Uvod u optimizaciju

Kristian Sabo
Radni materijal za predavanja na Poslijediplomskom doktorskom studiju, Strojarski fakultet Slavonski Brod

1 Minimizacija funkcije jedne varijable

Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna realna funkcija. Kažemo da f u točki $x^* \in \mathbb{R}$ postiže lokalni minimum ako postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $f(x^*) \leq f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ za koji je $|x - x^*| < \delta$. Ako je $f(x^*) \leq f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ kažemo da f u x^* postiže globalni minimum. Ako je x^* točka u kojoj funkcija f postiže globalni minimum funkcije f na $\mathbb{R}$ pišemo

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}} f(x).$$

Ako za dva puta neprekidno derivabilna funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ te za točku $x^* \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f'(x^*) = 0 \quad \text{i} \quad f''(x^*) > 0, \tag{1}$$

onda je x^* točka lokalnog minimuma funkcije f. Uvjet (1) zovemo uvjet optimalnosti. Uočimo da x^* koja zadovoljava svojstvo (1), općenito ne mora biti točka u kojoj se postiže globalni minimum funkcije f. Problem određivanja točke u kojoj se postiže globalni minimum funkcije f znatno je teži problem i sastoji se u tome da treba odrediti skup svih točaka $\mathcal{L}$, u kojima funkcija f postiže lokalni minimum, te među njima odabrati onu točku x^* za koju je $f(x^*) \leq f(x)$ za svaki $x \in \mathcal{L}$.

Ako je x^* točka za koju vrijedi $f'(x^*) = 0$, kažemo da je stacionarna točka funkcije f. U svrhu određivanja točaka u kojima derivabilna funkcija f postiže lokalni minimum, potrebno je odrediti stacionarne točke funkcije f, odnosno rješiti jednadžbu $f'(x) = 0$. Ako se jednadžba

$$f'(x) = 0, \tag{2}$$

može analitički riješiti, stacionarne točke mogu se odrediti egzaktno. Najčešće se u primjenama rješenje jednadžbe (2) ne može dobiti egzaktno te se za njezino rješavanje koristi neka iterativna numerička metoda. Najznačajnija iterativna numerička metoda za određivanje lokalnih ekstrema, koja zahtijeva poznavanje prve i druge derivacije funkcije f je Newtonova metoda.

U primjenama je čest problem određivanje lokalnih minimuma funkcija koje nisu derivabilne u svim točkama svoje domene. U tom se slučaju uvjet optimalnosti (1) ne može koristiti te se tada za određivanje lokalnih minimuma koriste tzv. direktne metode, koje ne zahtjevaju poznavanje derivacije. Najpoznatije direktne metode su Metoda zlatnog reza, Fibbonacijeva metoda, Metoda parabole, Brentova metoda.

Ukratko ćemo opisat dvije iterativne metode: Newtonovu metodu za derivabilne funkcije i Metodu parabole za nederivabilne funkcije.

1.1 Newtonova metoda

Pretpostavimo da je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno derivabilna funkcija te neka je $x_0 \in \langle a, b\rangle$ početna aproksimacija. Razvijemo li funkciju f u Taylorov red u okolini točke x_0 te se zadržimo na kvadratnom članu dobivamo:

$$f(x) \approx f_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0).$$

Osnovna ideja Newtonove metode je da se umjesto traženja stacionarne točke funkcije f potraže stacionarne točke funkcije f_2, odnosno da se rješava jednadžba

$$f_2'(x) = f'(x_0) + (x - x_0)f''(x_0) = 0.$$

Lako se vidi da uz uvjet $f''(x_0) \neq 0$, funkcija f_2 ima jedinstvenu stacionarnu točku $x = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)}$.

Motivirani ovim postupkom možemo izgraditi sljedeći algoritam:

Newtonova metoda

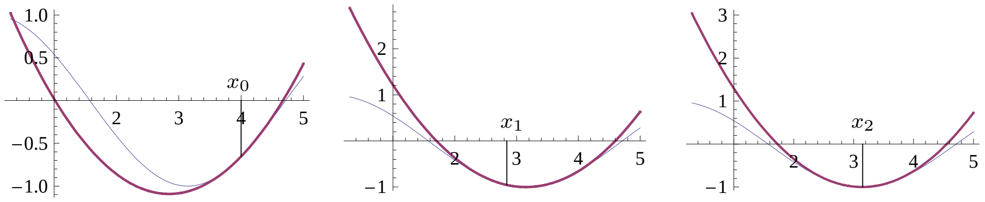
ponavljaj $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$

sve dok $|f'(x_{k+1})|$ ne postane dovoljno malo.

Može se pokazati da uz određene uvjete na funkciju f i početnu aproksimaciju x_0 Newtonova metoda konvergira ka stacionarnoj točki funkcije f.

Na Slici 1 prikazane su tri iteracije Newtonove metode, pri čemu je graf funkcije f_2 prikazan debljom linijom.



Slika 1: Tri iteracije Newtonove metode

Ako je (x_k) niz dobiven nekom iterativnom metodom, koji konvergira ja x^*, kažemo da je brzina konvergencije metode jednaka r ako postoji konstanta A i prirodni broj k_0 takav da je $|x^* - x_{k+1}| \leq A|x^* - x_k|^r$ za svaki $k \geq k_0$. Može se pokazati da je brzina konvergencije Newtonove metode $r = 2$.

1.2 Metoda parabole

Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja općenito nije derivabilna u nekim točkama intervala $\langle a, b\rangle$. Pretpostavimo da je x^* nepoznata točka u kojoj se postiže lokalni minimum funkcije f. Odaberimo tri nekolinearne točke $(\alpha_1, f(\alpha_1)), (\alpha_2, f(\alpha_2))$ te $(\alpha_3, f(\alpha_3))$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \langle a, b\rangle$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$, koje leže na grafu funkcije f te za koje vrijedi

$$\min_{i=1,2,3} \alpha_i \leq x^* \leq \max_{i=1,2,3} \alpha_i.$$

U tom slučaju postoji jedinstveni interpolacijski polinom P drugog stupnja koji prolazi kroz te tri točke te glasi

$$P(x) = \frac{(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)}{(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)} f(\alpha_1) + \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_3)}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)} f(\alpha_2) + \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)} f(\alpha_3).$$

Slično kao kod Newtonove metode i ovdje je osnovna ideja da se umjesto stacionarnih točaka fukcije f potraže stacionarne točke kvadratne funkcije P. Nije teško vidjeti da rješenje jednadžbe $P'(x) = 0$ glasi

$$\overline{x} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{2} \frac{(f(\alpha_1) - f(\alpha_2))(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_3)f(\alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2)f(\alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)f(\alpha_3)} \tag{3}$$

Algoritam - metoda parabole

Korak 0 Zadati točnost $\varepsilon > 0$. Odrediti skup $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, $i \neq j$ za koje vrijedi $\min_{i=1,2,3} \alpha_i \leq x^* \leq \max_{i=1,2,3} \alpha_i$. Izračunati $f(\alpha_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Korak 1 Odrediti $\overline{x}$ prema formuli

$$\overline{x} = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{1}{2}\frac{(f(\alpha_1) - f(\alpha_2))(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)}{(\alpha_2 - \alpha_3)f(\alpha_1) + (\alpha_3 - \alpha_2)f(\alpha_2) + (\alpha_1 - \alpha_2)f(\alpha_3)}.$$

Korak 2 Ako je $(\overline{x} - \alpha_1)(\overline{x} - \alpha_3) \geq 0$ idi na Korak 3, inače idi na Korak 4.

Korak 3 Konstruiraj novi skup $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ iz $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ i $\overline{x}$ i idi na Korak 1.

Korak 4 Ako je $|\overline{x} - \alpha_2| < \varepsilon$, idi na Korak 5, inače idi na Korak 3.

Korak 5 Kraj.

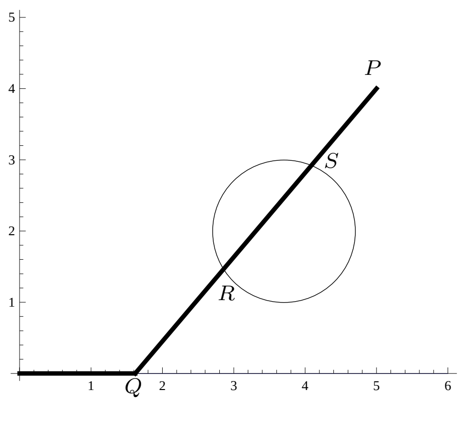
Može se pokazati da je brzina konvergencije metode parabole $r = 1.32$. Navedena metoda u literaturi je poznata kao metoda jednosdimenzionalne minimizacije primjenom kvadratne interpolacije s tri točke ([4]).

U svrhu minimizacije funkcije f mogu se koristiti mogućnosti programskog paketa *Mathematica*. Za traženje lokalnog minimuma funkcije f može se upotrijebiti naredba `FindMinimum[f[x],`x_0`]`, pri čemu je x_0 početna aproksimacija, dok se primjenom naredbe `NMinimize[f[x],x]` dobiva točka u kojoj se postiže globalni minimum funkcije f.

2 Neki problema koji se svode na minimizaciju funkcije jedne varijable

2.1 Problem najkraćeg puta (vidi [1])

Pretpostavimo da se robot kreće iz ishodišta koordinatnog sustava $O = (0, 0)$ te da treba doći do točke $P = (x_p, y_p)$ kao na Slici. Pri tome robot najprije kreće po x osi do točke $Q = (x, 0)$, a nakon toga nastavlja put prema točki P. Na tom putu nailazi na krug K sa središtem u točki $C = (x_c, y_c)$ polumjera r. Kretanje robota treba biti takvo da što je više moguće izbjegne kretanje po području koje je određeno krugom K. Postavlja se pitanje kako odrediti točku Q tako da ukupni put kojeg robot prijeđe bude minimalan.



Slika 2: Problem najkraćeg puta

Označimo s R i S točke u kojima dužina $\overline{QP}$ siječe rub kruga K. Uočimo da je optimalni puto robota onaj koji ima svojstvo da je da je

$$d = |\overline{OQ}| + |\overline{QP}| + \rho|\overline{RS}|. \tag{4}$$

minimalno, pri čemu je $\rho > 0$ parametar s kojim određujemo koliko ćemo optimalni put učiniti dalekim od kruga K. Ako je ρ velik onda će optimalni put vrlo malo prolaziti ili uopće neće prolaziti kroz područje K. S druge strane ako je $\rho \to 0$, onda će optimalni put biti blizak dužini $\overline{OP}$.

Koordinate točaka koje leže na dužini $\overline{QP}$ imaju oblik

$$(1-\lambda)x + \lambda x_p, \lambda y_p) = (x + \lambda(x_p - x), \lambda y_p),\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Dužina $\overline{QP}$ siječe krug K za one $\lambda \in [0,1]$ za koje je

$$(x + \lambda(x_p - x) - x_c)^2 + (\lambda y_p - y_c)^2 - r^2 = 0,$$

što se može napisati u obliku

$$\alpha(x)\lambda^2 + \beta(c)\lambda + \gamma(x) = 0, \tag{5}$$

gdje su

$$\alpha(x) = (x - x_p)^2 + y_p^2, \quad \beta(x) = 2((x_p - x)(x - x_c) - y_p y_c), \quad \gamma(x) = (x - x_c)^2 + y_c^2 - r^2.$$

Ako je $\delta(x) = \beta^2(x) - 4\alpha(x)\gamma(x) \leq 0$, onda je $|\overline{RS}| = 0$. Ako pretpostavimo da je $\delta(x) > 0$, dobivamo rješenja jednadžbe (5):

$$\lambda_1(x) = \frac{-\beta(x) + \sqrt{\delta(x)}}{2\alpha(x)}, \quad \lambda_2(x) = \frac{-\beta(x) - \sqrt{\delta(x)}}{2\alpha(x)}.$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
|\overline{RS}| &= |\overline{QP}| - |\overline{QR}| - |\overline{PS}| \\
&= |\overline{QP}| - \sqrt{\lambda_1(x)^2(x_p - x)^2 + \lambda_1^2(x)y_p^2} - \sqrt{(x + \lambda_2(x)(x_p - x) - x_p)^2 + (\lambda_2(x)y_p - y_p)^2} \\
&= (\lambda_1(x) - \lambda_2(x))|\overline{QP}| \\
&= \frac{\delta(x)}{\alpha(x)}\sqrt{(x_p - x)^2 + y_p^2}.
\end{aligned}$$

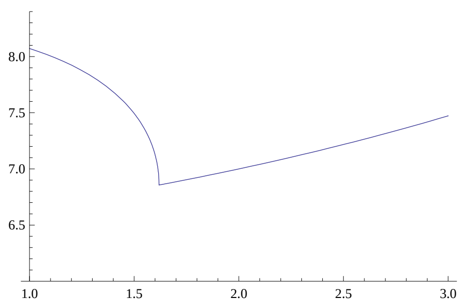
Konačno vrijedi

$$v(x) := |\overline{RS}| = \begin{cases} \frac{\delta(x)}{\alpha(x)}\sqrt{(x_p - x)^2 + y_p^2}, & \delta(x) > 0,\ \lambda_1(x), \lambda_2(x) \in [0,1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Na ovaj način odredjivanje optimalne točke Q sveli na problem minimizacije funkcije

$$f(x) = x + \sqrt{(x_p - x)^2 + y_p^2} + \rho v(x).$$

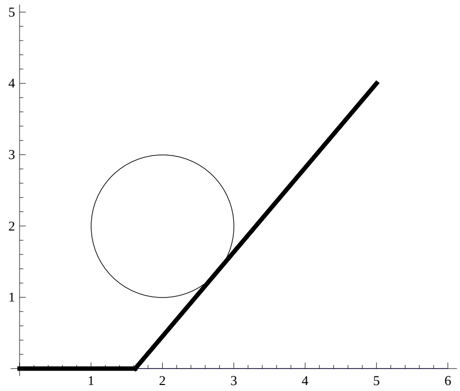
Na Slici 3 je prikazan graf funkcije f za $\rho = 1$, $C = (2,2)$, $P = (5,4)$ te $r = 1$.



Slika 3: Graf funkcije f za $\rho = 1$, $C = (2,2)$, $P = (5,4)$ te $r = 1$.

Sa slike se naslućuje da funkcija nije derivabilna u točki u kojoj postiže globalni minimum te se stoga za njezinu minimizaciju treba koristiti neka direktna metoda, kao što je primjerice Metoda parabole.Primjenom spomenute metode dobivamo da je $x^* = 1.6188$

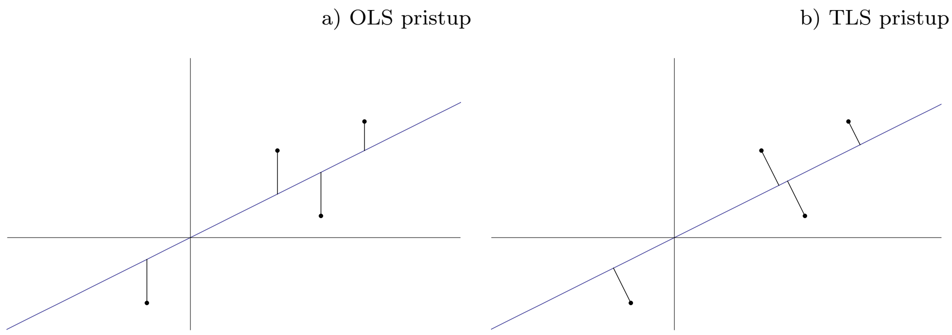
Navedeni problem specijalni je slučaj generalnijeg problema koji se može naći u [2].



Slika 4: Optimalni put za $\rho = 1$, $C = (2, 2)$, $P = (5, 4)$ te $r = 1$.

2.2 Problem najmanjih običnih kvadrata i najmanjih potpunih kvadrata

Pretpostavimo da su zadane točke (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ na osnovi kojih treba odrediti pravac oblika $y = k\,t$, $k \in \mathbb{R}$, koji prolazi kroz ishodište i ima svojstvo da u nekom smislu najbolje aproksimira zadane podatke. U svrhu rješavanja ovog problema promatrat ćemo dva principa: princip najmanjih običnih kvadrata-OLS (engl. ordinary least square) i princip najmanjih potpunih kvadrata-TLS (engl. ordinary least square).



Slika 5: OLS i TLS pristupi

Princip najmanjih običnih kvadrata (Slika 5 a)) sastoji se u tome da minimiziramo sumu kvadrata vertikalnih udaljenosti točaka (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ do pravca $y = kt$, tj. da minimiziramo funkciju

$$f_{OLS}(k) = \sum_{i=1}^{m} (kt_i - y_i)^2.$$

Ako je $k^*_{OLS} = \operatorname{argmin}_{k \in \mathbb{R}} f_{OLS}(k)$, onda za pravac $y = k^*_{OLS} t$ kažemo da je najbolji OLS pravac.

Princip najmanjih potpunih kvadrata ((Slika 5 b))) podrazumijeva minimiziraciju sume kvadrata pravih udaljenosti točaka (t_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$ do pravca $y = kt$, tj. minimizaciju funkcije

$$f_{TLS}(k) = \sum_{i=1}^{m} \frac{(kt_i - y_i)^2}{1 + k^2}.$$

Ako je $k^*_{TLS} = \operatorname{argmin}_{k \in \mathbb{R}} f_{TLS}(k)$, onda pravac $y = k^*_{TLS} t$ zovemo najbolji TLS pravac.

Odredimo k^*_{OLS}. Lako se vidi da je $f'_{OLS}(k) = 2 \sum_{i=1}^{m} (kt_i - y_i) t_i$ te $f''_{OLS}(k) = 2 \sum_{i=1}^{m} t_i^2 > 0$, za svaki $k \in \mathbb{R}$, odakle slijedi da je jedinstvena stacionarna točka funkcije f_{OLS} ujedno točka u kojoj funkcija f_{OLS} postiže globalni minimim te glasi

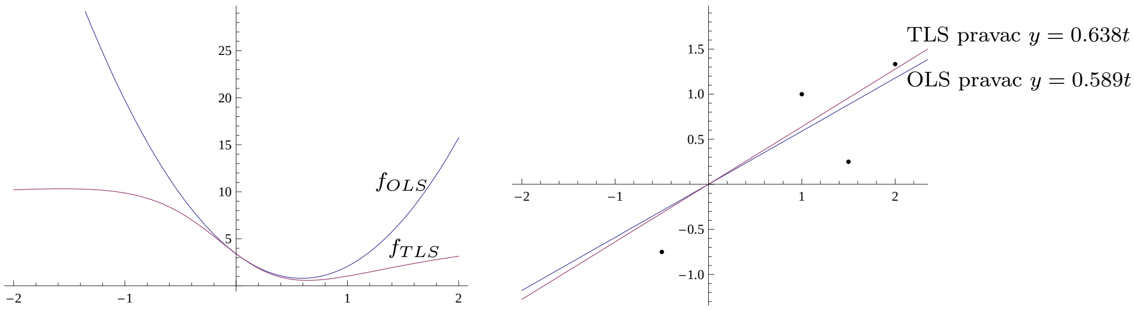
$$k^*_{LS} = \frac{\sum_{i=1}^m t_i y_i}{\sum_{i=1}^m t_i^2}.$$

Problem određivanja točke a^*_{TLS} znatno je složeniji. Može se pokazati da funkcija f_{TLS} ima dvije stacionarne točke, te je stoga potrebno ispitati predznak druge derivacije. Za minimizaciju funkcije f_{TLS} moguće je koristiti i metodu parabole kod koje nije potrebno računati derivaciju.

Na Slici 6 prikazani su najbolji OLS i TLS pravci za skup podataka

$$\Lambda = \left\{(1,1), \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right), \left(2, \frac{4}{3}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)\right\}$$

te grafovi odgovarajućih funkcija f_{OLS} i f_{TLS}



Slika 6: OLS i TLS pravci

2.3 Newtonov zakon hlađenja

Poznati Newtonov zakon hladenja tijela glasi:

Brzina hlađenja tijela proporcionalna je razlici izmedu temperature tijela i temperature okoline.

Pretpostavimo da je neko tijelo zagrijano na temperaturu T_0. Temperaturu okoline T_s smatrat ćemo poznatom konstantnom i nižom od temperature tijela ($T_s < T_0$). Ako s $T = T(t)$ označimo temperaturu tijela u trenutku $t \in [0, \tau]$, onda Newtonov zakon hlađenja tijela možemo zapisati diferencijalnom jednadžbom:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_s), \tag{6}$$

pri čemu je $a > 0$ konstanta proporcionalnosti. Rješenje diferencijalne jednadžbe (6) uz $T(0) = T_0$ glasi

$$T(t) = T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt}. \tag{7}$$

Konstanta $k > 0$ može se odrediti na osnovi podataka mjerenja (t_i, T_i), $i = 1, \ldots, m$, pri čemu su t_i vremenski trenutci, a T_i odgovarajuće temperature tako da graf funkcije T u nekom smislu najbolje aproksimira zadane podatke. Obično se u tu svrhu koriste tri pristupa:

- metoda najmanjih kvadrata, odnosno minimizacija funkcije:

$$F_2(k) = \sum_{i=1}^m (T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt_i} - T_i)^2;$$

- metoda najmanjih apsolutnih odstupanja, odnosno minimizacija funkcije:

$$F_2(k) = \sum_{i=1}^{m} |T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt_i} - T_i|;$$

- metoda namanje maksimalne udaljenosti, odnosno minimizacija funkcije:

$$F_\infty(k) = \max_{i=1,\dots,m} |T_s + (T_0 - T_s)e^{-kt_i} - T_i|.$$

Pri tome je funkcije F_2 derivabilna, no njezine se stacionarne točke ne mogu izračunati eksplicitno te je za odgovarajuću minimizaciju potrebno koristiti neku iterativnu numeričku metodu. Funkcije F_1 i F_∞ nisu derivabilne funkcije te je za njihovu minimizaciju potrebno koristiti neku metodu za nediferencijabilnu minimizaciju.

3 Minimizacija funkcije više variabli

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidni realni funkcional. Kažemo da f u točki $x^* \in \mathbb{R}^n$ postiže lokalni minimum ako postoji $\delta > 0$ takav da vrijedi $f(x^*) \le f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ za koji je $\|x - x^*\| < \delta$. Ako je $f(x^*) \le f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ kažemo da f u x^* postiže globalni minimum. Ako je x^* točka u kojoj funkcija f postiže globalni minimum funkcije f na pišemo

$$x^* = \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} f(x).$$

Može se pokazati da ako za dva puta neprekidno diferencijabilni funkcional $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ te za točku $x^* \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\nabla f(x^*) = 0, \quad \text{i} \quad z^T \nabla^2 f(x^*) z > 0, \forall z \in \mathbb{R}^n, z \ne 0, \tag{8}$$

onda je x^* točka lokalnog minimuma funkcionala f.

Analiza numeričkih metoda za minimizaciju funkcije više varijabli izlaze iz okvira ovih predavanja. U tu svrhu možemo primjerice koristi *Mathematica* naredbe `FindMinimum` ili `NMinimize`.

4 Neki problemi koji se svode na minimizaciju funkcije više varijabli

4.1 Linearni problem najmanjih običnih kvadrata

Pretpostavimo da u Newtonovom modelu hlađenja (7) poznajemo parametar $k > 0$ te da na osnovi izmjerenih podataka (t_i, T_i), $i = 1, \dots, m$ u smislu najmanjih običnih kvadrata trebamo procijeniti početnu temperaturu tijela T_0 i te temperaturu okoline T_s. Označimo li u tu svrhu s $x_1 = T_s$, $x_2 = T_0 - T_s$, $x = [x_1, x_2]^T \in \mathbb{R}^2$, te $y_i = T_i$, $i = 1, \dots, m$ problem se svodi na problem minimizaciju funkcionala $F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$F_2(x) = \|Ax - y\|_2^2,$$

gdje su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & e^{-kt_1} \\ 1 & e^{-kt_2} \\ \vdots & \\ 1 & e^{-kt_m} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}.$$

Općenito ako je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m > n$ te $y \in \mathbb{R}^2$, problem minimizacije funkcionala $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F(x) = \|Ax - y\|_2^2$, zovemo linearni problem najmanjih običnih kvadrata.

Nije teško vidjeti da je $\nabla F(x) = 2(A^T Ax - A^T y)$ te $\nabla^2 F(x) = 2A^T A$. U svrhu određivanja rješenja linearnog problema najmanjih običnih kvadrata prema (8) rješavamo sustav linearnih jednadžbi

$$\nabla F(x) = 2(A^T Ax - A^T y) = 0. \tag{9}$$

Ako je pri tome matrica $A^T A$ regularna, sustav (9) ima jedinstveno rješenje koje glasi $x^* = (A^T A)^{-1} A^T y$. To rješenje ujedno je i globalni minimum funkcije F jer za svaki $z \neq 0$ vrijedi $z^T \nabla^2 F(x) z = z^T A^T A z = (Az)^T (Az) = \|Az\|_2^2 > 0$.

Za rješavanje lineranog problema najmanjih običnih kvadrata može se koristiti *Mathematica* naredba `LeastSquare[A,y]`.

4.2 Verhulstov model

Verhulstov zakon rasta populacije glasi:

"*Brzina rasta populacije u ograničenom životnom prostoru u trenutku $t \in [0, \tau]$ proporcionalna je broju jedinki $N(t)$ u tom trenutku i veličini biološkog potencijala*".

Ako s A označimo biološki maksimum populacije, onda odgovarajuća diferencijalna jednadžba glasi:

$$\frac{dN}{dt} = cN(t)(A - N(t)).$$

Rješenje prethodne diferencijalne jednadžbe je tzv. logistička funkcija

$$N(t) = \frac{A}{1 + be^{-ct}},$$

gdje je b integracijska konstanta.

Konstante $A, b, c > 0$ određuju se na osnovi podataka mjerenja (t_i, N_i), $i = 1, \ldots, m$, pri čemu su t_i vremenski trenutci, a N_i odgovarajuća veličina populacije, tako da graf funkcije N u nekom smislu najbolje aproksimira zadane podatke. Obično se u tu svrhu koriste tri pristupa:

- metoda najmanjih kvadrata, odnosno minimizacija funkcionala:

$$F_2(A, b, c) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{A}{1 + be^{-ct_i}} - N_i \right)^2;$$

- metoda najmanjih apsolutnih odstupanja, odnosno minimizacija funkcionala:

$$F_2(A, b, c) = \sum_{i=1}^{m} \left| \frac{A}{1 + be^{-ct_i}} - N_i \right|;$$

- metoda namanje maksimalne udaljenosti, odnosno minimizacija funkcionala:

$$F_\infty(A, b, c) = \max_{i=1,\ldots,m} \left| \frac{A}{1 + be^{-ct_i}} - N_i \right|.$$

Funkcional F_2 je derivabilan za razliku od funkcionala F_1 i F_∞.

5 Prijedlozi seminarskih radova

1. Slobodne i prisilne oscilacije automobila ([3]).
2. Matematički model reaktora u stacionarnom stanju ([3]).
3. Matematički model elektromagnetske zavojnice ([3]).

Literatura

[1] M. Bartholomew, *Nonlinear Optimization with Engineering Applications*, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2008.

[2] M. Bartholomew, S. C. Parkhurst, S. P. Wilson, *Global optimization approaches to an aircraft routing problem*, European Journal of Operational Research **146**(2003), 417431

[3] J. Caldwell, D. K. S. Ng, *Mathematical Modelling*, Kluwer Academic Publishers, New York, 2004

[4] W. Sun, Y. X. Yuan, *Optimization Theory and Methods, Nonlinear Programming*, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2006