **hiperravnina** u $\mathbb{R}^n$ s vektorom normale $\mathbf{a}_i$.*

2) *Skup $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i\}$ zovemo **poluprostor** u $\mathbb{R}^n$.*

Propozicija 3.1. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

a) *Poluprostor u $\mathbb{R}^n$ je konveksan skup.*

b) *Presjek od konačno mnogo konveksnih skupova je konveksan skup.*

c) *Poliedar u $\mathbb{R}^n$ je konveksan skup.*

Dokaz.

a) Neka je $\pi = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i\}$ dani poluprostor te neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \pi$ i $\lambda \in [0,1]$. Tada je $\mathbf{a}_i^T(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} \geq \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i$. Kako su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \pi$ te $\lambda \in [0,1]$ proizvoljni, slijedi da je π konveksan skup.

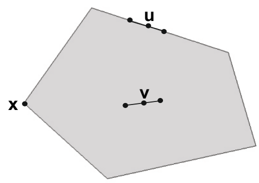
b) Dokažimo tvrdnju najprije za dva konveksna skupa S_1 i S_2. Pretpostavimo $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ (ako je $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, tvrdnja slijedi trivijalno jer je $\emptyset$ konveksan po definiciji) i neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_1 \cap S_2$. Tada slijedi da su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_1$ i $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_2$. Kako su prema pretpostavci S_1 i S_2 konveksni, slijedi da za svaki $\lambda \in [0,1]$ vrijedi $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S_1$ i $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S_2$, odnosno $\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S_1 \cap S_2$. Tvrdnja se za konačno mnogo konveksnih skupova može dokazati metodom matematičke indukcije.

c) Kako je poliedar presjek od konačno mnogo poluprostora, sukladno tvrdnji b) slijedi da je i on konveksan.

$\square$

Definicija 3.7. *Neka je $\mathcal{P}$ poliedar u $\mathbb{R}^n$. Vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ je* ***ekstremna točka*** *poliedra $\mathcal{P}$ ako ne postoje $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ & $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}$ i skalar $\lambda \in [0,1]$ takvi da je $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$.*

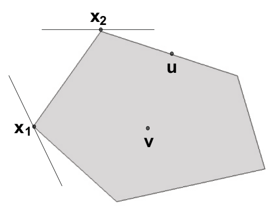
Sukladno definiciji, ekstremna točka poliedra je ona točka poliedra koja se ne može prikazati kao netrivijalna konveksna kombinacija točaka iz poliedra. Geometrijski gledano (vidi Sliku 3.3), to znači da je ekstremna točka ona točka poliedra koja se ne nalazi na nekom segmentu koji je sadržan u poliedru.



Slika 3.3: $\mathbf{x}$ je ekstremna točka poliedra, dok $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ nisu ekstremne točke jer se mogu prikazati kao netrivijalna konveksna kombinacija točaka iz poliedra

Definicija 3.8. *Neka je $\mathcal{P}$ poliedar u $\mathbb{R}^n$. Vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ je* ***vrh*** *poliedra $\mathcal{P}$ ako postoji vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} < \mathbf{c}^T\mathbf{y}$ za svaki $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$.*

S geometrijskog stajališta vrh poliedra je ona točka za koju možemo odrediti hiperravninu kroz tu točku sa svojstvom da se sve točke poliedra, izuzev vrha, nalaze s iste strane te hiperravnine.



Slika 3.4: $\mathbf{x_1}$ i $\mathbf{x_2}$ su vrhovi poliedra, $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ nisu vrhovi poliedra

Definicija 3.9. *Neka je $\mathcal{P}$ poliedar u $\mathbb{R}^n$ zadan na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &\geq b_i,\ i \in M_1 \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &\leq b_i,\ i \in M_2 \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &= b_i,\ i \in M_3. \end{aligned}$$

*Ako za vektor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da je $\mathbf{a}_{i_0}^T\mathbf{x}^* = b_{i_0}$ za neki $i_0 \in M_1, M_2$ ili M_3, onda kažemo da je uvjet s indeksom i_0 **aktivan uvjet** u vektoru $\mathbf{x}^*$.*

Primjer 3.3. *Neka je $\mathbf{x}^* = [1, 0, 0]^T$ i neka su dani uvjeti*

$$x_1 - x_2 - x_3 = 1 \tag{3.1}$$
$$x_1 \geq 0 \tag{3.2}$$
$$x_2 \leq 0 \tag{3.3}$$
$$x_3 \geq 0. \tag{3.4}$$

Uvjeti (3.1), (3.3) i (3.4) su aktivni u vektoru $\mathbf{x}^*$.

Neka je $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ i $I = \{i : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* = b_i\}$ skup indeksa aktivnih uvjeta u vektoru $\mathbf{x}^*$. Uočimo da su sljedeće tri tvrdnje ekvivalentne:

1) Skup $\{\mathbf{a}_i : i \in I\}$ sadrži n linearno nezavisnih vektora.

2) Potprostor razapet vektorima $\mathbf{a}_i$, $i \in I$ jednak je $\mathbb{R}^n$.

3) Sustav linearnih jednadžbi $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$, $i \in I$ ima jedinstveno rješenje.

Definicija 3.10. *Neka je $\mathcal{P}$ poliedar u $\mathbb{R}^n$ zadan na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &\geq b_i,\ i \in M_1 \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &\leq b_i,\ i \in M_2 \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} &= b_i,\ i \in M_3 \end{aligned}$$

te neka je $I = \{i \in M_1 \cup M_2 \cup M_3 : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* = b_i\}$ skup indeksa aktivnih uvjeta u vektoru $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$.

*a) Za vektor $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je **bazično rješenje** ako su*

i) svi uvjeti koji sadrže jednakosti aktivni u $\mathbf{x}^*$

ii) skup $\{\mathbf{a}_i : i \in I\}$ sadrži n linearno nezavisnih vektora.

*b) Bazično rješenje $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ koje zadovoljava sve uvjete zovemo **bazično dopustivo rješenje**.*

Primijetimo da je bazično dopustivo rješenje $\mathbf{x}^\star$ sadržano u poliedru.

Primjer 3.4. *Poliedar $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^3$ zadan je na sljedeći način:*

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 && (3.5)\\
x_1 &\geq 0 && (3.6)\\
x_2 &\geq 0 && (3.7)\\
x_3 &\geq 0. && (3.8)
\end{aligned}
$$

a) Neka je $\mathbf{e}_1 = [0,0,1]^T$. Uvjeti (3.5), (3.7) i (3.8) aktivni su u $\mathbf{e}_1$, dok uvjet (3.6) nije aktivan u $\mathbf{e}_1$. Kako je uvjet (3.5) koji sadrži jednakost aktivan u $\mathbf{e}_1$ te kako su vektori $[1,1,1]^T$, $[1,0,0]^T$ i $[0,1,0]^T$ linearno nezavisni, $\mathbf{e}_1$ je bazično rješenje. Također, kako vektor $\mathbf{e}_1$ zadovoljava uvjet (3.6), $\mathbf{e}_1$ je bazično dopustivo rješenje.

b) Slično kao u a) može pokazati da su $\mathbf{e}_2 = [0,1,0]^T$ i $\mathbf{e}_3 = [0,0,1]^T$ bazična dopustiva rješenja.

c) Neka je $\mathbf{x}^* = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]^T$. Jedino je uvjet (3.5) aktivan u vektoru $\mathbf{x}^*$, prema tome $\mathbf{x}^*$ nije bazično rješenje.

d) Neka je $\mathbf{x}^* = [0,0,0]^T$. Uvjeti (3.6), (3.7) i (3.8) aktivni su u $\mathbf{x}^*$, no uvjet (3.5) koji sadrži jednakost nije aktivan u $\mathbf{x}^*$ te stoga $\mathbf{x}^*$ nije bazično rješenje. Kada bismo uvjet (3.5) zamijenili s dva uvjeta $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ i $x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$, onda $\mathbf{x}^*$ postaje bazično rješenje. Iz ovog zaključujemo da definicija bazičnog rješenja ovisi o reprezentaciji poliedra.

Sljedeći teorem opisuje vezu između ekstremne točke, vrha i bazičnog dopustivog rješenja.

Teorem 3.2. *Neka je $\mathcal{P}$ poliedar i neka je $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$. Sljedeće su tri tvrdnje ekvivalentne*

1) $\mathbf{x}^*$ je vrh poliedra.

2) $\mathbf{x}^*$ je ekstremna točka poliedra.

3) $\mathbf{x}^*$ je bazično dopustivo rješenje.

Dokaz. Neka je poliedar $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ zadan na sljedeći način

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* &\geq b_i,\ i \in M_1 && (3.9)\\
\mathbf{a}_i^T \mathbf{x}^* &= b_i,\ i \in M_2. && (3.10)
\end{aligned}
$$

Dokaz teorema provest ćemo tako da pokažemo sljedeće tri tvrdnje:

i) Ako je $\mathbf{x}^*$ je vrh poliedra, onda je $\mathbf{x}^*$ ekstremna točka poliedra;

ii) Ako je $\mathbf{x}^*$ ekstremna točka poliedra, onda je $\mathbf{x}^*$ bazično dopustivo rješenje;

iii) Ako je $\mathbf{x}^*$ bazično dopustivo rješenje, onda je $\mathbf{x}^*$ vrh poliedra.

Dokaz tvrdnje i). Kako je $\mathbf{x}^*$ vrh poliedra, postoji vektor $\mathbf{c}$ takav da je $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, za svaki vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$. Pretpostavimo da vektor $\mathbf{x}^*$ nije ekstremna točka poliedra, tj. da se može napisati u obliku

$$\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}, \tag{3.11}$$

gdje su $\lambda \in [0,1]$, $\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathcal{P}$ takvi da je $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$ te $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}^*$. Prema uvjetu tvrdnje je $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{y}$ te $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{z}$. Imamo

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* &= \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* \\
&< \lambda\mathbf{c}^T\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{c}^T\mathbf{z} \\
&= \mathbf{c}^T(\lambda\mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}),
\end{aligned}$$

što je u kontradikciji s (3.11).

Dokaz tvrdnje ii). Pretpostavimo da $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$ nije bazično dopustivo rješenje te dokažimo da $\mathbf{x}^*$ nije ekstremna točka poliedra. Kako $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$ nije bazično dopustivo rješenje, broj linearno nezavisnih vektora $\mathbf{a}_i$, $i \in I$, gdje je $I = \{i \in M_1 \cup M_2 : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* = b_i\}$ manji je od n. Dakle, potprostor razapet skupom vektora $\{\mathbf{a}_i : i \in I\}$ je pravi potprostor od $\mathbb{R}^n$ pa postoji vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ takav da je $\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = 0$ za svaki $i \in I$.

Neka je $\varepsilon > 0$. Definirajmo vektore $\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{d}$ te $\mathbf{z} = \mathbf{x}^* - \varepsilon\mathbf{d}$. Uočimo da za $i \in I$ vrijedi

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T(\mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{d}) = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* = b_i.$$

Ako je $i \notin I$, onda je $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* > b_i$ te

$$\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* + \varepsilon\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} > b_i + \varepsilon\mathbf{a}_i^T\mathbf{d}. \tag{3.12}$$

Pretpostavimo li da je $\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} \geq 0$, iz (3.12) slijedi da je $\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} > b_i$. Ako je s druge strane $\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} < 0$, odaberimo $\varepsilon > 0$ tako da je

$$\varepsilon < \frac{b_i - \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^*}{\mathbf{a}_i^T\mathbf{d}}.$$

Za tako odabrani $\varepsilon > 0$ i za $i \notin I$ vrijedi $\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} > b_i$. Zaključujemo da je $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$. Slično, može se pokazati da je $\mathbf{z} \in \mathcal{P}$.

Konačno, uočimo da je $\mathbf{x}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{y}+\mathbf{z})$, tj. $\mathbf{x}^*$ napisali smo kao konveksnu kombinaciju vektora $\mathbf{y}$ i $\mathbf{z}$, tj. $\mathbf{x}^*$ nije ekstremna točka poliedra $\mathcal{P}$.

Dokaz tvrdnje iii). Neka je $\mathbf{x}^*$ bazično dopustivo rješenje te $I = \{i : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* = b_i\}$ skup aktivnih indeksa u $\mathbf{x}^*$. Definirajmo vektor $\mathbf{c} = \sum_{i\in I} \mathbf{a}_i$. Pritom vrijedi

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = \sum_{i\in I} \mathbf{a}_i^T\mathbf{x}^* = \sum_{i\in I} b_i.$$

Za proizvoljni $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ imamo

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \sum_{i\in I} \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq \sum_{i\in I} b_i = \mathbf{c}^T\mathbf{x}^*, \tag{3.13}$$

odakle slijedi da je $\mathbf{x}^*$ rješenje problema linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min \\ \text{uz uvjet} & \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{P}. \end{aligned}$$

Pritom jednakost u (3.13) vrijedi onda i samo onda ako je $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$, za svaki $i \in I$. Kako je $\mathbf{x}^*$ bazično dopustivo rješenje, broj linearno nezavisnih vektora $\mathbf{a}_i$, $i \in I$ koji su aktivni u $\mathbf{x}^*$ jednak je n pa sustav $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$, $i \in I$ ima jedinstveno rješenje, a to je upravo $\mathbf{x}^*$.

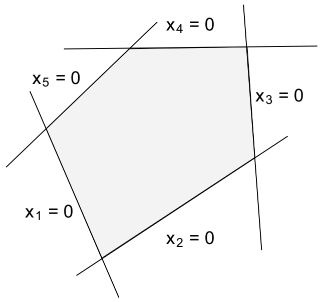
Na taj način dokazali smo da postoji vektor $\mathbf{c}$ takav da je $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* < \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ za svaki $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$, $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, odnosno da je $\mathbf{x}^*$ vrh poliedra $\mathcal{P}$. □

3.3 Geometrijski prikaz poliedra u standardnom obliku

U ovom kratkom odjeljku opisat ćemo mogući geometrijski prikaz poliedra u standardnom obliku. U tu svrhu pretpostavimo da je poliedar

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

zadan u standardnom obliku, pri čemu je $m \ll n$. Također pretpostavimo da je matrica $\mathbf{A}$ punog ranga, odnosno da je $\operatorname{rang}(\mathbf{A}) = m$. Poslije ćemo pokazati da ovo ograničenje ranga ne predstavlja smanjenje općenitosti. Sukladno definiciji poliedra u standardnom obliku, poliedar čini skup svih vektora $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ koji zadovoljavaju sustav jednadžbi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Geometrijski gledano to znači da skup svih rješenja sustava jednadžbi $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ razapinje $n - m$ dimenzionalni potprostor od $\mathbb{R}^n$. Ako je $n - m = 2$, onda poliedar možemo prikazati kao na Slici 3.5, pri čemu stranice poliedra odgovaraju uvjetima $x_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Ovakav geometrijski prikaz poliedra bit će koristan u vizualizaciji metode za rješavanje problema linearnog programiranja.



Slika 3.5: Prikaz poliedra u standardnom obliku za $n - m = 2$

3.4 Konstrukcija bazičnog dopustivog rješenja

Ako je $\mathbf{x}^*$ bazično dopustivo rješenje, onda $\mathbf{x}^*$ zadovoljava sustav linearnih jednadžbi

$$\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{b} \tag{3.14}$$

te uvjete nenegativnosti

$$\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}. \tag{3.15}$$

Uočimo da uvjeta nenegativnosti (3.15) ima n, dok sustav linearnih jednadžbi sadrži m jednadžbi. Prema definiciji bazičnog dopustivog rješenja treba postojati n linearno nezavisnih uvjeta, koji su aktivni u vektoru $\mathbf{x}^*$. To znači da moraju biti zadovoljeni svi uvjeti u (3.14), a da među uvjetima iz (3.15) treba biti $n - m$ aktivnih, odnosno da $n - m$ komponenti vektora $\mathbf{x}^*$ treba biti jednako 0.

Sljedećim primjerom ilustrirat ćemo moguću konstrukciju bazičnog dopustivog rješenja.

Primjer 3.5. *Neka je* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, *gdje su* $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ *i* $\mathbf{b} = [b_1, b_2]^T$ *te* $rang(\mathbf{A}) = 2$. *Odnosno,* $x \in \mathcal{P}$ *ako je*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Kako je ovdje $m = 2$ *te* $n = 3$ *u svrhu određivanja baznog dopustivog rješenja* $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^3$, *potrebno je* $n - m = 1$ *uvjet s nejednakosti učiniti aktivnim. Primjerice, stavimo da je* $x_1^* = 0$. *U tom slučaju ostale komponente vektora* $\mathbf{x}^* = [0, x_2^*, x_3^*]^T$ *moraju zadovoljavati sustav jednadžbi*

$$\begin{aligned} a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \end{aligned}$$

odakle uz pretpostavku da je matrica $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ *regularna, slijedi*

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Pokažimo da je ovako dobiveno rješenje bazično. U tu svrhu treba još dokazati da su tri vektora $[a_{11}, a_{12}, a_{13}]^T$, $[a_{21}, a_{22}, a_{23}]^T$ *te* $[1, 0, 0]^T$, *koji određuju aktivne uvjete linearno nezavisni. Primijetimo da ako vektor* $[1, 0, 0]^T$ *napišemo kao linearnu kombinaciju preostalih, dobivamo*

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} \\ 0 &= \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} \\ 0 &= \lambda_1 a_{13} + \lambda_2 a_{23}. \end{aligned}$$

Zbog regularnosti matrice $\mathbf{B}$ *slijedi* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, *odnosno vektori* $[a_{11}, a_{12}, a_{13}]^T$, $[a_{21}, a_{22}, a_{23}]^T$ *te* $[1, 0, 0]^T$ *su linearno nezavisni. To znači da je* $\mathbf{x}^* = [0, x_2^*, x_3^*]^T$ *bazično rješenje. Ako uz to vrijedi* $x_2^* \geq 0$ *te* $x_3^* \geq 0$, *onda je* $\mathbf{x}^* = [0, x_2^*, x_3^*]^T$ *bazično dopustivo rješenje.*

Prethodni primjer pokazuje da je regularnost matrice **B** bila ključna u konstrukciji bazičnog rješenja. Analognom analizom koju smo proveli u primjeru može se pokazati sljedeći općenitiji teorem.

Teorem 3.3. *Neka* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$*, gdje su* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$*,* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *te matrica* $\mathbf{A}$ *punog ranga. Vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *je bazično rješenje onda i samo onda ako je* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *te ako postoje indeksi* $B(1), \ldots, B(m)$ *takvi da vrijedi*

a) Stupci $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$ *matrice* $\mathbf{A}$ *su linearno nezavisni.*

b) Ako je $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$*, onda je* $x_i = 0$*.*

Na osnovi prethodnog teorema proizlazi postupak za konstrukciju bazičnog rješenja.

Postupak za konstrukciju bazičnog rješenja

1. Odabrati m linearno nezavisnih stupaca $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$ matrice $\mathbf{A}$.

2. Staviti $x_i = 0$ za svaki indeks $i \notin \{B(1), \ldots, B(m)\}$.

3. Riješiti sustav $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$, gdje su

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{B(1)} & \mathbf{A}_{B(2)} & \cdots & \mathbf{A}_{B(m)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_{B(1)} \\ \vdots \\ x_{B(m)} \end{bmatrix}.$$

4. Vektor $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ sa svojstvom

$$x_j = \begin{cases} 0, & j \notin \{B(1), \ldots, B(m)\} \\ x_{B(i)}, & j = B(i) \end{cases}$$

je bazično rješenje.

Pri tome $x_{B(1)}, \ldots, x_{B(m)}$ zovemo **bazične varijable**, vektore $\mathbf{A}_{B(1)}, \mathbf{A}_{B(2)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}$ zovemo **bazični vektori**, $B(1), \ldots, B(m)$ zovemo **bazični indeksi**, dok matricu $\mathbf{B}$ zovemo **matrica baze**. Ako bazično rješenje $\mathbf{x}$ ima svojstvo $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, onda je $\mathbf{x}$ bazično dopustivo rješenje.

Primjer 3.6. *Zadan je poliedar u standardnom obliku* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7 : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$*, gdje su*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

i) Uočimo da su stupci $\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6$ *i* $\mathbf{A}_7$ *matrice* $\mathbf{A}$ *linearno nezavisni te ih možemo odabrati za bazične vektore. U svrhu određivanja bazičnog rješenja definiramo matricu baze*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

te rješavamo sustav $\mathbf{B}\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$*, odakle je* $\mathbf{x}_B = \mathbf{b} = [1,2,3,4]^T$*, odnosno* $\mathbf{x} = [0,0,0,1,2,3,4]^T$ *je bazično rješenje. Također, zbog* $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$*, vektor* $\mathbf{x}$ *je bazično dopustivo rješenje.*

ii) Stupci $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_5, \mathbf{A}_6$ *i* $\mathbf{A}_7$ *su linearno nezavisni te ih također možemo odabrati za bazične vektore. Pri tome pripadna matrica baze glasi*

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle slijedi da je $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = [-1,2,6,4]^T$*, odnosno bazično rješenje je* $\mathbf{x} = [-1,0,0,0,2,6,4]^T$*. Uočimo da* $\mathbf{x}$ *nije bazično dopustivo rješenje.*

Može se pokazati da u zapisu poliedra u standardnom obliku

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m,$$

pretpostavka da je $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$, nije ograničenje. Preciznije, može se dokazati sljedeći teorem.

Teorem 3.4. *Neka je* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *neprazni poliedar pri čemu su* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$*. Pretpostavimo da su* $\mathbf{a}_i^T$, $i = 1, \ldots, m$ *redci matrice* $\mathbf{A}$*, rang*$(\mathbf{A}) = k < m$ *te da su redci* $\mathbf{a}_{i_j}^T$, $j = 1, \ldots, k$ *linearno nezavisni. Neka je*

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_{i_1}^T \mathbf{x} = b_{i_1}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}^T \mathbf{x} = b_{i_k}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

poliedar u $\mathbb{R}^n$*. Onda je* $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$*.*

3.5 Degeneracija

Podsjetimo se definicije baziČnog rješenja. Ako je $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, i \in M_1, \mathbf{a}_i^T x = b_i, i \in M_2\}$ poliedar, onda za vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je bazično rješenje ako

i) su svi uvjeti iz $\mathcal{P}$ koji sadrže jednakosti aktivni u $\mathbf{x}$,

ii) skup vektora $\mathbf{a}_i$, koji određuju aktivne uvjete u $\mathbf{x}$ sadrži n linearno nezavisnih vektora.

Primijetimo da se za bazično rješenje $\mathbf{x}$ može dogoditi situacija u kojoj skup vektora $\mathbf{a}_i$ koji određuju aktivne uvjete sadrži više od n vektora, samo što ih točno n mora biti linearno nezavisnih. Za takvu situaciju uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 3.11. *Neka je $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i, i \in M_1, \mathbf{a}_i^T x = b_i, i \in M_2\}$ neprazan. Za bazično rješenje $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kažemo da je* ***degenerativno*** *ako je više od n uvjeta aktivno u $\mathbf{x}$.*

Primjer 3.7. *Neka je poliedar $\mathcal{P}$ zadan sa sljedećim uvjetima*

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\leq 6 && (3.16)\\
x_2 - x_3 &\geq 0 && (3.17)\\
x_1 &\geq 0 && (3.18)\\
x_2 &\geq 0. && (3.19)\\
x_3 &\geq 0. && (3.20)
\end{aligned}
$$

a) *Uočimo da je vektor $\mathbf{x}^* = [0,6,6]^T$ bazično dopustivo rješenje. Naime, uvjeti (3.16), (3.17) i (3.18) aktivni su u $\mathbf{x}^*$ i ima ih točno tri. Pri tome su odgovarajući vektori linearno nezavisni. Osim toga vektor $\mathbf{x}^*$ zadovoljava sve uvjete. Dakle, vektor $\mathbf{x}^*$ je nedegenerativno bazično dopustivo rješenje.*

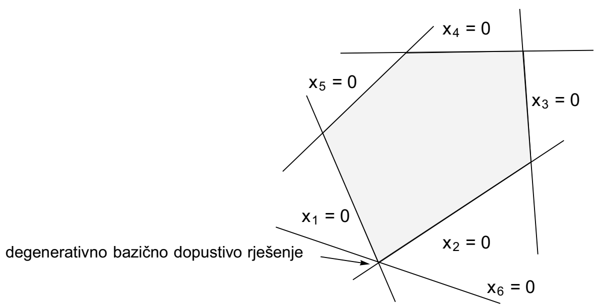
b) *Vektor $\mathbf{x}^* = [6,0,0]$ je također bazično dopustivo rješenje, jer su uvjeti (3.16), (3.17) i (3.19) aktivni u $\mathbf{x}^*$. Pripadni vektori su linearno nezavisni. Također, uočimo da vektor $\mathbf{x}^*$ zadovoljava sve uvjete te je stoga bazično dopustivo rješenje. Međutim, lako se vidi da je i uvjet (3.20) također aktivan u $\mathbf{x}^*$, odakle slijedi da postoje četiri aktivna uvjeta u $\mathbf{x}^*$, odnosno da je $\mathbf{x}^*$ degenerativno bazično dopustivo rješenje.*

Posebno definiramo pojam degeneracije za poliedar u standardnom obliku.

Definicija 3.12. *Neka je*

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},\ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$$

poliedar u standardnom obliku te neka je $\mathbf{x}$ *bazično rješenje. Vektor* $\mathbf{x}$ *je* ***degenerativno bazično rješenje*** *ako je više od* $n - m$ *komponenti vektora* $\mathbf{x}$ *jednako 0.*



Slika 3.6: Degenerativno bazično dopustivo rješenje kod poliedra u standaradnom obliku za $n - m = 2$

Primjer 3.8. *Zadan je poliedar u standardnom obliku* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$*, gdje su*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da za bazične stupce možemo odabrati vektore $\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_5$*. Odgovarajuće bazično rješenje (koje je ujedno i dopustivo) glasi* $\mathbf{x} = [0,0,0,6,0]^T$*. Kako je* $n - m = 3$ *a* 4 *komponente vektora* $\mathbf{x}$ *su jednake* 0*, slijedi da je* $\mathbf{x}$ *degenerativno bazično dopustivo rješenje.*

Primjer 3.9. *Zadan je poliedar* $\mathcal{P} = \{[x_1, x_2, x_3]^T : x_1 + x_2 = 6, x_2 - x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$ *u standardnom obliku. Uočimo da je* $m = 2$ *i* $n = 3$*, te* $n - m = 1$*. Odredimo sva bazična dopustiva rješenja. Odgovarajuća matrica* $\mathbf{A}$ *i vektor* $\mathbf{b}$ *glase*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = [6,0]^T.$$

Imamo tri mogućnosti:

a) *Ako je* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$*, onda je bazično dopustivo rješenje* $\mathbf{x} = [6,0,0]^T$*, koje je degeneritvno.*

b) *Ako je* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$*, onda je bazično dopustivo rješenje opet* $\mathbf{x} = [6,0,0]^T$*, koje je degenerativno.*

c) *Ako je* $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$*, onda je bazično dopustivo rješenje* $\mathbf{x} = [0,6,6]^T$*, koje je nedegenerativno.*

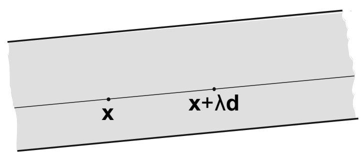
Primijetimo da poliedar $\mathcal{P}$ *možemo zapisati na sljedeći način*

$$\mathcal{P} = \{[x_1, x_2, x_3]^T : x_1 + x_2 = 6, x_2 - x_3 = 0, x_1, x_3 \geq 0\}.$$

Vektor $\mathbf{x}^* = [6,0,0]^T$ *u ovom zapisu poliedra postaje nedegenerativno bazično dopustivo rješenje. Zaključujemo da svojstvo degenerativnosti ovisi o zapisu poliedra.*

3.6 Egzistencija ekstremne točke

Definicija 3.13. *Kažemo da poliedar* $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ ***sadrži pravac*** *ako postoji vektor* $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ *te vektor* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *takav da je* $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d} \in \mathcal{P}$ *za svaki realni broj* λ*.*



Slika 3.7: Poliedar koji sadrži pravac

Teorem 3.5. *Neka je* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1,\ldots,m\}$ *neprazan. Onda su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

a) *Poliedar* $\mathcal{P}$ *ima barem jednu ekstremnu točku.*

b) *Poliedar* $\mathcal{P}$ *ne sadrži pravac.*

c) *Među vektorima* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *ima n linearno nezavisnih.*

Dokaz. Konstrukcija dokaza je takva da pokazujemo tri implikacije $b) \Rightarrow a)$, $a) \Rightarrow c)$ i $c) \Rightarrow b)$.

Ako poliedar $\mathcal{P}$ ne sadrži pravac, onda poliedar $\mathcal{P}$ ima barem jednu ekstremnu točku.

Pretpostavimo da poliedar $\mathcal{P}$ ne sadrži pravac. Neka je $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ te $I = \{i : \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i\}$, skup indeksa uvjeta koji su aktivni u vektoru $\mathbf{x}$. Ako među vektorima $\mathbf{a}_i$, $i \in I$ ima n linearno nezavisnih, onda je prema definiciji $\mathbf{x}$ bazično dopustivo rješenje, odnosno ekstremna točka poliedra $\mathcal{P}$ te smo prema tome pokazali da poliedar $\mathcal{P}$ ima ekstremnu točku.

Nadalje pretpostavimo da među vektorima $\mathbf{a}_i$, $i \in I$ ima k, $k < n$ linearno nezavisnih. Onda vektori $\mathbf{a}_i$, $i \in I$ razapinju pravi potprostor od $\mathbb{R}^n$ pa postoji vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ takav da je $\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = 0$, $i \in I$. Promatrajmo pravac $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$, gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$. Pokažimo da svi uvjeti koji su aktivni u vektoru $\mathbf{x}$ ostaju aktivni i u vektoru $\mathbf{y}$ koji leži na pravcu $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}$. Zaista

$$\mathbf{a}_i^T(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{d}) = \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = b_i,\ i \in I.$$

S obzirom na to da prema pretpostavci poliedar $\mathcal{P}$ ne sadrži pravac, postoji $\lambda^* \in \mathbb{R}$ te indeks $j \notin I$, takav da je $\mathbf{a}_j^T(\mathbf{x} + \lambda^*\mathbf{d}) = b_j$. Na taj način odredili smo uvjet koji je aktivan u vektoru $\mathbf{x} + \lambda^*\mathbf{d}$. Kako $j \notin I$, vrijedi $\mathbf{a}_j^T\mathbf{x} \neq b_j$ te je stoga $\mathbf{a}_j^T\mathbf{d} \neq 0$. Dokažimo da vektor $\mathbf{a}_j$ ne možemo napisati kao linearnu kombinaciju vektora $\mathbf{a}_i$, $i \in I$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoje skalari $\lambda_i \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{a}_i,$$

odnosno $0 \neq \mathbf{a}_j^T\mathbf{d} = \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{a}_i^T\mathbf{d} = 0$, odakle slijedi da su vektori $\mathbf{a}_j$ te $\mathbf{a}_i$, $i \in I$ linearno nezavisni.

Zaključujemo da postoji $k + 1$ linearno nezavisnih vektora koji određuju aktivne uvjete u vektoru $\mathbf{x} + \lambda^*\mathbf{d}$. Opisani postupak nastavljamo dok ne dođemo do vektora $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$ koji ima svojstvo da postoji n linearno nezavisnih vektora koji određuju aktivne uvjete u vektoru $\mathbf{x}^*$. Dobiveni vektor $\mathbf{x}^*$ je bazično dopustivo rješenje ili ekstremna točka poliedra.

Ako poliedar $\mathcal{P}$ ima barem jednu ekstremnu točku, onda među vektorima $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ ima n linearno nezavisnih.

Ova tvrdnja slijedi direktno iz ekvivalentnosti ekstremne točke i bazičnog dopustivog rješenja.

Ako među vektorima $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ ima n linearno nezavisnih, onda poliedar $\mathcal{P}$ ne sadrži pravac.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ linearno nezavisni vektori. Pretpostavimo da poliedar $\mathcal{P}$ sadrži pravac, odnosno da postoji vektor $\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$ takav da je $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d} \in \mathcal{P}$, za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$, odnosno da je $\mathbf{a}_i^T(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d}) \geq b_i$ za svaki $i = 1, \ldots, n$ te svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Kako je $(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) + \lambda \mathbf{a}_i^T \mathbf{d} \geq 0$ za svaki $i = 1, \ldots, n$ i svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ zaključujemo da je $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} = 0$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. (Kad bi bilo $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} < 0$, onda nejednakost $(\mathbf{a}_i^T \mathbf{x} - b_i) + \lambda \mathbf{a}_i^T \mathbf{d} \geq 0$ ne bi bila zadovoljena za veliki λ. Isto tako za $\mathbf{a}_i^T \mathbf{d} > 0$ navedena nejdnakost ne bi bila zadovoljena za po apsolutnoj vrijednosti velike $\lambda < 0$). S obzirom da su vektori $\mathbf{a}_i$, $i = 1, \ldots, n$ linearno nezavisni slijedi $\mathbf{d} = \mathbf{0}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da poliedar $\mathcal{P}$ sadrži pravac. □

Sljedeći teorem pokazat će da ako problem linearnog programiranja ima rješenje te ako odgovarajući poliedar ima ekstremnu točku, onda optimalno rješenje problema linearnog programiranja treba tražiti među ekstremnim točkama poliedra.

Teorem 3.6. *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T \mathbf{x} & \to & \min\limits_{\mathbf{x}} \\ \textit{uz uvjet} & & \\ \mathbf{x} & \in & \mathcal{P}, \end{array}$$

gdje je $\mathcal{P}$ poliedar. Pretpostavimo da $\mathcal{P}$ ima barem jednu ekstremnu točku te da problem linearnog programiranja ima optimalno rješenje. Onda postoji optimalno rješenje problema linearnog programiranja koje je ekstremna točka poliedra $\mathcal{P}$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{Q}$ skup svih optimalnih rješenja problema linearnog programiranja. Sukladno pretpostavci $\mathcal{Q} \neq \emptyset$. Pretpostavimo da je poliedar $\mathcal{P}$ oblika

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}.$$

Također pretpostavimo da je optimalna vrijednost funkcije cilja jednaka v. U tom je slučaju $\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{c}^T \mathbf{x} = v\}$. Nije teško vidjeti da je $\mathcal{Q}$ također poliedar. Očigledno je $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$. Kako prema pretpostavci $\mathcal{P}$ ima ekstremnu točku, sukladno Teoremu 3.5, $\mathcal{P}$ ne sadrži pravac pa ni $\mathcal{Q}$ također ne sadrži pravac. Zaključujemo da $\mathcal{Q}$ ima ekstremnu točku. Neka je $\mathbf{x}^*$ ekstremna točka od $\mathcal{Q}$. Dokažimo da je $\mathbf{x}^*$ ujedno ekstremna točka od $\mathcal{P}$. Pretpostavimo suprotno tj. da postoje vektori $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{x}^*$ te $\lambda \in [0, 1]$ takvi da je $\mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z}$. Onda je

$$v = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \lambda \mathbf{c}^T \mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{c}^T \mathbf{z}. \tag{3.21}$$

Kako je v optimalna vrijednost funkcije cilja slijedi da je $\mathbf{c}^T \mathbf{y} \geq v$ te $\mathbf{c}^T \mathbf{z} \geq v$, što zajedno s (3.21) povlači da je $\mathbf{c}^T \mathbf{y} = \mathbf{c}^T \mathbf{z} = v$, odnosno da su $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{Q}$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je $\mathbf{x}^*$ ekstremna točka poliedra $\mathcal{Q}$. $\square$

Može se pokazati općenitija tvrdnja (vidi primjerice [2]).

Teorem 3.7. *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \textit{uz uvjet} & \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{P}, \end{aligned}$$

gdje je $\mathcal{P}$ poliedar. Pretpostavimo da $\mathcal{P}$ ima barem jednu ekstremnu točku. Onda je vrijednost funcije cilja jednaka $-\infty$ ili postoji ekstremna točka poliedra koja je optimalna.

3.7 Naivna metoda za rješavanje problema linearnog programiranja

Ako pretpostavimo da problem linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \end{aligned}$$

ima optimalno rješenje, onda je u svrhu njegovog određivanja sukladno Teoremu 3.6 dovoljno odrediti skup svih ekstremnih točaka poliedra $\mathcal{P}$. Ako je skup ekstremnih točaka neprazan, optimalno rješenje problema linearnog programiranja odgovarat će onoj ekstremnoj točki za koju je vrijednost funkcije cilja najmanja. Kako je broj mogućih baznih rješenja poliedra u najlošijem slučaju jednak je $\binom{n}{m}$, odmah je jasno da ovakav način rješavanja problema linearnog programiranja u praktičnim situacijama nije efikasan.

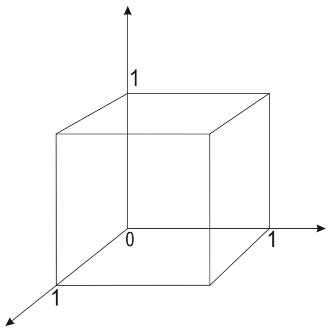
Primjer 3.10. *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \textit{uz uvjet} & \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^{2n} : x_j + x_{n+j} = 1,\ j = 1, \ldots, n, x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 2n\}. \end{aligned}$$

Uočimo da je poliedar $\mathcal{P}$ napisan u standardnom obliku. U najlošijem slučaju broj njegovih ektremnih točaka jednak je $\binom{2n}{n}$. Nije teško vidjeti da je poliedar $\mathcal{P}$ nastao tako što smo poliedar

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \leq 1, x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$$

zapisali u standardnom obliku. Uočimo da je poliedar $\mathcal{Q}$ jedinična hiperkocka s jednim vrhom u ishodištu. Broj njegovih ekstremnih točaka jednak je 2^n, što je značajno manje od spomenutog najlošijeg broja ekstremnih točaka koji iznosi $\binom{2n}{n}$. Neovisno o tome, u svrhu određivanja optimalnog rješenja problema linearnog programiranja potrebno je izvršiti velik broj izračunavanja vrijednosti funkcije cilje, koji je eksponencijalna funkcija dimenzije prostora u kome se nalazi poliedar $\mathcal{Q}$.



Slika 3.8: Poliedar $\mathcal{Q}$ za $n = 3$

3.8 Zadaci

Zadatak 3.1. *a) Neka su $f_1, \dots, f_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ konveksne funkcije. Dokažite da je tada i funkcija $f(\mathbf{x}) = \max_{i=1,\dots,n} \{f_i(\mathbf{x})\}$ konveksna.*

b) Neka je $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna monotono rastuća funkcija. Dokažite da je tada i funkcija $f = g \circ h$ konveksna.

c) Neka su f_i, $i = 1, \dots, n$ konveksne funkcije i $c_1, \dots, c_n \leq 0$. Dokažite da je tada funkcija $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\mathbf{x})$ konkavna.

d) Dokažite da je funkcija $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{[1]} + \mathbf{x}_{[2]} + \cdots + \mathbf{x}_{[r]}, \quad r < n$$

gdje je $\mathbf{x}_{[i]}$ i-ta najveća komponenta od $\mathbf{x}$, konveksna.

Rješenje.

a) Neka su $f_1, \dots, f_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksne funkcije. Tada je

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \max_{i=1,\dots,n} \{f_i(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})\} \\ &\leq \max_{i=1,\dots,n} \{\lambda f_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f_i(\mathbf{y})\} \\ &\leq \lambda \max_{i=1,\dots,n} f_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda) \max_{i=1,\dots,n} f_i(\mathbf{y}) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

pri čemu prva nejednakost slijedi iz konveksnosti funkcija f_i.

b) Neka je $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konveksna monotono rastuća funkcija. Tada je

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= g(h(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \\ &\leq g(\lambda h(\mathbf{x}) + (1-\lambda) h(\mathbf{y})) \\ &\leq \lambda g(h(\mathbf{x})) + (1-\lambda) g(h(\mathbf{y})) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

pri čemu prva nejednakost slijedi iz konveksnosti funkcije h i monotonosti funkcije g, a druga nejednakost iz konveksnosti funkcije g.

c) Neka su $f_1, \dots, f_n$ konveksne funkcije i $c_1, \dots, c_n \leq 0$. Onda je

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^{n} c_i f_i(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} c_i (\lambda f_i(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f_i(\mathbf{y})) \\ &= \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda) f(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

pri čemu prva nejednakost slijedi iz konveksnosti funkcija f_i i $c_1, \dots, c_n \leq 0$.

d) Primijetimo

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}_{[1]} + \mathbf{x}_{[2]} + \cdots + \mathbf{x}_{[r]} \\ &= \max\{\mathbf{x}_{i_1} + \mathbf{x}_{i_2} + \cdots + \mathbf{x}_{i_r} : 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\}. \end{aligned}$$

Sada tvrdnja slijedi direktno iz a).

Zadatak 3.2. *Neka su $f_1, \dots, f_n$ funkcije s $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$ i neka je $f = \sum_{i=1}^n f_i$.*

a) Ako su funkcije f_i, $i = 1, \dots, n$ konveksne, dokažite da je tada i f konveksna.

b) Ako su funkcije f_i, $i = 1, \dots, n$ konkavne, dokažite da je tada i f konkavna.

c) Dokažite da obrati tvrdnji a) i b) ne vrijede.

Zadatak 3.3. *Neka je S konveksan skup i $f : S \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dokažite da je $f(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$, $\forall \lambda \in (0,1)$ ako i samo ako je skup $S_\alpha = \{\mathbf{x} \in S\colon f(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ konveksan za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Rješenje. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_\alpha$. Tada vrijedi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ i $f(\mathbf{x}) \leq \alpha, f(\mathbf{y}) \leq \alpha$, pa onda i $\max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\} \leq \alpha$. Neka je $\lambda \in (0,1)$ i $\mathbf{z} = \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}$. Kako je S konveksan, slijedi da je $\mathbf{z} \in S$ i $f(\mathbf{z}) \leq \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\} \leq \alpha$, što nadalje znači da je $\mathbf{z} \in S_\alpha$, odnosno da je S_α konveksan skup.
Obratno, neka je S_α konveksan za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$. Neka su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ i $\lambda \in (0,1)$ te $\alpha = \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$. Tada su $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S_\alpha$, a onda je i $\mathbf{z} \in S_\alpha$, pa je $f(\mathbf{z}) \leq \max\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$.

Zadatak 3.4. *Dokažite da je jedinična kugla u svakoj normi konveksan skup.*

Zadatak 3.5. *Neka su $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ te $\mathbf{b} = [3,4]^T$. Pokažite da je funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadana formulom $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$ konveksna na $\mathbb{R}^2$. Odredite točku u kojoj se postiže globalni minimum funkcije f. (Koristite karakterizaciju diferencijabilne konveksne funkcije.)*

Rješenje. Budući da je $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ i $\nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}$, slijedi da je f konveksna ako i samo ako je $\mathbf{A}$ pozitivno semidefinitna matrica.

Kako je $k_A(\lambda) = (\lambda - 8)(\lambda - 10)$, tj. svojstvene vrijednosti od $\mathbf{A}$ su nenegativne, f je konveksna. Nadalje, izjednačavanjem $\nabla f(\mathbf{x}) = 0$, dobivamo $\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = [23/80, 33/80]^T$. Kako je f konveksna, $\mathbf{x}^*$ je točka globalnog minimuma.

Zadatak 3.6. *Neka je $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^n$ poliedar. Dokažite da niti jedna točka $\mathbf{x} \in \operatorname{int}\mathcal{P}$ ne može biti ekstremna točka poliedra.*

Rješenje. Neka je $\mathbf{x} \in \operatorname{int}\mathcal{P}$. Tada $\exists \delta > 0$ tako da $\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta \Rightarrow \mathbf{y} \in \mathcal{P}$. Neka je $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u}\| = 1$, te $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \frac{\delta}{2}\mathbf{u}$, $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \frac{\delta}{2}\mathbf{u}$. Tada su $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{P}$ i $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{z}$, no to znači da $\mathbf{x}$ ne može biti ekstremna točka poliedra.

Zadatak 3.7. *Zadan je poliedar u standardnom obliku* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7 \colon \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$*, gdje su*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 22 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite tri različita bazična rješenja i za svako provjerite je li vrh poliedra $\mathcal{P}$.

Zadatak 3.8. *Zadan je poliedar*

$$\mathcal{P} = \{[x_1, x_2, x_3]^T : x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$$

Odredite sva bazična rješenja i navedite bazična dopustiva rješenja koja su degenerativna. Zapišite poliedar $\mathcal{P}$ *u obliku u kojemu neće biti degenerativnih baznih dopustivih rješenja.*

Rješenje. $[0, 0, 1/2]$ je degenerativno bazično dopustivo rješenje. Ako poliedar zapišemo u obliku

$$\mathcal{P} = \{[x_1, x_2, x_3]^T : x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, x_1, x_3 \geq 0\},$$

onda nema degenerativnih baznih dopustivih rješenja.

Zadatak 3.9. *Zadan je poliedar*

$$\mathcal{P} = \{[x_1, x_2, x_3]^T : x_1 + x_2 = 4, x_1 - x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$$

Odredite sva bazična rješenja i navedite bazična dopustiva rješenja koja su degenerativna. Dokažite da poliedar $\mathcal{P}$ *ne sadrži pravac.*

Rješenje. Sva bazična rješenja su $\mathbf{x}_1 = [0, 4, 0]^T$ i $\mathbf{x}_2 = [4, 0, 4]^T$. Degenerativno je $\mathbf{x}_1$.

Zadatak 3.10. *Neka je* $\mathcal{P}$ *omeđen poliedar u* $\mathbb{R}^n$*, te* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ *i* $b \in \mathbb{R}$. *Neka je poliedar* $\mathcal{Q}$ *definiran na sljedeći način:*

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P} : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b\}.$$

Dokažite da je svaka ekstremna točka poliedra $\mathcal{Q}$ *ili ekstremna točka od* $\mathcal{P}$ *ili konveksna kombinacija dviju susjednih ekstremnih točki od* $\mathcal{P}$.

POGLAVLJE 4

Simpleks–metoda

4.1 Simpleks–metoda

Pretpostavimo da je zadan problem linearnog programiranja u standardnom obliku

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjete} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ te $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Sukladno Teoremu 3.7, optimalno rješenje problema linearnog programiranja treba tražiti među bazičnim dopustivim rješenjima poliedra $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Kako je funkcija cilja $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ konveksna na $\mathbb{R}^n$, a poliedar $\mathcal{P}$ konveksan skup, svaka točka u kojoj se postiže lokalni minimum funkcije f ujedno je točka u kojoj se postiže globalni minimum funkcije f. U ovom poglavlju analizirat ćemo jednu metodu za traženje lokalnog minimuma funkcije f na skupu $\mathcal{P}$, u literaturi poznatu pod nazivom **simpleks–metoda**. Odmah na početku navodimo osnovni oblik algoritma na kojem je zasnovana simpleks–metoda.

Algoritam - simpleks metoda

1. Odabrati jedno bazično dopustivo rješenje poliedra $\mathcal{P}$.

2. `repeat`

   provjeriti sve bridove poliedra $\mathcal{P}$ koji izlaze iz odabranog bazičnog dopustivog rješenja;

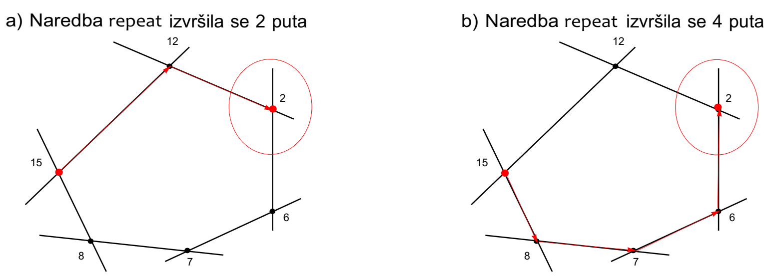
      `if` postoji brid po kojem se može smanjiti vrijednost funkcije cilja, "krećemo se" po tom bridu dok se ne dođe do sljedećeg bazičnog dopustivog rješenja. Ako takvo sljedeće bazično dopustivo rješenje ne postoji, poliedar je neomeđen i vrijednost funkcije cilja je $-\infty$.

      `else`

         `return` bazično dopustivo rješenje je optimalno

   `forever`

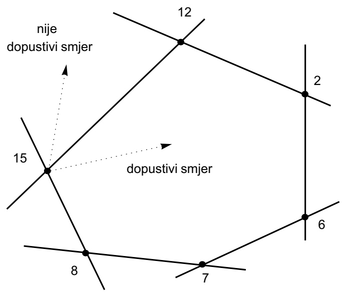
Na Slici 4.2 prikazan je primjer poliedra u slučaju $n - m = 2$. Pored vrhova poliedra navedene su vrijednosti funkcije cilja u tim vrhovima. Pretpostavimo da smo krenuli od vrha u kojemu je vrijednost funkcije cilja jednaka 15. Na slici su prikazane dvije strategije kretanja koje dovode do istog optimalno dopustivog rješenja, ali s bitno drukčijim brojem koraka. U cilju formaliziranja strategije



Slika 4.1: Grafički prikaz iteracija simpleks–metode

kretanja uvodimo sljedeću definiciju.

Definicija 4.1. *Neka je* $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. *Za vektor* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ *kažemo da je* ***dopustivi smjer*** *u vektoru* $\mathbf{x}$ *ako postoji* $\theta > 0$ *takav da je* $\mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \in \mathcal{P}$.



Slika 4.2: Dopustivi smjer

Neka je $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ bazično dopustivo rješenje poliedra $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ te neka su pri tome $B(1), \ldots, B(m)$ indeksi bazičnih varijabli gdje je

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}]$$

matrica baze. Pritom odgovarajući bazični dio vektora $\mathbf{x}$ glasi $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, dok za nebazični dio vektora $\mathbf{x}$ vrijedi $x_i = 0$ za svaki $i \in N := \{1, \ldots, n\} \setminus \{B(1), \ldots, B(m)\}$.

Pretpostavimo da se od bazičnog dopustivog rješenje želimo pomaknuti u novu točku oblika $\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}$, $\theta > 0$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ i to tako da zadovoljimo sljedeća dva uvjeta:

1. **uvjet optimalnosti:** $\mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) < \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, kojim osiguravamo smanjenje vrijednosti funkcije cilja

2. **uvjet dopustivosti:** $\mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \in \mathcal{P}$, kojim osiguravamo ostanak u poliedru.

Pozitivan broj $\theta > 0$ zvat ćemo **duljina koraka**, a vektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ **vektor smjera**.

Radi konstrukcije vektora smjera $\mathbf{d}$ odaberimo jednu nebazičnu varijablu x_j, $j \in N$. Definirajmo vektor smjera $\mathbf{d} = [d_1, \ldots, d_n]^T$ na sljedeći način: za $j-$tu komponentu vektora $\mathbf{d}$ stavimo $d_j = 1$, dok za svaki $i \in N \setminus \{j\}$ stavimo $d_i = 0$. Bazični dio vektora $\mathbf{d}$ označimo s $\mathbf{d}_B = [d_{B(1)}, \ldots, d_{B(m)}]^T$, a odredit ćemo ga iz uvjeta dopustivosti, odnosno tako da vrijedi $\mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \in \mathcal{P}$, tj. $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) = \mathbf{b}$, odakle slijedi $\mathbf{A}\mathbf{x} + \theta\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{b}$. Konačno dobivamo

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}. \tag{4.1}$$

Zapišemo li matricu $\mathbf{A}$ u obliku $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n]$, sustav (4.1) glasi:

$$\mathbf{A}\mathbf{d} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{A}_i d_i = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{A}_{B(i)} d_{B(i)} + \mathbf{A}_j = \mathbf{0},$$

odakle je $\mathbf{B}\mathbf{d}_B + \mathbf{A}_j = \mathbf{0}$, odnosno $\mathbf{d}_B = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$. Osim toga, vektor $\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}$ mora zadovoljavati i uvjet nenegativnosti. Kako bismo provjerili uvjet nenegativnosti, posebno ćemo analizirati dvije mogućnosti:

a) $\mathbf{x}$ je nedegenerativno bazično dopustivo rješenje, onda je točno $(n - m)$ komponenti vektora $\mathbf{x}$ jednako 0, te za nebazični dio vektora $\mathbf{x}$ vrijedi $x_i + \theta d_i = 0$ za $i \in N \setminus \{j\}$, te $x_j + \theta d_j = \theta > 0$.

   Za bazični dio vektora vrijedi $x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} > 0$. Zaista, kako je $x_{B(i)} > 0$, neovisno o predznaku od $d_{B(i)}$ za $\theta > 0$ možemo odabrati dovoljno mali broj takav da je $x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} > 0$.

b) $\mathbf{x}$ je degenerativno bazično dopustivo rješenje, onda za nebazični dio vektora $\mathbf{x}$ vrijedi $x_i + \theta d_i = 0$ za $i \neq j$, $i \in N \setminus \{j\}$, te $x_j + \theta d_j = \theta > 0$.

   U bazičnom dijelu vektora $\mathbf{x}$ postoji i takav da je $x_{B(i)} = 0$. Ako je pri tome $d_{B(i)} < 0$, onda ne možemo odabrati $\theta > 0$ tako da bude $x_{B(i)} + \theta d_{B(i)} > 0$. Ovom problemu vratit ćemo se poslije i pokazati kako izbjeći ovakvu situaciju.

Za sad u nastavku pretpostavljamo da je $\mathbf{x}$ nedegenarativno bazično dopustivo rješenje.

Uočimo da smo u postupku konstrukcije vektora smjera $\mathbf{d}$ te odgovarajuće duljine koraka do sad uzimali u obzir isključivo uvjet dopustivosti. S druge strane ostala je slobodna mogućnost izbora nebazične varijable x_j. Nebazičnu varijablu x_j, odnosno njezin odgovarajući indeks j, odredit ćemo iz uvjeta optimalnosti, tj. tako da vrijedi $\mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) < \mathbf{c}^T\mathbf{x}$, odakle je $\theta\mathbf{c}^T\mathbf{d} < 0$ te konačno $\mathbf{c}^T\mathbf{d} < 0$. Vrijedi

$$\mathbf{c}^T\mathbf{d} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{d}_B + c_j = c_j - \mathbf{c}_B^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j),$$

gdje je $\mathbf{c}_B = [c_{B(1)}, \ldots, c_{B(m)}]^T$. Označimo s $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^T(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j)$. Broj $\bar{c}_j$ zovemo **utjecaj nebazične varijable**[1] x_j. Prirodno proizlazi da nebazičnu varijablu x_j treba odabrati tako da za odgovarajući utjecaj vrijedi $\bar{c}_j < 0$.

[1] U literaturi na hrvatskom govornom području za utjecaj varijable često se koristi i pojam *indikator*.

Primjer 4.1. *Zadan je problem linearnog programiranja u standardnom obliku*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min_{\mathbf{x}} \\ \textit{uz uvjete} & \\ 2x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Za matricu baze odaberemo

$$\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_3] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pritom su varijable x_2 i x_4 nebazične te je $x_2 = x_4 = 0$. Bazični dio vektora $\mathbf{x}$ određujemo rješavanjem sustava

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

odakle su $x_1 = x_3 = 1 > 0$ bazične varijable. Uočimo da je vektor $\mathbf{x} = [1, 0, 1, 0]^T$ nedegenerativno bazično dopustivo rješenje.

Odaberimo za $j = 2$, tj. neka je odabrana nebazična varijabla x_2. Odgovarajući vektor smjera $\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3, d_4]^T$ ima svojstvo da je $d_2 = 1$, $d_4 = 0$, dok bazični dio vektora $\mathbf{d}$ dobivamo iz

$$\mathbf{d}_B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_2 = -\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Pritom utjecaj varijable x_2 iznosi

$$\bar{c}_2 = \mathbf{c}^T\mathbf{d} = -\frac{1}{2}c_1 + c_2 - \frac{3}{2}c_3.$$

Ako su primjerice $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, onda je $\bar{c}_2 = -1$ pa nebazična varijabla x_2 predstavlja dobar izbor. Ako su primjerice $c_1 = c_3 = 1$ i $c_2 = 3$, onda je $\bar{c}_2 = 1$, te stoga nebazična varijabla x_2 nije dobar izbor.

Preostaje vidjeti koliko iznosi utjecaj bazičnih varijabli. Vrijedi

$$\bar{c}_{B(i)} = c_{B(i)} - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)} = c_{B(i)} - \mathbf{c}_B^T\mathbf{e}_i = c_{B(i)} - c_{B(i)} = 0.$$

Definicija 4.2. *Vektor $\bar{\mathbf{c}} \in \mathbf{R}^n$ čije su komponente utjecaji varijabi $x_1, \ldots, x_n$ zovemo* ***vektor utjecaja****.*

Sljedeći teorem daje vezu između vektora utjecaja i karakterizacije optimalnog rješenja.

Teorem 4.1. *Neka je* $\mathbf{x}$ *bazično dopustivo rješenje, a* $\mathbf{B}$ *odgovarajuća matrica baze i* $\bar{\mathbf{c}}$ *vektor utjecaja. Tada vrijedi:*

a) Ako je $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$*, onda je* $\mathbf{x}$ *optimalno rješenje.*

b) Ako je $\mathbf{x}$ *optimalno i nedegenerativno rješenje, onda je* $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$*.*

Dokaz. a) Neka je $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$. Pokažimo da je $\mathbf{x}$ optimalno rješenje, odnosno da je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{y}$ za svaki $\mathbf{y} \in \mathcal{P}$. Pretpostavimo da je $\mathbf{y}$ neko proizvoljno dopustivo rješenje te definirajmo vektor $\mathbf{d} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$. Želimo pokazati da je $\mathbf{c}^T\mathbf{d} \geq 0$. S obzirom na to da su $\mathbf{y}$ te $\mathbf{x}$ iz skupa $\mathcal{P}$ vrijedi $\mathbf{Ax} = \mathbf{Ay} = \mathbf{b}$, odakle je $\mathbf{Ad} = \mathbf{0}$, odnosno

$$\mathbf{Ad} = \mathbf{Bd}_B + \sum_{i \in N} \mathbf{A}_i d_i = \mathbf{0},$$

tj. $\mathbf{d}_B = -\sum_{i\in N} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i \mathbf{d}_i$. Vrijedi

$$\mathbf{c}^T\mathbf{d} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{d}_B + \sum_{i\in N} c_i d_i = \sum_{i\in N}(c_i - \mathbf{c}_B\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_i)d_i = \sum_{i\in N} \bar{c}_i d_i.$$

Prema pretpostavci za svaki $i \in N$ vrijedi $\bar{c}_i \geq 0$. Također vrijedi $x_i = 0$ za svaki $i \in N$ te $y_i \geq 0$ za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ te je stoga $d_i = y_i - x_i \geq 0$ za svaki $i \in N$ pa je $\mathbf{c}^T\mathbf{d} \geq 0$.

b) Neka je $\mathbf{x}$ optimalno nedegenerativno rješenje i neka postoji x_j, $j \in N$ takav da je $c_j < 0$. No kao što smo pokazali, tada postoji postoji vektor $\mathbf{d}$ te $\theta > 0$ takav da je $\mathbf{c}^T(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) < \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ te stoga $\mathbf{x}$ nije optimalno rješenje. □

Pretpostavimo da je $\mathbf{x}$ neko bazično dopustivo rješenje. Za svaku nebazičnu komponentu vektora $\mathbf{x}$ odredimo njezin utjecaj $\bar{c}_j$. Ako za svaki $j \in N$ vrijedi da je $\bar{c}_j \geq 0$ onda je sukladno Teoremu 4.1, vektor $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ optimalno rješenje problema linearnog programiranja. U suprotnom postoji $j \in N$ takav da je $\bar{c}_j < 0$. Konstruiramo odgovarajući vektor smjera $\mathbf{d}$. Kretanjem od $\mathbf{x}$ prema $\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}$ u smjeru vektora $\mathbf{d}$ nebazična komponenta x_j vektora $\mathbf{x}$ postaje pozitivna. Pritom kretanje u smjeru vektora $\mathbf{d}$ nastavljamo najviše što možemo tako da $\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}$ ostane u poliedru $\mathcal{P}$, odnosno želimo odabrati optimalni $\theta^* = \max\{\theta \geq 0 : \mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \in \mathcal{P}\}$, a kako je $\mathbf{d}$ konstruiran tako da za svaki $\theta \geq 0$ zadovoljava $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \theta\mathbf{d}) = \mathbf{b}$, slijedi $\theta^* = \max\{\theta \geq 0 : \mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \geq 0\}$. Pritom razlikujemo dva slučaja:

1) Ako je $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$, tada je $\mathbf{x} + \theta\mathbf{d} \geq \mathbf{0}$ za svaki $\theta \geq 0$ te u tom slučaju stavljamo da je $\theta^* = +\infty$.

2) Ako postoji indeks i takav da je $d_i < 0$, onda θ treba odabrati tako da vrijedi $x_i + \theta d_i \geq 0$, odnosno da je $\theta \leq -\frac{x_i}{d_i}$. Prethodna nejednakost treba biti zadovoljena za svaki indeks i sa svojstvom da je $d_i < 0$.

Konačno slijedi

$$\theta^* = \min_{i=1,\ldots,n; d_i<0} \left(-\frac{x_i}{d_i}\right) = \min_{i=1,\ldots,m; d_{B(i)}<0} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right).$$

Uočimo da je $\theta^* > 0$.

Neka je l indeks takav da vrijedi

$$-\frac{x_{B(l)}}{d_{B(l)}} = \min_{i=1,\ldots,m; d_{B(i)}<0} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right) = \theta^*.$$

Vrijedi $d_{B(l)} < 0$ te $x_{B(l)} + \theta^* d_{B(l)} = 0$, tj. bazična varijabla $x_{B(l)}$ postaje 0, dok odabrana nebazična varijabla x_j poprima vrijednost $\theta^* > 0$.

Teorem 4.2. *Neka je $j \in N$ indeks odabrane nebazične varijable te $l \in \{1, \ldots, m\}$ takav da je $d_{B(l)} < 0$ indeks odabrane bazične varijable. Onda vrijedi*

a) Stupci $\mathbf{A}_{B(i)}$, $i \neq l$ i $\mathbf{A}_j$ su linearno nezavisni te je stoga matrica

$$\overline{\mathbf{B}} = \left[\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(l-1)}, \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_{B(l+1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}\right]$$

regularna.

b) Vektor $\mathbf{x} + \theta^* \mathbf{d}$ je bazično dopustivo rješenje.

Dokaz.

a) Označimo $\overline{B}(i) = \begin{cases} B(i), & i \neq l, \\ j, & i = l \end{cases}$, $i = 1, \ldots, m$. Ako bi vektori $\mathbf{A}_{\overline{B}(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ bili linearno zavisni, tada bi postojali $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ od kojih je barem jedan različit od nula takvi da je

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{A}_{\overline{B}(i)} = \mathbf{0}.$$

Množenjem prethodne jednakosti slijeva matricom $\mathbf{B}^{-1}$ dobivamo

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{\overline{B}(i)} = \mathbf{0},$$

pa slijedi da su i vektori $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{\overline{B}(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ također linearno zavisni. Da bismo dokazali da početna pretpostavka nije istinita, pokazat ćemo da vektori $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{\overline{B}(i)}$ $i = 1, \ldots, m$ (tj. $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)}$, $i \neq l$ i $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$) moraju biti linearno nezavisni.

Kako je $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ i $\mathbf{A}_{B(i)}$ i-ti stupac matrice $\mathbf{B}$, slijedi da je $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)} = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Specijalno, vektori $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)} = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, $i \neq l$ su linearno nezavisni i l-ta komponenta im je jednaka nuli. S druge strane je $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j = -\mathbf{d}_B$ a l-ta komponenta od $-\mathbf{d}_B$ je $-d_B(l)$ što je različito od nula po konstrukciji indeksa l pa se $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j$ ne može zapisati kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{B(i)}$, $i \neq l$, odnosno vektori $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_{\overline{B}(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ su linearno nezavisni.

b) Označimo $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \theta^*\mathbf{d}$. Kako je $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A}_{\overline{B}(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ linearno nezavisni i $y_i = 0$ za $i \notin \{\overline{B}(1), \ldots, \overline{B}(m)\}$, slijedi da je $\mathbf{y}$ bazično rješenje. Nadalje, kako je $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{y}$ je bazično dopustivo rješenje. $\square$

Sada možemo dati i formalni zapis jedne iteracije simpleks–metode.

Iteracija simpleks–metode

0) Neka je $\mathbf{x}$ bazično dopustivo rješenje te $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}]$ pripadna matrica baze.

1) Izračunati utjecaje $\bar{c}_j = c_j - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_j$ za sve $j \in N$, gdje je N skup indeksa nebazičnih varijabli.

`if` $\bar{c}_j \geq 0$, $\forall j \in N$, onda je $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}$ i algoritam staje.

`else`, odabrati j za koji je $\bar{c}_j < 0$.

2) Izračunati $\mathbf{d}_B = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_j =: -\mathbf{u}$.

`if` $\mathbf{d}_B \geq \mathbf{0}$ ($\mathbf{u} \leq \mathbf{0}$), staviti $\theta^* = \infty$ tj. optimalna vrijednost funkcije cilja je $-\infty$ i algoritam staje.

`else`,

$$\theta^* = \min_{i=1,\ldots,m; d_{B(i)}<0} \left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}} \right) = \min_{i=1,\ldots,m; u_i>0} \left(\frac{x_{B(i)}}{u_i} \right).$$

3) Neka je l indeks takav da je

$$\theta^* = -\frac{x_{B(l)}}{d_{B(l)}} = \frac{x_{B(l)}}{u_l}.$$

Napraviti novu matricu baze zamjenom stupca $\mathbf{A}_{B(l)}$ s $\mathbf{A}_j$. Novo bazično dopustivo rješenje je $\mathbf{y}$ za koji vrijedi da je $y_j = \theta^*$, $y_{B(i)} = x_{B(i)} + \theta^* d_{B(i)} = x_{B(i)} - \theta^* u_i$, te $y_i = 0$ za sve $i \in N \setminus \{j\}$.

Kao što smo vidjeli, u svakom koraku simpleks metode trebamo računati inverz matrice baze. Matrica baze $\overline{\mathbf{B}}$ se u svakoj iteraciji simpleks metode razlikuje od matrice baze $\mathbf{B}$ iz prethodne iteraciji samo u jednom stupcu. Želimo na osnovi matrice $\mathbf{B}^{-1}$, odrediti matricu $\overline{\mathbf{B}}^{-1}$. To ćemo postići nizom elementarnih transformacija nad redcima matrice $\mathbf{B}^{-1}$. Pritom pod elementarnom transformacijom nad redcima matrice podrazumijevamo množenje nekog retka matrice sa skalarom koji je različit od 0 te dodavanje dvaju redaka matrice.

Primjer 4.2. *Zadana je matrica* $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. *Pomnožimo li prvi redak matrice*

$\mathbf{C}$ *s* 2 *i dodamo drugom retku dobivamo matricu* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. *Uočimo da je ova elementarna transformacija nad redcima matrice* $\mathbf{C}$ *ekvivalentna množenju matrica* $\mathbf{QC}$, *pri čemu je*

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Općenito elementrana transformacija nad redcima proizvoljne matrice $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, koja se sastoji od množenja $j-$tog retka matrice $\mathbf{C}$ sa skalarom $\beta \neq 0$, te dodavanja $i-$tom retku ekvivalentna je množenju matrica $\mathbf{QC}$, pri čemu je

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \mathbf{D}_{ij},$$

gdje je $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ te $\mathbf{D}_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ kvadratna matrica koja na sjecištu $i-$tog retka i $j-$tog stupca sadrži element β, dok su ostali elementi matrice $\mathbf{D}_{ij}$ jednaki 0. Uočimo da je matrica $\mathbf{Q}$ regularna jer je $\det(\mathbf{Q}) = 1$.

Neka su

$$\mathbf{B} = \left[\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(l-1)}, \mathbf{A}_{B(l)}, \mathbf{A}_{B(l+1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}\right]$$

te

$$\overline{\mathbf{B}} = \left[\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(l-1)}, \mathbf{A}_{j}, \mathbf{A}_{B(l+1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}\right]$$

matrice baze u dvije uzastopne iteracije simpleks metode. Vrijedi

$$\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{B}} = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{l-1}, \mathbf{u}, \mathbf{e}_{l+1}, \ldots, \mathbf{e}_m] = \begin{bmatrix} 1 & & u_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & u_l & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & u_m & & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu je $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$ $i-$ti jedinični vektor. Nizom od najviše m elementarnih transformacija nad redcima, matrica $\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{B}}$ može se transformirati u jediničnu matricu. To znači da postoje matrice $\mathbf{Q}_1, \ldots, \mathbf{Q}_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ takve da je

$$\mathbf{Q}_m\mathbf{Q}_{m-1}\cdots\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^{-1}\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{I},$$

odakle slijedi da je $\overline{\mathbf{B}}^{-1} = \mathbf{Q}_m\mathbf{Q}_{m-1}\cdots\mathbf{Q}_1\mathbf{B}^{-1}$.

4.2 Tablična implementacija simpleks–metode

U ovom odjeljku opisujemo jedan koristan i uobičajen tablični prikaz provedbe simpleks–metode. Neka je $\mathbf{B}$ matrica baze. Uočimo da sustav linearnih jednadžbi $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, možemo zapisati u obliku $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. **Simpleks–tablica** je matrica

$$\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{b}, \mathbf{A}] = [\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_n] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}.$$

U svakoj iteraciji simpleks–metode želimo simpleks–tablicu $\mathbf{B}^{-1}[\mathbf{b}, \mathbf{A}]$ transformirati u simpleks–tablicu $\overline{\mathbf{B}}^{-1}[\mathbf{b}, \mathbf{A}]$, što postižemo množenjem matrica $\mathbf{QB}^{-1}[\mathbf{b}, \mathbf{A}]$, pri čemu je matrica $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_m \cdots \mathbf{Q}_1$ produkt odgovarajućih matrica elementarnih transformacija. Obično simpleks–tablici dodajemo tzv. nulti redak $[-\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}] \in \mathbb{R}^{1\times n}$ te simpleks–tablica poprima oblik

$$\begin{array}{c|c} -\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \\ \hline & \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}, \end{array}$$

odnosno

$$\begin{array}{c|ccc} -\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B & \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n \\ \hline x_{B(1)} & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 & \ldots & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_n \\ x_{B(m)} & \vdots & \ldots & \vdots \end{array}$$

Primjer 4.3. *Riješimo simpleks–metodom sljedeći problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &\rightarrow \min_{x_1,x_2} \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 8 \\ x_1 &\leq 6 \\ x_2 &\leq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Pripadni problem linearnog programiranja u standardnom obliku glasi

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &\to \min_{x_1,x_2} \\ \text{uz uvjete} & \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1 + x_5 &= 6 \\ x_2 + x_6 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0. \end{aligned}$$

Odgovarajuća matrica $\mathbf{A}$ te vektori $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$ glase

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = [-2, -1, 0, 0, 0, 0]^T.$$

Pretpostavimo da se matrica baze sastoji od stupaca $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$ i $\mathbf{A}_6$, odnosno da glasi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pritom su x_2 i x_3 nebazične varijable dok su x_1, x_4, x_5 i x_6 bazične varijable. Lako se vidi da je $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = [5, 3, 1, 6]^T$, tj. odgovarajuće bazično dopustivo rješenje je $\mathbf{x} = [5, 0, 0, 3, 1, 6]^T$. Pripadna simpleks–tablica glasi

$$\begin{array}{c|cccccc} 10 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & & & \\ x_1 = 5 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 = 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 = 1 & 0 & -1 & \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ x_6 = 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Među nebazičnim varijablama želimo odabrati onu koja ima negativni utjecaj. Vidimo da možemo odabrati jedino varijable x_3. Odaberimo x_3 za nebazičnu varijablu koju ćemo uvesti u bazu. Pri tome treći stupac u simpleks tablici zovemo **pivot–stupac**. Odgovarajući stupac je vektor $\mathbf{u} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_3 = [-1, 1, 1, 0]^T$

(za bazični dio vektora smjera vrijedi $\mathbf{d}_B = -\mathbf{u}$). Nadalje, pripadna duljina koraka jednaka je

$$\theta^* = \min_{i:u_i>0} \frac{x_{B(i)}}{u_i} = \min\{3, 1\} = 1,$$

što znači da iz baze trebamo maknuti varijablu x_5. Tada element na sjecištu trećeg stupca i trećeg retka simpleks–tablice zovemo **pivot– element**, a to je u ovom slučaju broj 1. Nebazična varijabla x_3 ulazi u bazu, dok bazična varijabla x_5 napušta bazu. Elementarnim transformacijama pivot stupac transformirat ćemo u $[0, 0, 1, 0]^T$. Odgovarajuću transformaciju provest ćemo i na nultom retku simpleks– tablice. Nova simpleks tablica glasi

$$\begin{array}{c|cccccc} 12 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline & & & & & & \\ x_1 = 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 = 2 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -1 & 0 \\ x_3 = 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_6 = 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

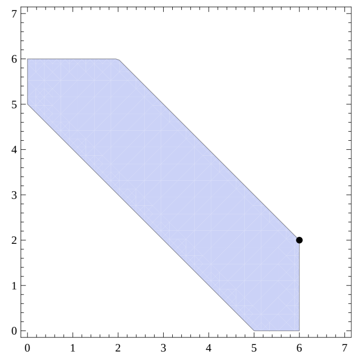
Varijable x_2 i x_5 su nebazične varijable, dok su x_1, x_3, x_4 i x_6 bazične varijable. Pripadno bazično dopustivo rješenje glasi $\mathbf{x} = [6, 0, 1, 2, 0, 6]^T$. Jedina nebazična varijabla s negativnim utjecajem je x_2. Pripadni pivot stupac je $\mathbf{u} = [0, 1, -1, 1]^T$ Nadalje, pripadna duljina koraka jednaka je

$$\theta^* = \min_{i:u_i>0} \frac{x_{B(i)}}{u_i} = \min\{2, 6\} = 2,$$

što znači da iz baze izbacujemo varijablu x_4, te je pivot–element jednak 1. Nakon elementarnih transformacija dobivamo sljedeću simpleks–tablicu:

$$\begin{array}{c|cccccc} 14 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & & & & & & \\ x_1 = 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_2 = 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ x_3 = 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 = 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Varijable x_4, x_5 su nebazične, dok su x_1, x_2, x_3, x_6 bazične varijable. S obzirom da su utjecaji svih varijabli nenegativni $\mathbf{x} = [6, 2, 3, 0, 0, 4]^T$ je optimalno bazično dopustivo rješenje problema u standardnom obliku, odnosno $\mathbf{x} = [6, 2]^T$ je optimalno bazično dopustivo rješenje problema polaznog problema. Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi -14. Promatrani početni problem smo mogli riješiti i grafičkom metodom. Dopustivo područje prikazano je na Slici 4.3



Slika 4.3: Dopustivo područje i optimalno rješenje iz Primjera 4.3

4.3 Složenost jedne iteracije simpleks–tablice

U ovom odjeljku analizirat ćemo numeričku složenost jedne iteracije tablične implementacije simpleks–metode.

Neka su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq m$, te promatrajmo problem linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \min \\ \text{uz uvjet} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da smo odabrali matricu bazu $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, s $\mathbf{x}_B \in \mathbb{R}^m$ označili bazični dio odgovarajućeg bazičnog dopustivog rješenja te s $\mathbf{c}_B \in \mathbb{R}^m$ bazični dio vektra $\mathbf{c}$, onda promatranom problemu linearnog programiranja možemo pridružiti sljedeću simpleks–tablicu:

$$\begin{array}{c|c} -\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \\ \hline & \\ \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \end{array},$$

odnosno

$$\begin{array}{c|ccc} -\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B & \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n \\ \hline & & & \\ x_{B(1)} & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 & \cdots & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_n \\ x_{B(m)} & \vdots & \cdots & \vdots \end{array},$$

pri čemu su $\bar{c}_j$, $j = 1, \ldots, n$ utjecaji varijabli x_j.

Izračunajmo najprije složenost formiranja simpleks–tablice. U tu svrhu moramo obaviti sljedeće:

1. izračunati inverz matrice baze $\mathbf{B}^{-1}$, što ima složenost $\mathcal{O}(m^3)$
2. izračunati produkt matrica $\mathbf{T} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, što ima složenost $\mathcal{O}(m^2 n)$
3. izračunati produkt matrice i vektora $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, što ima složenost $\mathcal{O}(m^2)$
4. izračunati produkt vektora i matrice $\mathbf{c}_B^T\mathbf{T}$, što ima složenost $\mathcal{O}(mn)$
5. izračunati skalarni produkt $\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$, što ima složenost $\mathcal{O}(m)$
6. izračunati razliku vektora $\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, što ima složenost $\mathcal{O}(n)$

Kako obično pretpostavljamo da je $n \geq m$, slijedi da složenost formiranja simpleks–tablice iznosi $\mathcal{O}(m^2 n)$.

Također vidjeli smo da u svakoj sljedećoj iteraciji nije potrebno računati inverz matrice baze. Uz pretpostavku da znamo inverz matrice baze $\mathbf{B}^{-1}$, računanje novog inverza baze $\overline{\mathbf{B}}$ ima složenost $\mathcal{O}(m^2)$. Promatrajmo nadalje složenost svake sljedeće iteracije simpleks tabloa. U tu svrhu moramo obaviti sljedeće:

1. provjeriti predznake utjecaja $\bar{c}_j, j = 1, \ldots, n$, odnosno odrediti pivot stupac, što ima složenost $\mathcal{O}(n)$
2. provjeriti predznak svake komponente pivot stupca, te odrediti odrediti pivot redak, što ima složenost $\mathcal{O}(n)$
3. obaviti elementarne transformacije nad redcima simpleks–tablice, što ima složenost $\mathcal{O}(mn)$.

Konačno, svaka sljedeća iteracija simpleks–tablice ima složenost $\mathcal{O}(mn)$. Ukupna složenost simpleks–metode ovisi o složenosti jedne iteracije te od ukupnog broja iteracija, što analiziramo u sljedećoj točki.

4.4 Složenost simpleks–metode

Prirodno se postavlja pitanje koliki je maksimalni broj iteracija simpleks–metode. U najgorem slučaju treba odrediti sve vrhove poliedra i izračunati vrijednost funkcije cilja u svakoj od njih. Takvih vrhova najviše može biti $\binom{n}{m}$, što se može aproksimirati s $\left(\frac{en}{m}\right)^m$, gdje je e baza prirodnog logaritma. Prema tome broj vrhova je eksponencijalna funcija dimenzije problema.

Nažalost, nije poznato postoji li strategija optimalnog pivotiranje koje će teorijski garantirati da će broj iteracija simpleks–metode biti manji od broja vrhova poliedra. Sljedeći primjer ilustrira da se može dogoditi situacija u kojoj će simpleks–metoda za dobivanje optimalnog rješenja trebati upravo onoliko iteracija koliko iznosi broj vrhova poliedra.

Primjer 4.4. *Riješimo problem linearnog programiranja*

$$\sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j \to \max$$

$$\textit{uz uvjete}$$

$$2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i \leq 100^{i-1},\ 1 \leq i \leq n$$

$$x_j \geq 0$$

Rješenje. Nije teško vidjeti da odgovarajući poliedar ima 2^n vrhova (grafički prikažite specijalne slučajeve za $n = 2$ i $n = 3$). Specijalno promatramo slučaj $n = 3$:

$$
\begin{aligned}
100x_1 + 10x_2 + x_3 &\to \max \\
&\text{uz uvjete} \\
x_1 &\leq 1 \\
20x_1 + x_2 &\leq 100 \\
200x_1 + 20x_2 + x_3 &\leq 10000 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Odgovarajući standardni oblik glasi

$$
\begin{aligned}
-100x_1 - 10x_2 - x_3 &\to \min \\
&\text{uz uvjete} \\
x_1 + x_4 &= 1 \\
20x_1 + x_2 + x_5 &= 100 \\
200x_1 + 20x_2 + x_3 + x_6 &= 10000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Riješimo dani problem simpleks–metodom. Vidjet ćemo da ukloliko koristimo pravilo za pivotiranje u kojem među nebazičnim varijablama pogodnim za ulazak u bazu odabiremo onu s najnegativnijim utjecajem, trebat ćemo $2^3 - 1$ iteracija simpleks–metode, što znači da ćemo proći kroz svih 2^3 vrhova poliedra.

Lako se vidi da je jedno početno bazično dopustivo rješenje $[0, 0, 0, 1, 100, 10000]^T$, te je odgovarajuća početna simpleks–tablica oblika

$$\begin{array}{c|cccccc}
0 & -100 & -10 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
 & & & & & & \\
x_4 = 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_5 = 100 & 20 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_6 = 10000 & 200 & 20 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Uvažavajući dano pravilo pivotiranja, nova bazična varijabla je x_1, dok x_4 izlazi iz baze. Nova tablica nakon 1. iteracije glasi

$$\begin{array}{c|cccccc}
100 & 0 & -10 & -1 & 100 & 0 & 0 \\ \hline
 & & & & & & \\
x_1 = 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_5 = 80 & 0 & \boxed{1} & 0 & -20 & 1 & 0 \\
x_6 = 9800 & 0 & 20 & 1 & -200 & 0 & 1
\end{array}$$

Sljedeća varijabla koja izlazi iz baze je x_5, a u 2. iteraciji u bazu ulazi x_2.

$$\begin{array}{c|cccccc}
900 & 0 & 0 & -1 & -100 & 10 & 0 \\ \hline
 & & & & & & \\
x_1 = 1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\
x_2 = 80 & 0 & 1 & 0 & -20 & 1 & 0 \\
x_6 = 8200 & 0 & 0 & 1 & 200 & -20 & 1
\end{array}$$

Nadalje u 3. iteraciji iz baze izlazi varijabla x_1, a ulazi x_4.

$$\begin{array}{c|cccccc}
1000 & 100 & 0 & -1 & 0 & 10 & 0 \\ \hline
 & & & & & & \\
x_4 = 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_2 = 100 & 20 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_6 = 8000 & -200 & 0 & \boxed{1} & 0 & -20 & 1
\end{array}$$

U 4. iteraciji iz baze izlazi varijabla x_6, a u bazu ulazi x_3.

$$\begin{array}{c|cccccc}
9000 & -100 & 0 & 0 & 0 & -10 & 1 \\ \hline
 & & & & & & \\
x_4 = 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_2 = 100 & 20 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_3 = 8000 & -200 & 0 & 1 & 0 & -20 & 1
\end{array}$$

Nadalje u 5. iteraciji iz baze izlazi varijabla x_4 te ulazi x_1.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
9100 & 0 & 0 & 0 & 100 & -10 & 1 \\
\hline
 & & & & & & \\
x_1 = 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_2 = 80 & 0 & 1 & 0 & -20 & 1 & 0 \\
x_3 = 8200 & 0 & 0 & 1 & 200 & -20 & 1
\end{array}
$$

U 6. iteraciji iz baze izlazi x_2, a u bazu ulazi varijabla x_5.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
9900 & 0 & 10 & 0 & -100 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & & & \\
x_1 = 1 & 1 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\
x_5 = 80 & 0 & 1 & 0 & -20 & 1 & 0 \\
x_3 = 9800 & 0 & 20 & 1 & -200 & 0 & 1
\end{array}
$$

U 7. iteraciji iz baze izlazi x_1, a ulazi x_4.

$$
\begin{array}{c|cccccc}
10000 & 100 & 10 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & & & \\
x_4 = 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
x_5 = 100 & 20 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
x_3 = 10000 & 200 & 20 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Kako su svi utjecaji pozitivni, u maksimalnih $2^3 - 1 = 7$ iteracija došli smo do optimalnog baznog dopustivog rješenja $x^* = [0, 0, 10000, 1, 100, 0]$.

Međutim, na sreću u praksi, i to na problemima koji dolaze iz stvarnog svijeta, simpleks–metoda se pokazala puno efikasnijom te za određivanje optimalnog dopustivog rješenja nije potreban eksponencijalni broj iteracija.

4.5 Pojava ciklusa

U slučaju da je neko trenutno bazično dopustivo rješenje degenerativno, u provedbi simpleks metode može se pojaviti kruženje ili ciklus, odnosno pojava da se nakon nekoliko iteracija simpleks–metode ponovo vratimo na već promatrano bazično dopustivo rješenje. Ovu pojavu ilustrirat ćemo na sljedećem primjeru:

Primjer 4.5. *([2], Primjer 3.6.) Zadana je simpleks–tablica*

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
3 & -3/4 & 20 & -1/2 & 6 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
 & & & & & & & \\
x_5 = 0 & 1/4 & -8 & -1 & 9 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 = 0 & 1/2 & -12 & -1/2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\
x_7 = 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}.
$$

Pretpostavimo da koristimo sljedeće pravilo za pivotiranje:

- *Među svim nebazičnim varijablama koje su pogodne za ulazak u bazu, izaberemo onu s najnegativnijim utjecajem.*
- *Među bazičnim varijablama koje su pogodne za izbacivanje iz baze, odaberemo onu s najmanjim indeksom.*

Tada prva varijabla koja ulazi u bazu je x_1*, a izlazi* x_5*. Iteracije simpleks–metode dane su u sljedećim tablicama:*

3	0	-4	-7/2	33	3	0	0
$x_1 = 0$	1	-32	-4	36	4	0	0
$x_6 = 0$	0	$\boxed{4}$	3/2	-15	-2	1	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

3	0	0	-2	18	1	1	0
$x_1 = 0$	1	0	$\boxed{8}$	-84	-12	8	0
$x_2 = 0$	0	1	3/8	-15/4	-1/2	1/4	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

3	1/4	0	0	-3	-2	3	0
$x_3 = 0$	1/8	0	1	-21/2	-3/2	1	0
$x_2 = 0$	-3/64	1	0	$\boxed{3/16}$	1/16	-1/8	0
$x_7 = 1$	-1/8	0	0	21/2	3/2	-1	1

3	-1/2	16	0	0	-1	1	0
$x_3 = 0$	-5/2	56	1	0	$\boxed{2}$	-6	0
$x_4 = 0$	-1/4	16/3	0	1	1/3	-2/3	0
$x_7 = 1$	5/2	-56	0	0	-2	6	1

3	-7/4	44	1/2	0	0	-2	0
$x_5 = 0$	-5/4	28	1/2	0	1	-3	0
$x_4 = 0$	1/6	-4	-1/6	1	0	$\boxed{1/3}$	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

3	-3/4	20	-1/2	6	0	0	0
$x_5 = 0$	1/4	-8	-1	9	1	0	0
$x_6 = 0$	1/2	-12	-1/2	3	0	1	0
$x_7 = 1$	0	0	1	0	0	0	1

Vidimo da smo se primjenom navedenog pravila nakon 6 iteracija vratili na početnu simpleks–tablicu, što znači da je došlo do ciklusa.

U svrhu izbjegavanja ciklusa, koristit ćemo tzv. Blandovo pravilo, a koje glasi:

Blandovo pravilo

1) Među svim nebazičnim varijablama koje su pogodne za ulazak u bazu, odabrati onu s najmanjim indeksom.

2) Među bazičnim varijablama koje su pogodne za izbacivanje iz baze, odabrati onu s najmanjim indeksom.

Može se pokazati sljedeći teorem ([4]):

Teorem 4.3. *Ako krenemo od nedegenerativnog početnog bazičnog dopustivog rješenja, te ako koristimo Blandovo pravilo, onda će simpleks metoda završiti u konačno mnogo koraka.*

4.6 Konstrukcija početnog bazičnog dopustivog rješenja

Želimo li primijenti simpleks–algoritam na rješavanje problema linearnog programiranja, potrebno je poznavati jedno bazično dopustivo rješenje. Konstrukcija početnog bazičnog dopustivog rješenja u nekim slučajevima kakve smo imali dosada može biti jednostavna, no općenito predstavlja složen problem.

Specijalno, promatrajmo najprije problem linearnog programiranja sljedećeg oblika:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min_{\mathbf{x}} \\
\text{uz uvjet}& \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &\leq \mathbf{b},\ \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Odgovarajući standardni oblik problema linearnog programiranja glasi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min_{\mathbf{x},\mathbf{s}} \\
\text{uz uvjet}& \\
\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{s} &= \mathbf{b},\ \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\mathbf{x}, \mathbf{s} &\geq \mathbf{0},
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min_{\mathbf{x},\mathbf{s}} \\
\text{uz uvjet}& \\
[\mathbf{A}\ \mathbf{I}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} &= \mathbf{b},\ \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \\
\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} &\geq \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Sada je očigledno da izbor $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ daje dopustivo rješenje $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$ koje je zbog pretpostavke $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ ujedno i bazično dopustivo rješenje te se može koristiti kao početno bazično dopustivo rješenje u simpleks metodi.

Primjer 4.6. *Odredimo početno bazično dopustivo rješenje za problem linearnog programiranja*

$$
\begin{aligned}
-2x_1 - x_2 &\to \min \\
\textit{uz uvjet}& \\
x_1 + x_2 &\leq 2 \\
x_1 &\leq 1 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Rješenje. U ovom slučaju odgovarajući problem u standardnom obliku dan je s

$$\begin{aligned} -2x_1 - x_2 &\to \min \\ \text{uz uvjet} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

pri čemu je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Kako je $\mathbf{b} \geq 0$, možemo odabrati $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, te je $\mathbf{x}_B = \mathbf{b}$, odnosno početno bazično dopustivo rješenje je $[0, 0, 2, 1]^T$.

U općem slučaju za problem linearnog programiranja oblika

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\textbf{originalni problem}} \\ \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \min\limits_{\mathbf{x}} \\ \multicolumn{3}{c}{\text{uz uvjet}} \\ \mathbf{Ax} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}, \end{array} \tag{4.3}$$

problem konstrukcije početnog bazičnog dopustivog rješenja složen je problem koji zahtjeva rješavanje pomoćnog problema linearnog programiranja.

Primijetimo da u problemu linearnog programiranja (4.3) bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ (ako takva pretpostavka nije ispunjena za neke jednadžbe $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onda takve jednadžbe uvijek možemo pomnožiti s (-1)).

U svrhu određivanja početnog bazičnog dopustivog rješenja za problem (4.3) uvodimo novi vektor $\mathbf{y} = [y_1, \ldots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ koji se zove **vektor artificijelnih varijabli**. Definiramo pomoćni problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{\textbf{pomoćni problem}} \\ y_1 + \cdots + y_m & \to & \min\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y}} \\ \multicolumn{3}{c}{\text{uz uvjete}} \\ \mathbf{Ax} + \mathbf{y} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x}, \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0}. \end{array} \tag{4.4}$$

Uočimo da vrijede sljedeće tri tvrdnje:

1) Pomoćni problem (4.4) je oblika (4.2) pa je jedan izbor početnog bazičnog dopustivog rješenja $\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

2) Ako je $\mathbf{x}$ dopustivo rješenje originalnog problema (4.3), onda je $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ optimalno rješenje pomoćnog problema (4.4) i optimalna vrijednost funkcije cilja u (4.4) je 0. Kontrapozicijom iz prethodne tvrdnje slijedi da ako je optimalna vrijednost funkcije cilja u (4.4) različita od 0, onda problem (4.3) nema rješenja.

3) Ako je optimalna vrijednost funkcije cilja kod pomoćnog problema (4.4) jednaka 0 (tj. optimalni $\mathbf{y} = \mathbf{0}$), onda je pripadni optimalni $\mathbf{x}$ bazično dopustivo rješenje originalnog problema (4.3).

Primjer 4.7. *Odredimo početno bazično dopustivo rješenje za problem linearnog programiranja*

$$-x_1 - 2x_2 \to \min \tag{4.5}$$

uz uvjet

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + x_3 &= -5 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 8 \\ x_1 + x_5 &= 6 \\ x_2 + x_6 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rješenje. Najprije prvu jednadžbu pomnožimo s (-1). Odgovarajući pomoćni problem glasi

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \to \min \tag{4.6}$$

uz uvjet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + y_1 &= 5 \\ x_1 + x_2 + x_4 + y_2 &= 8 \\ x_1 + x_5 + y_3 &= 6 \\ x_2 + x_6 + y_4 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, y_1, y_2, y_3, y_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

Početno bazično dopustivo rješenje za problem (4.6) je $[5, 8, 6, 6]^T$ i iteracije simpleks–metode dane su u sljedećim tablicama

-25	-3	-3	1	-1	-1	-1	0	0	0	0
$y_1 = 5$	$\boxed{1}$	1	-1	0	0	0	1	0	0	0
$y_2 = 8$	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0
$y_3 = 6$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$y_4 = 6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

-10	0	0	-2	-1	-1	-1	3	0	0	0
$x_1 = 5$	1	1	-1	0	0	0	1	0	0	0
$y_2 = 3$	0	0	1	1	0	0	-1	1	0	0
$y_3 = 1$	0	-1	$\boxed{1}$	0	1	0	-1	0	1	0
$y_4 = 6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

-8	0	-2	0	-1	1	-1	1	0	2	0
$x_1 = 6$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$y_2 = 2$	0	$\boxed{1}$	0	1	-1	0	0	1	-1	0
$x_3 = 1$	0	-1	1	0	1	0	-1	0	1	0
$y_4 = 6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

-4	0	0	0	1	-1	-1	1	2	0	0
$x_1 = 6$	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$x_2 = 2$	0	1	0	1	-1	0	0	1	-1	0
$x_3 = 3$	0	0	1	1	0	0	-1	1	0	0
$y_4 = 4$	0	0	0	-1	$\boxed{1}$	1	0	-1	1	1

0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$x_1 = 2$	1	0	0	1	0	-1	0	1	0	-1
$x_2 = 6$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
$x_3 = 3$	0	0	1	1	0	0	-1	1	0	0
$x_5 = 4$	0	0	0	-1	1	1	0	-1	1	1

te početno bazično dopustivo rješenje za problem (4.5) glasi $[2, 6, 3, 0, 4, 0]^T$.

Ako se matrica $\mathbf{B}$ pridružena optimalnom rješenju pomoćnog problema (4.4) sastoji samo od stupaca matrice $\mathbf{A}$, onda je matrica $\mathbf{B}$ početna matrica baze za problem (4.3).

Ako se matrica $\mathbf{B}$ ne sastoji samo od stupaca matrice $\mathbf{A}$, slijedi da su neke artificijelne varijable bazične. Kako su vrijednosti svih artificijelnih varijabli nakon simpleks metode jednake nuli, slijedi da je optimalno rješenje pomoćnog problema degenerativno. Označimo $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(k)}$ stupce od $\mathbf{A}$ koji se nalaze u bazi. Kreiramo novu bazu $\mathbf{B}'$ od $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(k)}$ i dodatnih $m-k$ stupaca matrice $\mathbf{A}$ koji su linearno nezavisni s $\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(k)}$ (uz pretpostavku da je matrica $\mathbf{A}$ punog ranga). Tada je $\mathbf{B}'$ matrica baze za problem (4.3) pridružena početnom bazičnom dopustivom rješenju dobivenom kao rješenje problema (4.4).

Primjedba 4.1. Prethodno opisani postupak je postupak izbacivanja artificijelnih varijabli iz baze. Osnovna pretpostavka navedenog postupka je da je matrica $\mathbf{A}$ punog ranga. Taj uvjet ne predstavlja smanjenje općenitosti jer ako $\mathbf{A}$ nije punog ranga, onda se neki od redaka matrice $\mathbf{A}$ može/mogu prikazati kao linearna kombinacija preostalih i njima pripadni uvjeti se mogu maknuti iz skupa uvjeta $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ te se dobije problem s matricom punog ranga.

Primjer 4.8. *Za problem linearnog programiranja iz prethodnog primjera početno bazično dopustivo rješenje je* $[2, 6, 3, 0, 4, 0]^T$, *a odgovarajuća matrica baze* $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_5]$. *Početna simpleks tablica za originalni problem dobiva se iz završne tablice pomoćnog problema tako da izostavimo stupce koji odgovaraju artificijelnim varijablama:*

$$\begin{array}{c|cccccc} * & * & * & * & * & * & * \\ \hline & & & & & & \\ x_1 = 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_2 = 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 = 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 = 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

pri čemu se ponovno izračunava samo prvi redak. Dobivamo

$$\begin{array}{c|cccccc} 14 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & & & & & \\ x_1 = 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ x_2 = 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ x_3 = 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_5 = 4 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Kako su svi utjecaji nenegativni, početno bazično dopustivo rješenje je ujedno i optimalno pa je $\mathbf{x}^* = [2, 6, 3, 0, 4, 0]^T$ *i* $\mathbf{c}^T\mathbf{x}^* = -14$.

Primjedba 4.2. Prethodno opisani postupak za određivanje optimalnog rješenja problema linearnog programiranja, koji obuhvaća i rješavanje pomoćnog problema u literaturi je poznat kao **dvofazna simpleks–metoda** (eng. *two-phase simplex–method*). Pod prvom fazom dvofazne metode podrazumjeva se određivanje početnog baznog dopustivog rješenje (tj. rješavanje pomoćnog problema) dok druga faza sadrži rješavanje originalno zadanog problema linearnog programiranja primjenom simpleks–metode.

4.7 Zadaci

Zadatak 4.1. *Neka je* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *i* $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. *Dokazati da je tada* $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ *dopustivi smjer u* $\mathbf{x}$ *ako i samo ako je* $\mathbf{A}\mathbf{d} = \mathbf{0}$ *i* $d_i \geq 0$ *za svaki i za koji je* $x_i = 0$.
Koristeći dokazanu tvrdnju, za $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *odrediti skup svih dopustivih smjerova u* $\mathbf{x} = [1/2, 1/2, 0]^T$.

Rješenje. Skup svih dopustivih smjerova u $\mathbf{x}$ je $\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 : d_1 + d_2 + d_3 \geq 0, d_3 \geq 0\}$.

Zadatak 4.2. *Zadan je poliedar* $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 3,\ x_1 + x_3 = 2,\ \mathbf{x} \geq 0\}$ *i vektor* $\mathbf{x} = [2, 1, 0]^T$. *Odredite skup svih dopustivih smjerova u* $\mathbf{x}$.

Rješenje. Skup svih dopustivih smjerova u $\mathbf{x}$ je $\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 : d_2 = 0,\ d_1 = -d_3,\ d_3 \geq 0\}$.

Zadatak 4.3. *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} 2x_2 &\rightarrow \max \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\geq -1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Svedite dani problem na standardni problem linearnog programiranja i riješite problem primjenom simpleks–tablice. Zadani problem riješite i geometrijski. Na tom grafičkom prikazu naznačite svaku iteraciju koju ste dobili primjenom simpleks tabloa.

Rješenje. Optimalna vrijednost funkcije cilja je ∞.

Zadatak 4.4. *Riješiti simpleks metodom sljedeći problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 &\to \min \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Optimalno bazično dopustivo rješenje je $\mathbf{x} = [4,4,4,0,0,0]^T$, dok je optimalna vrijednost funkcije cilja jednaka -136 .

Zadatak 4.5. *U nekom koraku simpleks–metode, simpleks–tablica glasi:*

$$\begin{array}{r|rrrrr} 0 & 0 & \alpha & 0 & \beta & \gamma \\ \hline x_1 = \delta & 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ x_2 = 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ x_3 = 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Odredite skup vrijednosti nepoznatih parametara α, β, γ i δ tako da

a) *trenutno bazično dopustivo rješenje je degenerativno*

b) *x_4 ulazi u bazu a x_3 izlazi iz baze (uz uvažavanje Blandovog pravila)*

c) *x_4 ulazi u bazu i vrijednost funkcije cilja ostaje nepromjenjena*

d) *optimalna vrijednost funkcije cilja je* 0

e) *optimalna vrijednost funkcije cilja je $-\infty$.*

Rješenje.

a) $\alpha = 0, \delta = 0, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$,

b) $\alpha = 0, \beta < 0, \delta > 9, \gamma \in \mathbb{R}$,

c) $\alpha = 0, \beta < 0, \delta = 0, \gamma \in \mathbb{R}$,

d) $\alpha = 0, \beta, \gamma, \delta \geq 0$,

e) $\alpha = 0, \gamma < 0, \beta, \delta \geq 0$.

Zadatak 4.6. *Primjenom dvofazne simpleks–metode riješite problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} x_1 &\rightarrow \max \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rješenje. Početno bazično dopustivo rješenje je $[7,\ 0,\ 2,\ 0]^T$, optimalno bazično dopustivo rješenje je $[7,\ 0,\ 2,\ 0]^T$.

Zadatak 4.7. *Primjenom dvofazne simpleks–metode riješite problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\rightarrow \max \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 40 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 10 \\ -x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 4.8. *Primjenom dvofazne simpleks–metode riješite problem linearnog programiranja:*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\rightarrow \min \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 - 6x_3 &= -2 \\ 4x_2 + 9x_3 &= 5 \\ 3x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Početno bazično dopustivo rješenje je $[1,\ 1/2,\ 1/3,\ 0]^T$, optimalno bazično dopustivo rješenje je je $[1/2,\ 5/4,\ 0,\ 1]^T$.

Zadatak 4.9. *Primjenom simpleks–metode odredite dva optimalna bazična dopustiva rješenja sljedećeg problema linearnog programiranja:*

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + x_3 &\rightarrow \max \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\leq 6 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 &\leq 15 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje. $x_1^* = [3, 0, 0, 3, 0]$, $x_2^* = [0, 5, 0, 1, 0]$.

POGLAVLJE 5

Dualni problem linearnog programiranja

5.1 Dualni problem

Pretpostavimo da su zadane funkcije $f, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$ te promatrajmo sljedeći opći problem uvjetne optimizacije

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\to \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \\ &\text{uz uvjete} \\ &\quad g_i(\mathbf{x}) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Problemu (5.1) možemo pridružiti funkciju $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ zadanu formulom

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} p_i g_i(\mathbf{x}).$$

Funkciju $\mathcal{L}$ zovemo **Lagrangeova funkcija** problema (5.1), a vektor $\mathbf{p}$ zovemo **Lagrangeov multiplikator**. U sljedećem teoremu opisana je veza jednog optimizacijskog problema zadano Lagrangeovom funkcijom $\mathcal{L}$ i problemom (5.1).

Teorem 5.1. *Problem (5.1) ekvivalentan je problemu*

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \max_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m_+} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p}). \tag{5.2}$$

Dokaz. Označimo s $g(\mathbf{x}) := (g_1(\mathbf{x}), \ldots, g_m(\mathbf{x}))$. Uočimo da za fiksni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vrijedi:

$$\max_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m_+} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{p}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}), & g(\mathbf{x}) \leq 0 \\ \infty, & \text{inače.} \end{cases} \tag{5.3}$$

Naime, za $g(\mathbf{x}) \leq 0$ maksimum funkcije $\mathcal{L}$ po varijabli $\mathbf{p} \geq 0$ postiže se za $\mathbf{p} = \mathbf{0}$. S druge strane, ako je $g_i(\mathbf{x}) > 0$, za neki $i \in \{1, \ldots, m\}$, povećanjem vrijednost komponenata vektora $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m_+$ vrijednost funkcije $\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ možemo proizvoljno povećavati. Minimizacijom (5.3) po $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vidimo da se minimum od $\max\limits_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m_+} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{p})$ postiže za $g(\mathbf{x}) \leq 0$ i da je on jednak minimumu funkcije f na dopustivom skupu $U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) \leq 0\}$, te su prema tome problemi (5.1) i (5.2) međusobno ekvivalentni.

□

Općenito, problem (5.2) zovemo **primarni problem**, a s obzirom na to da je rješenje primarnog problema ujedno rješenje originalnog problema uvjetne optimizacije (5.1), problem (5.1), također ćemo zvati primarnim problemom.

Nadalje, smisleno je promatrati i sljedeći optimizacijski problem:

$$\max_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m_+} \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{p}), \tag{5.4}$$

koji zovemo **dualni problem** problema (5.2). Dakle,

primarni problem	dualni problem
$\min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max\limits_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m_+} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{p})$	$\max\limits_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m_+} \min\limits_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{p})$

Opća teorija dualnosti analizira odnos primarnog i dualnog problema za proizvoljni optimizacijski problem (vidi primjerice [1, 16]. U okviru ovog poglavlja izučit ćemo teoriju dualnosti u specijalnom slučaju problema linearnog programiranja. Također, spomenut ćemo i neke korisne primjene teorije dualnosti, koje su svojstvene upravo problemu linearnog programiranja.

5.2 Dualni problem problema linearnog programiranja

Promatrajmo problem linearnog programiranja u sljedećem obliku

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min_{\mathbf{x}} \tag{5.5}$$

uz uvjet

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \tag{5.6}$$

gdje su $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

Definiramo li pripadnu Lagrangeovu funkciju $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \to \mathbb{R}$ formulom

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}),$$

odgovarajući primarni i dualni problem glase

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \max_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m_+} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p}), \tag{5.7}$$

$$\max_{\mathbf{p}\in\mathbb{R}^m_+} \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{p}). \tag{5.8}$$

Promatrajmo dualni problem (5.8) te pretpostavimo da je $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m_+$ fiksni vektor. Onda je

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} (\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{p}^T(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x})) &= \min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} (\mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A})\mathbf{x} + \mathbf{p}^T\mathbf{b} \\ &= \begin{cases} \mathbf{p}^T\mathbf{b}, & \mathbf{c}^T - \mathbf{p}^T\mathbf{A} = \mathbf{0} \\ -\infty, & \text{inače} \end{cases}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Maksimizacijom izraza (5.9) po $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m_+$ dobivamo da je dualni problem (5.8) ekvivalentan problemu

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T\mathbf{b} &\to \max_{\mathbf{p}} \\ \text{uz uvjete} & \\ \mathbf{c}^T &= \mathbf{p}^T\mathbf{A} \\ \mathbf{p} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Zaključujemo da primarnom problemu

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \end{aligned}$$

pripada dualni problem

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{p}^T\mathbf{b} & \rightarrow & \max\limits_{\mathbf{p}} \\ \text{uz uvjete} & & \\ \mathbf{c}^T & = & \mathbf{p}^T\mathbf{A} \\ \mathbf{p} & \geq & \mathbf{0}. \end{array}$$

Analogno se može pokazati da primarnom problemu

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \rightarrow & \min\limits_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & \leq & \mathbf{b} \end{array}$$

pripada dualni problem

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{p}^T\mathbf{b} & \rightarrow & \max\limits_{\mathbf{p}} \\ \text{uz uvjete} & & \\ \mathbf{c}^T & = & \mathbf{p}^T\mathbf{A} \\ \mathbf{p} & \leq & \mathbf{0}. \end{array}$$

Promatrajmo nadalje sljedeći problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \rightarrow & \min\limits_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjet} & & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \end{array}$$

te za njega potražimo odgovarajući dualni problem. U tu svrhu prisjetimo se kako uvjet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ možemo zapisati u obliku $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ i $-\mathbf{Ax} \geq -\mathbf{b}$, odnosno u matričnom obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x} \geq \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Na taj način smo promatrani problem zapisali u obliku problema (5.5)-(5.6), te prema tome odgovarajući dualni problem glasi

$$\begin{array}{rcl} [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T] \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ -\mathbf{b} \end{bmatrix} & \rightarrow & \max\limits_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \\ \text{uz uvjete} & & \\ \mathbf{c}^T & = & [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T] \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ -\mathbf{A} \end{bmatrix} \\ \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 & \geq & \mathbf{0}, \end{array}$$

odnosno uvedemo li oznaku $\mathbf{p} = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$, pri čemu je $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$, dobivamo da dualni problem glasi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}^T\mathbf{b} &\to \max_{\mathbf{p}} \\
\text{uz uvjet} & \\
\mathbf{c}^T &= \mathbf{p}^T\mathbf{A}.
\end{aligned}
$$

Analogno se može pokazati da primarnom problemu

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min_{\mathbf{x}} \\
\text{uz uvjete} & \\
\mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq 0
\end{aligned}
$$

pripada dualni problem

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}^T\mathbf{b} &\to \max_{\mathbf{p}} \\
\text{uz uvjet} & \\
\mathbf{c}^T &\geq \mathbf{p}^T\mathbf{A}.
\end{aligned}
$$

Ako standardno s $\mathbf{a}_i$ označimo retke, a s $\mathbf{A}_j$ stupce matrice $\mathbf{A}$ te s $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]^T$ vektor varijabli primarnog problema, a s $\mathbf{p} = [p_1, \ldots, p_m]^T$ vektor varijabli dualnog problema, prethodne izvode možemo formalno rezimirati u obliku sljedeće tablice:

primarni problem	dualni problem
$\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min_{\mathbf{x}}$	$\mathbf{p}^T\mathbf{b} \to \max_{\mathbf{p}}$
$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \geq b_i$	$p_i \geq 0$
$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \leq b_i$	$p_i \leq 0$
$\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i$	p_i slobodna varijabla
$x_j \geq 0$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \leq c_j$
$x_j \leq 0$	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j \geq c_j$
x_j slobodna varijabla	$\mathbf{p}^T\mathbf{A}_j = c_j$

Primjer 5.1. *Napišimo dualni problem sljedećeg problema linearnog programiranja:*

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &\to \min_{x_1,x_2,x_3} \\
&\textit{uz uvjete} \\
x_1 - x_2 - x_3 &= 6 \\
2x_1 + x_2 &\geq 5 \\
x_1 - x_2 &\leq 4 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\leq 0 \\
x_3&\textit{-slobodna varijabla.}
\end{aligned}
$$

Rješenje. Dualni problem glasi

$$
\begin{aligned}
6p_1 + 5p_2 + 4p_3 &\to \max_{p_1,p_2,p_3} \\
&\text{uz uvjete} \\
p_1&\text{-slobodna varijabla} \\
p_2 &\geq 0 \\
p_3 &\leq 0 \\
p_1 + 2p_2 + p_3 &\leq 1 \\
-p_1 + p_2 - p_3 &\geq -1 \\
-p_1 &= 2.
\end{aligned}
$$

Primjer 5.2. *Za dani problema linearnog programiranja odredimo dualni problem i zapišimo ga u standardnom obliku:*

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 7x_3 &\to \min_{x_1,x_2,x_3} \\
&\textit{uz uvjete} \\
3x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\
2x_1 - x_3 &\leq 12 \\
x_1 &\geq 0 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

Rješenje. Dual glasi

$$\begin{aligned} 6p_1 + 12p_2 &\to \max_{p_1, p_2} \\ \text{uz uvjete}& \\ p_1&\text{-slobodna varijabla} \\ p_2 &\leq 0 \\ 3p_1 + 2p_2 &\leq 1 \\ -p_1 &\leq 2 \\ p_1 - p_2 &\leq -7. \end{aligned}$$

Standardni oblik dobivamo uz supstitucije $p_1 = p_1^+ - p_1^-$ i $\overline{p}_2 = -p_2$:

$$\begin{aligned} -6p_1^+ + 6p_1^- + 12\overline{p}_2 &\to \min_{p_1^+, p_1^-, \overline{p}_2, p_3, p_4, p_5} \\ \text{uz uvjete}& \\ 3p_1^+ - 3p_1^- - 2\overline{p}_2 + p_3 &= 1 \\ -p_1^+ + p_1^- + p_4 &= 2 \\ p_1^+ - p_1^- + \overline{p}_2 + p_5 &= -7 \\ p_1^+, p_1^-, \overline{p}_2, p_3, p_4, p_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

Kao što smo vidjeli dualni problem primarnog problema linearnog programiranja jest ponovo problem linearnog programiranja. Tako dobivenom problemu linearnog programiranja smisleno je pridružiti njegov dual. Sljedeći teorem govori o vezi duala dualnog problema linearnog programiranja s početnim primarnim problemom.

Teorem 5.2. *Dualni problem dualnog problema linearnog programiranja jest primarni problem linearnog programiranja.*

Dokaz. Pokazali smo da primarnom problemu linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjete}& \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

pripada dualni problem

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T\mathbf{b} &\to \max_{\mathbf{p}} \\ \text{uz uvjet} & \\ \mathbf{c}^T &\geq \mathbf{p}^T\mathbf{A}. \end{aligned}$$

Odredimo dualni problem ovog dualnog problema. U tu svrhu uočimo da se dualni problem može zapisati u obliku minimizacijskog problema

$$\begin{aligned} -\mathbf{p}^T\mathbf{b} &\to \min_{\mathbf{p}} \\ \text{uz uvjet} & \\ \mathbf{c}^T &\geq \mathbf{p}^T\mathbf{A}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T\mathbf{b} &\to \min_{\mathbf{p}} \\ \text{uz uvjet} & \\ -\mathbf{c} &\leq \mathbf{A}^T\mathbf{q}, \end{aligned}$$

pri čemu je $\mathbf{q} = -\mathbf{p}$. Lako se vidi da je dualni problem ovog problema glasi

$$\begin{aligned} -\mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \max_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjete} & \\ \mathbf{x}^T\mathbf{A} &= \mathbf{b}^T \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min_{\mathbf{x}} \\ \text{uz uvjete} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

$\square$

5.3 Osnovni teoremi dualnosti

U ovom odjeljku navodimo i dokazujemo najvažnije teoreme teorije dualnosti kao i njihove posljedice. Sljedeći teorem u literaturi je poznat kao **teorem slabe dualnosti**.

Teorem 5.3. *(Slaba dualnost) Neka je* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *dopustivo rješenje primarnog problema linearnog programiranja, a* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ *dopustivo rješenje pripadnog dualnog problema linearnog programiranja. Onda vrijedi*

$$\mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Dokaz. Neka su $u_i = p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i)$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ te $v_j = (c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Primijetimo da zbog uvjeta dualnosti vrijedi

$$p_i \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i \geq 0,$$

$$p_i \leq 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i \leq 0,$$

odnosno $u_i \geq 0$, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Potpuno analogno slijedi da je $v_j \geq 0$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j &= \sum_{i=1}^{m} p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i) + \sum_{j=1}^{n}(c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j \\ &= (\mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}) + (\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}, \end{aligned}$$

odakle slijedi $\mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}$.

□

U nastavku navodimo dva korolara. Pri tome dokaz Korolara 5.1 slijedi neposredno iz Teorema 5.3 slabe dualnosti.

Korolar 5.1. *(a) Ako je optimalna vrijednost primarnog problema jednaka* $-\infty$*, onda dualni problem nema rješenja.*

(b) Ako je optimalna vrijednost dualnog problema $+\infty$*, onda primarni problem nije dopustiv.*

Korolar 5.2. *Ako je* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *dopustivo rješenje primarnog problema, a* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ *dopustivo rješenje dualnog problema, te ako dodatno vrijedi da je* $\mathbf{p}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$*, onda su* $\mathbf{x}$ *i* $\mathbf{p}$ *optimalna rješenja primarnog i dualnog problema linearnog programiranja.*

Dokaz. Prema Teoremu 5.3 slabe dualnosti slijedi da je $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{p}^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{y}$ za svaki dopustivi vektor $\mathbf{y}$ primarnog problema linearnog programiranja, odakle slijedi da je $\mathbf{x}$ optimalno rješenje primarnog problema.

Slično, prema Teoremu 5.3 slabe dualnosti slijedi da je $\mathbf{p}^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{q}^T\mathbf{b}$ za svaki dopustivi vektor $\mathbf{q}$ dualnog problema linearnog prgramiranja, odakle slijedi da je $\mathbf{q}$ optimalno rješenje dualnog problema.

□

U slučaju problema linearnog programiranja za primarni i dualni problem vrijedi još jedna važna tvrdnja koja je u literaturi poznata kao **teorem jake dualnosti**.

Teorem 5.4. *(Jaka dualnost) Ako primarni problem linearnog programiranja ima optimalno rješenje, onda ga ima i dualni problem linearnog programiranja te su pripadne optimalne vrijednosti funkcije cilja primarnog i dualnog problema linearnog programiranja međusobno jednake.*

Dokaz. Neka je

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \min \\ \text{uz uvjete} & & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array} \tag{5.10}$$

primarni problem linearnog programiranja. Pretpostavimo da je $\mathbf{x}$ optimalno rješenje primarnog problema dobiveno primjenom Simpleks metode. Ako s $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ označimo odgovarajuću bazu, onda je $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ bazični dio vektora x. Također za vektor utjecaja vrijedi

$$\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}.$$

Označimo s $\mathbf{p}^T = \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}$. Posljedično je $\mathbf{c}^T \geq \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{p}^T\mathbf{A}$, odakle slijedi da je ovako definirani $\mathbf{p}$ dopustivo rješenje sljedećeg problema linearnog programiranja:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{p}^T\mathbf{b} & \to & \max \\ \text{uz uvjet} & & \\ \mathbf{p}^T\mathbf{A} & \leq & \mathbf{c}^T. \end{array} \tag{5.11}$$

Primijetimo da je problem (5.11) dualni problem primarnog problema (5.10). Također vrijedi

$$\mathbf{p}^T\mathbf{b} = \left(\mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\right)\mathbf{b} = \mathbf{c_B}^T\mathbf{x_B} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}.$$

Kako je $\mathbf{x}$ dopustivo rješenje primarnog problema (5.10), a $\mathbf{p}$ dopustivo rješenje dualnog problema (5.11). Sukladno Korolaru 5.2 to znači da je $\mathbf{p}$ optimalno rješenje dualnog problema, što je i trebalo dokazati.

□

Teorem 5.5. *(Uvjeti komplementarnosti) Vektori $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^m$ su optimalna rješenja primarnog, odnosno dualnog problema linearnog programiranja onda i samo onda ako vrijedi*

$$p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0, \quad \forall\, i \in \{1, \dots, m\}$$
$$(c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j = 0, \quad \forall\, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Dokaz. Neka su $u_i = p_i(\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} - b_i)$, $i \in \{1, \dots, m\}$ te $v_j = (c_j - \mathbf{p}^T\mathbf{A}_j)x_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Kako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{p}$ dopustiva rješenja primarnog, odnosno dualnog problema linearnog programiranja vrijedi $u_i \geq 0$ i $v_j \geq 0$ slijedi

$$\sum_{i\in\{1,\dots,m\}} u_i + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}} u_j = \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{b}.$$

Ako su $\mathbf{x}$ i $\mathbf{p}$ optimalna rješenja primarnog, odnosno dualnog problema linearnog programiranja, onda prema Teoremu 5.4

$$\sum_{i\in\{1,\dots,m\}} u_i + \sum_{j\in\{1,\dots,n\}} u_j = 0,$$

odakle slijedi $u_i = 0$, $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ te $v_j = 0$, $\forall j \in \{1, \dots, n\}$.

□

Ako je poznato nedegenerativno optimalno rješenje primarnog problema, onda se na osnovi uvjeta komplementarnosti jednoznačno može odrediti optimalno rješenje dualnog problema, što ilustriramo sljedećim primjerom.

Primjer 5.3. *Zadan je problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} 13x_1 + 10x_2 + 6x_3 &\to \min \\ &\textit{uz uvjete} \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) Pokažimo da je $\mathbf{x}^\star = [1, 0, 1]^T$ nedegenerativno optimalno rješenje prethodnog problema.

b) Kako glasi odgovarajući dualni problem?

c) Odredimo rješenje dualnog problema.

Rješenje. (a) Najprije pokažite da za odgovarajući vektor utjecaja vrijedi $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$.
(b) Dualni problem glasi

$$\begin{aligned} 8p_1 + 3p_2 &\to \max \\ &\text{uz uvjete} \\ 5p_1 + 3p_2 &\leq 13 \\ p_1 + p_2 &\leq 10 \\ 3p_1 &\leq 6. \end{aligned}$$

(c) Iz uvjeta komplementarnosti slijedi da je $\mathbf{p} = [2, 1]^T$ optimalno rješenje dualnog problema.

5.4 Neke primjene dualnosti

5.4.1 Karakterizacija nepraznog poliedra

U ovom pododjeljku analizirat ćemo jednu primjenu osnovnih teorema teorije dulanosti linearnog programiranja. Izvest ćemo kriterij na osnovi kojeg je moguće utvrditi je li promatrani poliedar u $\mathbb{R}^n$ neprazan. U tu svrhu polazimo od jednog jednostavnog ilustrativnog primjera.

Primjer 5.4. *Ispitajmo je li poliedar $\mathcal{P}$ zadan sljedećim sustavom nejednadžbi*

$$-2x_1 + 3x_2 \leq -2 \tag{5.12}$$

$$3x_1 - x_2 \leq 2 \tag{5.13}$$

$$-11x_1 - x_2 \leq -7 \tag{5.14}$$

neprazan.

Rješenje. Pomnožimo nejednadžbe (5.12) i (5.13) s 2, odnosno 5 respektivno, te zbrojimo sve sve tri nejednadžbe. Na taj način dobivamo da je $0 \leq -1$, odakle slijedi da je poliedar $\mathcal{P}$ prazan. Formalno, definirali smo vektor $p = [2, 5, 1]^T \geq 0$ za koji vrijedi $\mathbf{p}^T\mathbf{A} = [0, 0]$ te $\mathbf{p}^T\mathbf{b} < 0$, gdje su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \\ -11 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}.$$

Sljedeći teorem daje općenitu karakterizaciju nepraznog poliedra u $\mathbb{R}^n$.

Teorem 5.6. *Poliedar $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$ je neprazan onda i samo onda ako ne postoji vektor $\mathbf{p} \geq 0$ takav da vrijedi $\mathbf{A}^T\mathbf{p} = 0$ i $\mathbf{p}^T\mathbf{b} < 0$.*

Dokaz. Najprije uočimo da je poliedar neprazan onda i samo onda ako sljedeći problem linearnog programiranja ima dopustivih rješenja:

$$\begin{aligned} \mathbf{0}^T\mathbf{x} &\to \max \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Pretpostavimo da je poliedar $\mathcal{P}$ neprazan, odnosno da problem linearnog problema (5.15) ima dopustivih rješenja. U tom slučaju optimalna vrijednost funkcije cilja problema (5.15) jednaka je 0. Dualni problem pridružen problemu (5.15) glasi

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T\mathbf{b} &\to \min \\ \mathbf{A}^T\mathbf{p} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{p} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Kako primarni problem (5.15) ima optimalno rješenje, sukladno Teoremu 5.4 o jakoj dualnosti, dualni problem (5.16) također ima optimalno rješenje te pri tome optimalna vrijednost funkcije cilja problema (5.16) iznosi 0. To znači da je $0 \leq \mathbf{p}^T\mathbf{b}$, za svako dopustivo rješenje $\mathbf{p}$ dualnog problema (5.16). Time smo pokazali da ne postoji vektor $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ takav da je $\mathbf{A}^T\mathbf{p} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{p}^T\mathbf{b} < 0$.

Obratno, pretpostavimo suprotno tj. da postoji vektor $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$ takav da je $\mathbf{A}^T\mathbf{p} = \mathbf{0}$ i $\mathbf{p}^T\mathbf{b} < 0$. U tom slučaju može nastupiti jedna od sljedećih dviju mogućnosti:

(i) Dualni problem (5.16) nije omeđen.

(ii) Dualni problem (5.16) postiže optimalnu vrijednost koja je negativna.

Ako je nastupio slučaj (i), onda problem (5.15) sukladno Korolaru 5.1 nije dopustiv, odnosno poliedar $\mathcal{P}$ je prazan. Ako je nastupio slučaj (ii), onda je optimalna vrijednost (5.15) sukladno Korolaru 5.1 također negativna, odnosno to ponovo znači da je poliedar $\mathcal{P}$ prazan.

□

Ako promatramo poliedar u standardnom obliku, dobivamo sljedeću tvrdnju koja je u literaturi poznata kao **Farkaševa lema**.

Teorem 5.7. *(Farkaševa lema) Poliedar $\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ je neprazan onda i samo onda ako ne postoji vektor $\mathbf{p} \geq 0$ takav da vrijedi $\mathbf{A}^T\mathbf{p} \leq 0$ i $\mathbf{p}^T\mathbf{b} > 0$.*

5.4.2 Analiza osjetljivosti. Ekonomska interpretacija dualnog problema

Promatramo problem linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min \\ \text{uz uvjete} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \end{aligned}$$

pri čemu pretpostavljamo da je $\mathbf{A}$ punog ranga i da promatrani problem ima nedegenerativno optimalno bazično dopustivo rješenje $\mathbf{x}^*$. Neka je $\mathbf{B}$ odgovarajuća matrica baze i $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ pripadni bazični dio optimalnog rješenja. Ukoliko perturbiramo vektor $\mathbf{b}$ dovoljno malom perturbacijom $\delta\mathbf{b}$, onda zbog $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} > 0$ vrijedit će i $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}) > 0$, što zapravo znači da ista baza vodi i do bazičnog dopustivog rješenja perturbiranog problema. Nadalje, kako je vektor utjecaja perturbiranog i neperturbiranog problema isti, $\mathbf{c}^T - \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, slijedi da je ista baza također optimalna i za perturbirani problem. Stoga je optimalna vrijednost funkcije cilja perturbiranog problema $\mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{b} + \delta\mathbf{b})$, gdje je $\mathbf{p}^T = \mathbf{c}_B^T\mathbf{B}^{-1}$ optimalno rješenje dualnog problema. To znači da će mala perturbacija $\delta\mathbf{b}$ promijeniti optimalnu vrijednost funkcije cilja dualnog problema za $\mathbf{p}^T\delta\mathbf{b}$. Stoga se svaka komponenta p_i optimalnog rješenja dualnog problema može interpretirati kao marginalni trošak[1] po jediničnom povećanju od b_i.

5.4.3 Dualna simpleks–metoda

Dualna simpleks–metoda je alternativni algoritam za rješavanje problema linearnog programiranja.

Promatrajamo sljedeći problem linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min \\ \text{uz uvjete} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

[1]Marginalni troškovi predstavljaju povećanje ukupnih troškova do kojeg dolazi zbog promjene veličine *outputa* (količine proizvoda) za jednu jedinicu

s pripadnom simpleks tablicom

$$\begin{array}{c|ccc}
-\mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B & \bar{c}_1 & \cdots & \bar{c}_n \\
\hline
x_{B(1)} & \vdots & \dots & \vdots \\
\vdots & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_1 & \dots & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}_n \\
x_{B(m)} & \vdots & \dots & \vdots
\end{array}$$

i odgovarajućim dualnim problemom

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{p}^T\mathbf{b} & \to & \max \\
\text{uz uvjet} & & \\
\mathbf{p}^T\mathbf{A} & \leq & \mathbf{c}^T.
\end{array}$$

Pretpostavimo da je $\bar{\mathbf{c}}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \geq \mathbf{0}$. Tada vektor $\mathbf{p}^T = \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}$ zadovoljava $\mathbf{p}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T$, odnosno $\mathbf{p}$ je bazično dopustivo rješenje dualnog problema. Vrijednost funkcije cilja dualnog problema u tom bazičnom dopustivom rješenju dualnog problema je $\mathbf{p}^T\mathbf{b} = \mathbf{c_B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c_B}^T\mathbf{x_B}$. Ako je $\mathbf{x_B} \geq \mathbf{0}$, tada je prema Korolaru 5.2 $\mathbf{x}$ optimalno bazično rješenje primarnog problema i odredili smo optimalna rješenja i primarnog i dualnog problema. Ako $\mathbf{x_B}$ ne zadovoljava uvjet negativnosti, onda je $\mathbf{x}$ bazično ali ne i dopustivo rješenje primarnog problema.

U dualnoj simpleks–metodi zahtijevamo $\bar{\mathbf{c}} \geq \mathbf{0}$ tj. polazimo od bazičnog dopustivog rješenja dualnog problema, dok za $\mathbf{x}$ zahtijevamo samo da je bazično rješenje primarnog problema. Za razliku od simpleks metode, u dualnoj simpleks metodi najprije se određuje varijabla koja izlazi iz baze. Kandidati su one varijable čija je vrijednost negativna, odnosno određuje se l takav da je $x_{B(l)} < 0$. Tada je l-ti redak tablice pivot–redak i oblika je $(x_{B(l)}, v_1, \dots, v_n)$.

Nadalje, kako bi se odredila varijabla koja ulazi u bazu, određuje se indeks j takav da je

$$\frac{\bar{c}_j}{|v_j|} = \min_{\{i:\, v_i<0\}} \frac{\bar{c}_i}{|v_i|}$$

i u bazu ulazi varijabla x_j. Element v_j je tada pivot–element. Promjena baze vrši se kao i kod simpleks metode tako da se pivot–element svodi na jedinicu i s pivot–elementom ponište ostali elementi u stupcu u kojem se pivot nalazi.

Primijetimo da prilikom promjene baze nultom retku u tablicu dodajemo vektor

$$-\frac{\bar{c}_j}{v_j}[x_{B(l)}, v_1, \dots, v_n].$$

Novi $\overline{c}_i$ je oblika $\overline{c}_i - v_i\frac{\overline{c}_j}{v_j} = v_i\frac{\overline{c}_i}{v_i} + v_i\frac{\overline{c}_j}{|v_j|}$. Kako je $v_j < 0$ a $\overline{c}_j \geq 0$, te zbog izbora od j, svaki novi $\overline{c}_i$ je nenegativan:

a) Ako je $v_i \geq 0$, onda $v_i\frac{\overline{c}_i}{v_i} + v_i\frac{\overline{c}_j}{|v_j|} = v_i(\frac{\overline{c}_i}{v_i} + \frac{\overline{c}_j}{|v_j|}) \geq 0$ jer je produkt dva nenegativna broja.

b) Ako je $v_i < 0$, onda $v_i\frac{\overline{c}_i}{v_i} + v_i\frac{\overline{c}_j}{|v_j|} = v_i(\frac{\overline{c}_j}{|v_j|} - \frac{\overline{c}_i}{|v_i|}) \geq 0$ jer je produkt dva broja manja ili jednaka nuli.

To znači da je novo bazično rješenje dualnog problema opet dopustivo. Dakle, promjenom baze prelazimo od jednog bazičnog dopustivog rješenja dualnog problema na drugo bazično dopustivo rješenje dualnog problema.

Promatrajmo što se događa s funkcijom cilja tijekom iteracija. U nultom retku na prvoj poziciji se nalazi $-\mathbf{p}^T\mathbf{b}$. Prelaskom u novu bazu tom elementu se dodaje $-x_{B(l)}\frac{\overline{c}_j}{v_j} \leq 0$, što znači da vrijednost funkcije cilja duala strogo raste (za $\overline{c}_j > 0$) ili ostaje nepromijenjen (za $\overline{c}_j = 0$). Dakle, ako su sve nebazične komponente vektora utjecaja pozitivne, vrijednost funkcije cilja dualnog problema će rasti svakom odgovarajućom promjenom baze. Ako je utjecaj u pivot–stupcu jednak 0, tada može doći do ciklusa.

Pojava ciklusa se može izbjeći primjenom **leksikografskog pravila pivotiranja:**

- Izabrati bilo koji redak l takav da je $x_{B(l)} < 0$ za pivot redak.

- Za svaki stupac za koji je $v_i < 0$, podijeliti sve elemente s $|v_i|$ i izabrati leksikografski najmanji stupac. Ako ima više takvih stupaca, odabrati onaj s najmanjim indeksom.

Može se pokazati da metoda završava u konačno mnogo koraka, ako dualna simpleks–metoda započne s tablicom kod koje je $\overline{c} \geq 0$ i ako se koristi leksikografsko pravilo pivotiranja ([2]).

Zapišimo sada sažeto sada jednu iteraciju dualne simpleks–metode.

Iteracija dualne simpleks–metode

0) **Inicijalizacija.** Neka je $\mathbf{p}$ bazično dopustivo rješenje dualnog problema te $\mathbf{B} = [\mathbf{A}_{B(1)}, \ldots, \mathbf{A}_{B(m)}]$ pripadna matrica baze.

1) **Odabir varijable koja izlazi iz baze.** Odrediti pivot–redak l takav da je $x_{B(l)} < 0$. Ako takav redak ne postoji, trenutno bazično dopustivo rješenje je optimalno i algoritam staje.

2) **Odabir varijable koja ulazi u bazu.** Odrediti j takav da je

$$\frac{\overline{c}_j}{|v_j|} = \min_{\{i:\, v_i<0\}} \frac{\overline{c}_i}{|v_i|}.$$

Tada u bazu umjesto stupca $\mathbf{A}_{\mathbf{B}(l)}$ dolazi stupac $\mathbf{A}_j$.
Ako je $v_i \geq 0$ za sve i, tada je optimalno rješenje $+\infty$ i algoritam staje.

3) **Promjena baze.** Napraviti novu matricu baze zamjenom stupca $\mathbf{A}_{B(l)}$ s $\mathbf{A}_j$. Promjena baze se vrši na način kao i kod simpleks– metode (pivotom se poništavaju svi elementi u pivotnom stupcu).

Primjer 5.5. *Riješimo dualnom simpleks–metodom problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\to \min \\ &\textit{uz uvjete} \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\geq 10 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &\leq -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 &\geq 14 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje. *Standardni oblik ovog problema linearnog programiranja glasi*

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\to \min \\ &\textit{uz uvjete} \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_6 &= 5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 - x_7 &= 14 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0 \end{aligned}$$

te je pripadna tablica oblika

$$\begin{array}{r|ccccccc}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_5 = -10 & \boxed{-1} & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
x_6 = -5 & -1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\
x_7 = -14 & -3 & 4 & -5 & 6 & 0 & 0 & 1.
\end{array}$$

Kako su $x_5, x_6, x_7 < 0$, kandidati su za izlazak iz baze. Pretpostavimo da smo odabrali x_5. Nadalje je

$$\min_{v_i<0} \frac{\overline{c}_i}{|v_i|} = \min\{1,1\} = 1$$

pa za ulazak u bazu možemo odabrati x_1 ili x_3. Pretpostavimo da smo odabrali x_1. Tada je odgovarajući tablica

$$\begin{array}{r|ccccccc}
-10 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
x_1 = 10 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
x_6 = 5 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\
x_7 = 16 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1.
\end{array}$$

Kako je $\mathbf{x_B} \geq \mathbf{0}$, slijedi da smo došli do optimalnog rješenja.

Dualna simpleks–metoda može se efikasno koristiti kada je dostupno bazično dopustivo rješenje dualnog problema. Primjerice, jedna od situacija u kojoj je dualna simpleks–metoda korisna je kada smo riješili problem linearnog programiranja primjenom simpleks–metode i želimo riješiti isti problem, ali s drugom desnom stranom $\mathbf{b}$. Tada optimalna baza riješenog problema općenito ne daje bazično dopustivo rješenje za novi problem, odnosno prethodno riješeni problem ne daje nikakve informacije koje se mogu koristiti u novom problemu. No međutim, kako $\mathbf{b}$ ne utječe na $\overline{\mathbf{c}}$, optimalna tablica početnog problema daje dopustivo rješenje dualnog problema. Stoga, umjesto rješavanja primarnog problema dvofaznom simpleks–metodom, možemo primijeniti dualnu simpleks–metodu koristeći optimalnu bazu početnog problema kao početnu bazu za dualnu simpleks–metodu.

Primjer 5.6. *Ako u problemu iz Primjera 5.5 desnu stranu zamjenimo s $[5,-1,20]^T$, tada možemo iskoristiti posljednju tablicu. Budući da o $\mathbf{b}$ ovisi samo prvi stupac, ostatak* *tablice se može izravno prenijeti. Odgovarajući tablica za novi problem sada glasi*

$$\begin{array}{c|ccccccc}
-5 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
x_1 = 5 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
x_6 = 4 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 \\
x_7 = -5 & 0 & 1 & \boxed{-2} & 3 & -3 & 0 & 1.
\end{array}$$

pri čemu prvi stupac dobijemo ponovno računajući $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{c_B}^T\mathbf{x_B}$. *Varijabla* x_7 *izlazi iz baze, a ulazi* x_3, *te dobivamo tablicu*

$$\begin{array}{c|ccccccc}
-4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
x_1 = 5/2 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
x_6 = 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\
x_3 = 5/2 & 0 & -1/2 & 1 & -3/2 & 3/2 & 0 & -1/2
\end{array}$$

Kako je $\mathbf{x_B} \geq \mathbf{0}$, *došli smo do optimalnog rješenja* $x^* = [5/2, 0, 5/2, 0, 0, 9, 0]^T$.

Također, dualna simpleks–metoda pogodna je i ako nakon rješavanja problema bilo simpleks, bilo dualnom simpleks–metodom naknadno u skup uvjeta dodamo nove dodatne uvjete.

Primjer 5.7. *Pretpostavimo da smo u skup uvjeta u Primjeru 5.5 dodali još jedan dodatni uvjet*

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \leq 6$$

odnosno

$$x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_8 = 6.$$

Tada je potrebno u posljednju tablicu iz primjera 5.5 dodati jedan dodatni redak koji odgovara novom uvjetu i novi stupac koji odgovara varijabli x_8:

$$\begin{array}{c|cccccccc}
-10 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
x_1 = 10 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
x_6 = 5 & 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
x_7 = 16 & 0 & 1 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 \\
x_8 = 6 & 1 & 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}$$

Poništimo li u zadnjem retku elemente koji odgovaraju baznim varijablama x_1,x_6 *i* x_7, *dobivamo tablicu*

-10	0	2	0	2	1	0	0	0
$x_1 = 10$	1	-1	1	-1	-1	0	0	0
$x_6 = 5$	0	1	-2	3	-1	1	0	0
$x_7 = 16$	0	1	-2	3	-3	0	1	0
$x_8 = -4$	0	2	2	-2	1	0	0	1.

Nadalje varijabla x_8 *izlazi iz baze a u bazu ulazi* x_4:

-14	0	4	2	0	2	0	0	1
$x_1 = 12$	1	-2	0	0	$-3/2$	0	0	$-1/2$
$x_6 = -1$	0	4	1	0	$-1/2$	1	0	$3/2$
$x_7 = 10$	0	4	1	0	$-3/2$	0	1	$3/2$
$x_4 = 2$	0	1	1	-1	$1/2$	0	0	$1/2$.

Sada je jedini kandidat za izlazak iz baze x_6, *dok u bazu ulazi* x_5:

-18	0	20	6	0	0	4	0	7
$x_1 = 15$	1	-14	-3	0	0	-3	0	-5
$x_5 = 2$	0	-8	-2	0	1	-2	0	-3
$x_7 = 13$	0	-8	-2	0	0	-3	1	-3
$x_4 = 1$	0	5	2	-1	0	1	1	2

Kako je $\mathbf{x_B} \geq 0$, *došli smo do optimalnog rješenja* $x^* = [15, 0, 0, 1, 2, 0, 13, 0]^T$.

5.5 Zadaci

Zadatak 5.1. *Neka je zadan problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &\rightarrow \max \\ &\textit{uz uvjete} \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Napišite odgovarajući dualni problem navedenog problema. Što možete reći o dopustivom području primarnog, odnosno dualnog problema?

Rješenje. Dualni problem glasi

$$\begin{aligned} 4p_1 + 2p_2 &\to \max \\ \text{uz uvjete} & \\ p_1 + p_2 &\leq -3 \\ -p_1 - p_2 &\leq -7 \\ p_1, p_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 5.2. *Koristeći uvjete komplementarnosti provjerite je li* $\mathbf{x}^\star = [1, -1, 2, 0, -3]^T$ *optimalno rješenje problema linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 - 11x_3 + 4x_4 &\to \min \\ \textit{uz uvjete} & \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 &= 6 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 - 3x_5 &\geq 4 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 - 5x_4 + x_5 &\geq -8 \\ x_1, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Zadatak 5.3. *Formulirajte dualni problem sljedećeg problema linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\to \max \\ \textit{uz uvjete} & \\ 2x_1 + x_2 &\leq 100 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 80 \\ x_2 &\leq 30 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

i zapišite ga u standardnom obliku. Riješite dobiveni dualni problem simpleks–metodom, te odredite rješenje primarnog problema.

Rješenje. Rješenje dualnog problema $p^* = [-4/3, -1/3, 0]^T$, rješenje primarnog problema $\mathbf{x}^* = [40, 20]^T$.

Zadatak 5.4. *Neka je zadan problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min \\ \textit{uz uvjete} & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} &\geq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Formirajte dualni problem i napišite ga u ekvivalentnom minimizacijskom obliku. Argumentirajte koji su uvjeti na matricu $\mathbf{A}$ *i vektore* $\mathbf{b}$ *i* $\mathbf{c}$ *potrebni da bi dualni problem bio identičan primarnom problemu. Konstruirajte primjer pod kojim će ti uvjeti biti zadovoljeni.*

Rješenje. Za antisimetričnu matricu $\mathbf{A}$ i $\mathbf{b} = -\mathbf{c}^T$.

Zadatak 5.5. *Neka je* $\mathbf{A}$ *simetrična matrica te neka je zadan problem linearnog programiranja*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \rightarrow & \min\limits_{\mathbf{x}} \\ \textit{uz uvjete} & & \\ \mathbf{A}\mathbf{x} & \geq & \mathbf{c} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array}$$

Dokažite: ako je $\mathbf{x}^*$ *vektor sa svojstvom* $\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{c}$ *i* $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$*, onda je* $\mathbf{x}^*$ *optimalno rješenje zadanog problema linearnog programiranja.*

Zadatak 5.6. *Napišite dualni problem sljedećeg problema linearnog programiranja: Pretpostavimo da na raspolaganju imamo namirnice* $N_1, \ldots, N_n$*. Cijena po jedinici namirnice* N_j *iznosi* c_j*,* $j = 1, \ldots, n$*. U namirnicama su prisutni nutritivni elementi* $E_1, \ldots, E_m$*, pri čemu je u namirnici* N_j *prisutno* a_{ij}*,* $i = 1, \ldots, m$*,* $j = 1, \ldots, n$*, nutritivnog elementa* E_i*. Poznato je da svaka osoba mora tijekom jednog dana unijeti barem* b_i *jedinica nutritivnog elementa* E_i*,* $i = 1, \ldots, m$*. Koliko treba konzumirati pojedine namirnice da bi se zadovoljila dnevna potreba za nutritivnim elementima, a da bi se pri tome minimizarala cijena prehrane?*

Rješenje.

$$\begin{array}{rcl} b_1p_1 + \cdots + b_mp_m & \rightarrow & \max \\ \text{uz uvjete} & & \\ a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{m1}p_m & \leq & c_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{m2}p_m & \leq & c_2 \\ & \vdots & \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \cdots + a_{mn}p_m & \leq & c_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_m & \geq & 0. \end{array}$$

Zadatak 5.7. *Napišite dualni problem sljedećeg problema:*

Jedna namirnica nalazi se u m skladišta iz kojih se opskrbljuje n prodavaonica. Skladište i, $i = 1, \ldots, m$ *sadrži količinu* s_i *te namirnice a prodavaonici j,* $j = 1, \ldots, n$ *treba dostaviti količinu* k_j *namirnice. Neka je* c_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ *cijena prijevoza jedinice namirnice od skladišta i do prodavaonice j. Treba opskrbiti sve prodavaonice potrebnom količinom namirnice tako da ukupna cijena prijevoza bude minimalna.*

Rješenje. Odgovarajući dualni problem glasi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} s_i p_i + \sum_{j=1}^{n} k_j p_{m+j} &\rightarrow \max \\ \text{uz uvjete} & \\ p_i + p_{m+j} &\leq c_{ij},\ \forall i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \\ p_i &\leq 0, \forall i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Zadatak 5.8. *Napišite dualni problem sljedećeg problema:*

Neko postrojenje proizvodi n različitih proizvoda koristeći m različitih sirovina. Neka je a_j, $j = 1, \ldots, m$ *dostupna količina j-te sirovine, a* b_{ij} *količina j-te sirovine za proizvodnju jedne jedinice proizvoda i,* $i = 1, \ldots, n$*. Cijena jedinice proizvoda i je* c_i*. Potrebno je odrediti koliko jedinica svakog proizvoda treba proizvesti da bi se maksimizirala ukupna cijena proizvedenih proizvoda.*

Rješenje. Odgovarajući dualni problem glasi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} a_j p_j &\rightarrow \max \\ \text{uz uvjete} & \\ \sum_{j=1}^{m} b_{ij} p_j &\leq -c_i,\ \forall i = 1, \ldots, n \\ p_j &\leq 0, \forall j = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Zadatak 5.9. *Dualnom simpleks–metodom riješiti problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} 9x_1 + 6x_2 &\rightarrow \min \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 + x_2 &\geq 4 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

a) *Odredite rješenje danog problema ako se još doda uvjet* $x_1 + 2x_2 \geq 5$.

b) *Odredite rješenje danog problema ako se desna strana zamijeni vektorom* $[2, 5]^T$.

Rješenje. Za početni problem je $x^* = [1, 3, 0, 0]^T$, a) $x^* = [1, 3, 0, 0, 2]^T$, b) $x^* = [1.5, 0.5, 0, 0]^T$.

Zadatak 5.10. *Dualnom simpleks–metodom riješite problem linearnog programiranja*

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 &\to \min \\ \textit{uz uvjete} & \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &\geq 10 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &\geq 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4 &\geq 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Rješenje. $\mathbf{x}^* = [10, 0, 0, 0, 0, 4, 15]^T$.

POGLAVLJE 6

Iz povijesti linearnog programiranja

Počeci linearnog programiranja sežu u početak 19. stoljeća, a vežu se uz ime J. B. J. Fouriera koji je rješavao sustave linearnih nejednadžbi. Pojačan interes za ovo područje počinje 1940. godine radovima američkog matematičara G. B. Dantziga (vidjeti [7, 8, 9]) i ruskog matematičara L. V. Kantorovicha (vidjeti [11]). Motivi za njihove radove bili su složeni problemi planiranja prije i u vrijeme Drugog svjetskog rata. U to je vrijeme razvijena vrlo učinkovita **simpleks–metoda** iz 1948. godine (vidjeti [8]) za numeričko rješavanje problema linearnog programiranja koja se bez obzira na neke nedostatke, kao što je eksponencijalna složenost, u različitim primjenama koristi i danas.

U razdoblju od 1950. do 1960. detaljno je razvijana teorija linearnog programiranja, kao i odgovarajuće primjene. U tom su razdoblju nastali brojni teorijski rezultati kao što su **teorija dualnosti**, koja je vezana uz J. von Neumanna. Također, u to vrijeme objavljeni su teorijski rezultati koji se odnose na rješavanje problema velikih dimenzija, kao i mnoštvo različitih primjena linearnog programiranja.

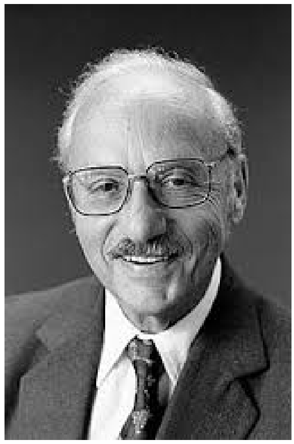
Od 1970. primjenom računala linearno programiranje počinje se intenzivno koristiti u komercijalne svrhe pri rješavanju problema koje dolaze iz različitih područja primjena kao što su problemi transporta, problemi optimalne proizvodnje i distribucije energije, problemi u telekomunikacijama te općenito u problemima proizvodnje. Godine 1975. ruski matematičar L. Kantorovich i američki ekonomist T. Koopmans dobili su Nobelovu nagradu za ekonomiju za doprinos teoriji optimalne alokacije resursa u kojem je linearno programiranje odigralo važnu ulogu.

Razdoblje 80-ih godina dvadesetog stoljeća obilježio je razvoj novih algoritama za rješavanje problema lineranog programiranja. Godine 1979. armenski matematičar L. Khaciyan predstavio je **elipsoidalnu metodu**, iterativnu metodu u kojoj se generira niz elipsoida koji sadrže točku minimuma funkcije cilja, a čiji volumeni monotono padaju u svakom koraku. Elipsoidalna metoda rješava probleme linearnog programiranja u broju koraka koji je polinomijalna funkcija broja podataka koji definiraju problem linearnog programiranja, što znači da je elipsoidalna metoda brža od simpleks–metode u slučajevima u kojima simpleks–metoda ima veliku složenosti. Potpuni algoritam te dokazi odgovarajućih teorijskih rezultata mogu se naći u [2]. Neovisno o dobrim teorijskim svojstvima kao što je polinomijalna složenosti u praktičnim situacijama simpleks metoda se pak pokazuje superiornom.

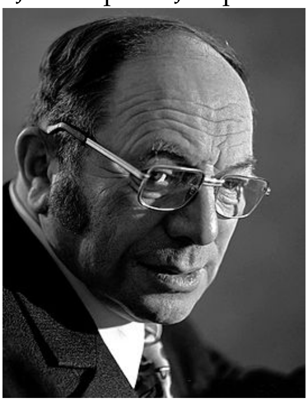
Godine 1984. indijski matematičar N. Karmarkar razvio je **metodu unutarnje točke** (eng. *interior point method*), koja se po svom autoru često zove i Karmarkarova metoda, a koja za razliku od obilaska vrhova poliedra, optimalno rješenje traži "krećući" se po unutrašnjosti dopustivog područja. Metoda unutarnje točke kombinira poželjna teorijska svojstva elipsoidalne metode i praktičnu prednost simpleks metode (vidjeti [2]).

Na kraju spomenimo da se u različitim područjima primjena koriste mnoga proširenja i poopćenja problema linearnog programiranja. Najvažnija su **cjelobrojno programiranje**-problem uvjetne optimizacije s linearnom funkcijom cilja i linearnim uvjetima, ali kod kojeg su neke ili sve varijable ograničene na cjelobrojne ([2]), **kvadratično programiranje**-problem uvjetne optimizacije s kvadratičnom funkcijom cilja i linearnim uvjetima ([16]), **nelinearno programiranje**-problem uvjetne optimizacije s nelinearniom funkcijom cilja ili nelinearnim uvjetima ([21]) te **stohastičko programiranje**-problem uvjetne optimizacije koji uključuje nedeterminizam.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768.–1830.)



George Bernard Dantzig (1914.–2005.)



Leonid Vitaliyevich Kantorovich (1912.–1986.)

John von Neumann (1903.—1957.)

Leonid Genrikhovich Khachiyan (1952.—2005.)

Slika 6.1: Fotografije nekih matematičara koji su bili značajni za razvoj terije linearnog programiranja

Literatura

[1] M. Avriel, *Nonlinear Programming: Analysis and Methods*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.

[2] D. Bertsimas, J. N. Tsitsiklis, *Introduction to Linear Optimization*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1997.

[3] A. Björck, *Numerical Methods for Least Squares Problems*, SIAM, Philadelphia, 1996.

[4] R. G. Bland, *New Finite Pivoting Rules for Simplex Methos*, Mathematics of Operations Research, **2**(1977), 103-107.

[5] R. J. Boscovich, *De litteraria expeditione per pontificiam ditionem, et synopsis amplioris operis, ac habentur plura eius ex exemplaria etiam sensorum impressa, Bononienci Scientiarum et Artium Znstituto Atque Academia Commentarrii*, **4**(1757), 353–396.

[6] J. A. Cadzow, *Minimum l1, l2 and l1 norm approximate solutions to an overdetermined system of linear equations, Digital Signal Processing*, **12**(2002), 524–560.

[7] G. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, Princeton, 1963.

[8] G. Dantzig, *Programming in a linear structure*, U.S. Air Force Comptroller, USAF, Washington, D.C, 1948.

[9] G. Dantzig, D. R. Fulkerson, S. Johnson, *Solution of a large scale traveling salesman problem*, Operations Research **2**(1954), 393–410.

[10] P. E. Gill, W. Murray, M. H. Wright, Practical Optimization, Academic Press, 1981.

[11] L. V. Kantorovich, *Mathematical Methods of Organizing and Planning Production*, Management Science, **6**(1939), 366–422.

[12] D. Kincaid, W. Cheney, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole Publishing Company, New York, 1996.

[13] R. Kress, *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[14] J. H. Mathews, K. D. Fink, *Numerical Methods Using MATLAB*, Prentice Hall, 1999.

[15] K. G. Murty, *Linear and Combinatorial Programming*, John Wiley & Sons, Inc., 1983.

[16] L. Neralić, *Uvod u matematičko programiranje 1*, Element, Zagreb, 2003.

[17] K. Sabo, R. Scitovski, *The best least absolute deviations line – properties and two efficient methods*, ANZIAM Journal, **50**(2008), 185–198.

[18] K. Sabo, R. Scitovski, I. Vazler, *Searching for a best LAD-solution of an overdetermined system of linear equations motivated by searching for a best LADhyperplane on the basis of given data*, Journal of Optimization Theory and Applications, **149**(2011), 293–314.

[19] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, Inc., NY, SAD, 1999.

[20] R. Scitovski, N. Truhar, Z. Tomljanović, *Metode optimizacije*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku., Osijek, 2014.

[21] R. Scitovski, *Numerička matematika*, Sveučilište u Osijeku, Odjel za matematiku, 2014.

[22] K. Šorić, *Linearno programiranje*, Ekonomski fakultet, Zagreb, 2005.

Kazalo

Ivana Kuzmanović Kristian Sabo

Linearno programiranje

U različitim primijenjenim istraživanjima pojavljuju se problemi u kojima je potrebno minimizirati ili maksimizirati zadanu funkciju, u ovisnosti o jednoj ili više varijabli. Grana matematike koje izučava ovakve probleme naziva se optimizacija. Optimizacijski problemi ugrubo se mogu podijeliti u dvije bitno različite skupine: probleme bezuvjetne optimizacije te probleme uvjetne optimizacije. U ovom udžbeniku promatra se jedan specijalni problem uvjetne optimizacije koji je u literaturi poznat kao problem linearnog programiranja.

ISBN 978-953-6931-88-0
9 789536 931880