

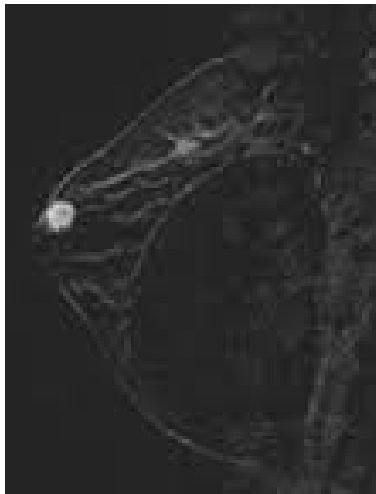
# Određivanje preciznih mjera objekta iz zašumljenih podataka

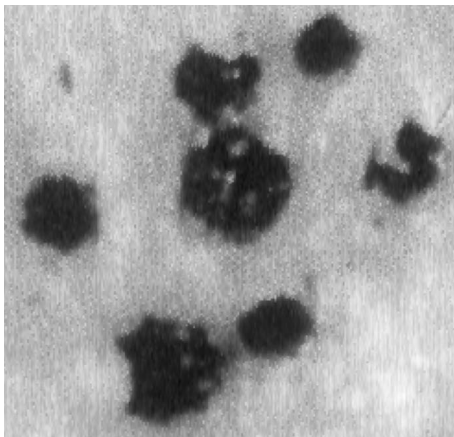
Mirta Benšić, Kristian Sabo, Petar Taler, Safet Hamedović

Sveučilište u Osijeku - Odjel za matematiku

Osijek, ožujak 2019.

Ovaj rad je sufinanciran iz sredstava HRZZ projekta IP-2016-06-6545

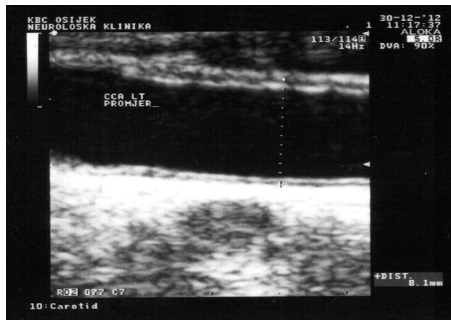








# Primjer



$$X = U + \varepsilon$$

- $U$  i  $\varepsilon$  nezavisne
- $U$  uniform na nekom području
- $\varepsilon$  greška

## Ne znamo točno rubove

- Odrediti duljinu ako odaberemo jedan presjek.
- Odrediti radijus ako je oblik kružni.
- Testirati mijenja li objekt dimenziju iz dvije slike na istom instrumentu snimljene s istim parametrima.

## Metode

- Detekcija ruba
- Dekonvolucija
- Širok spektar neparametarskih metoda



$$X = U + \varepsilon$$

- $U$  i  $\varepsilon$  nezavisne, slučajne
  - $U$  uniformna na nekom području  
Jednodimenzionalni primjer:

$$f_U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & x \in [-a, a] \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

- Jednodimenzionalni primjer za  $\varepsilon$ 
  - normalna

$$f_Y^{(\mathcal{N})}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/(2\sigma^2)}$$

- Laplaceova

$$f_Y^{(\mathcal{L})}(t) = \frac{1}{2\lambda} e^{-|t|/\lambda}$$

# Opći jednodimensionalni model

- $X = U + \varepsilon$
- $f_U(t) = \frac{1}{2a} I_{[-a,a]}(t)$
- $\varepsilon$  neprekidna slučajna varijabla greške s distribucijom  $F_\varepsilon$  i gustoćom  $f_\varepsilon$

$$\Rightarrow f_X(t) = \frac{1}{2a} [F_\varepsilon(a+t) - F_\varepsilon(a-t)]$$

- $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$f_X(t|a, \sigma) = \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{a+t}{\sigma}}^{\frac{a-t}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

- $\varepsilon \sim \mathcal{L}(\lambda)$

$$f_X(t|a, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \sinh \frac{a}{\lambda} e^{-\frac{|t|}{\lambda}}, & a \in (0, |t|], \\ \frac{1}{2a} \left(1 - e^{-\frac{a}{\lambda}} \cosh \frac{t}{\lambda}\right), & a \in (|t|, \infty). \end{cases}$$

# Opći jednodimensionalni model

- $X = U + \varepsilon$
- $f_U(t) = \frac{1}{2a} I_{[-a,a]}(t)$
- $\varepsilon$  neprekidna slučajna varijabla greške s distribucijom  $F_\varepsilon$  i gustoćom  $f_\varepsilon$

$$\Rightarrow f_X(t) = \frac{1}{2a} [F_\varepsilon(a+t) - F_\varepsilon(a-t)]$$

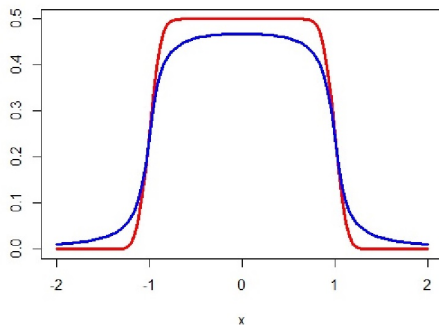
- $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

$$f_X(t|a, \sigma) = \frac{1}{2a\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{a+t}{\sigma}}^{\frac{a-t}{\sigma}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

- $\varepsilon \sim \mathcal{L}(\lambda)$

$$f_X(t|a, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{2a} \sinh \frac{a}{\lambda} e^{-\frac{|t|}{\lambda}}, & a \in (0, |t|], \\ \frac{1}{2a} \left(1 - e^{-\frac{a}{\lambda}} \cosh \frac{t}{\lambda}\right), & a \in (|t|, \infty). \end{cases}$$

# Opći jednodimenzionalni model - gustoće



crveno — normalna greška

plavo — studentova greška (stupanj slobode 1)

# Problem

Podaci  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;

Procijeniti:

- $a > 0$  (ili  $2a$ , duljina uniformnog nosača)
- $\sigma > 0$ , varijanca greške .

- H. Schneeweiss, *Estimating the endpoint of a uniform distribution under measurement errors*, CEJOR 12 (2004), 221–231.
- M. B., K. Sabo, *Estimating the width of a uniform distribution when data are measured with additive normal errors with known variance*, Computational Statistics and Data Analysis, 51(2007), 4731-4741
- M. B., K. Sabo, *Border estimation of a Two-dimensional Uniform Distribution if Data are Measured with Additive Error*, Statistics, 41 (2007), 4, 311–319.
- K. Sabo, M. B., *Border estimation of a disc observed with random errors solved in two steps*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 229 (2009)
- M. B., K. Sabo, *Estimating a uniform distribution when data are measured with a normal additive error with unknown variance*, Statistics, 44 (2010), 235–246.
- M. B., K. Sabo, *Uniform distribution width estimation from data observed with Laplace additive error*, Journal of the Korean Statistical Society, 45/4 (2016), 505—517
- S. Hamedović, M. Benšić, K. Sabo, P. Taler, *Estimating the size of an object captured with error*, Central European Journal of Operations Research 26/3 (2018), 771-781

## Neki zaključci iz tih referenci i novijih izračuna

- Model s normalnim greškama ne pokazuje se izrazito koristan u realnim primjenama. Previše je osjetljiv.
- MLE za  $a$  je konzistentan i asimptotski normalan u jako širokoj klasi distribucija greške.
- Uz navedena dva tipa distribucija posebno je korisna studentova familija — uključuje distribucije s teškim repovima!
- Na temelju ML teorije može se iskazati standardna greška procjenitelja, kreirati pouzdani intervali i statistički testovi.
- Kod distribucija greške koje imaju konačne momente dovoljno visokog reda može se iskoristiti i MME.
- Očekivano, tada je MME lakši za izračunati ali ima veću standardnu grešku. Uobičajeno ga koristimo kao početnu točku iterativnog postupka optimizacije u ML metodi.

- $X = U + \sigma\varepsilon$
- $f_U(t) = \frac{1}{2a}I_{[-a,a]}(t)$
- $\varepsilon$  neprekidna s distribucijom  $F_\varepsilon$  i gustoćom  $f_\varepsilon$  (ne nužno simetrična!)

$$f_X(t) = \frac{1}{2a} \left[ F_\varepsilon\left(\frac{a+t}{\sigma}\right) - F_\varepsilon\left(\frac{a-t}{\sigma}\right) \right]$$

- Podaci  $(x_1, \dots, x_n)$ , logaritam vjerodostojnosti:

$$l(a) = -n \log 2a + \log \sum_{i=1}^n \left[ F_\varepsilon\left(\frac{x_i + a}{\sigma}\right) - F_\varepsilon\left(\frac{x_i - a}{\sigma}\right) \right]$$

- Diferencijabilna funkcija ako je model s neprekidnim distribucijom greške. Dakle, optimizacija bi trebala biti jednostavna uz dobru početnu aproksimaciju koju u primjenama nije teško prepoznati.



## ML pouzdani intervali

Fisherova informacija u regularnim modelima

$$I(a) = \frac{-1}{a^2} + \frac{1}{2a\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(f_{\varepsilon}(\frac{x+a}{\sigma}) + f_{\varepsilon}(\frac{x-a}{\sigma}))^2}{F_{\varepsilon}(\frac{x+a}{\sigma}) - F_{\varepsilon}(\frac{x-a}{\sigma})} dx$$

$$\left( \hat{a}_{ML} - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{nl(\hat{a}_{ML})}}, \hat{a}_{ML} + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{nl(\hat{a}_{ML})}} \right)$$

- $\sigma$  se procjenjuje unutar ML procedure
- alternativno, može se koristiti i MM metoda ili zadati na temelju prethodnih studija

## LR statistički test

$$H_0 : a = a_0$$

$$H_1 : a \neq a_0$$

Kritično područje (nivo značajnosti  $\alpha$ ,  $L$  funkcija vjerodostojnosti)

$$\left\{ \mathbf{y} \mid -2 \log \frac{L(a_0; \mathbf{y})}{L(\hat{a}_{ML}; \mathbf{y})} \geq \chi_1^2(1 - \alpha) \right\}$$

[https : //cran.r – project.org/web/packages/LeArEst/](https://cran.r-project.org/web/packages/LeArEst/)

- M. Benšić, P. Taler, S. Hamedović, E.K. Nyarko, K. Sabo, *LeArEst: Length and Area Estimation from Data Measured with Additive Error*, The R Journal 9/2 (2017), 461-473

# Detekcija ruba kruga ili elipse na slici

- Houghova transformacija

P. V. Hough, *Method and means for recognizing complex patterns*.

Patent U.S. Patent No. 3,069,654, 1962.

R. D. Duda i P. E. Hart, *Use of the Hough transform to detect lines and curves in pictures*, Commun. ACM, 15, br. 1, 1972.

A. Rosenfeld, *Picture processing by computer*, ACM Computing Surveys (CSUR), svez. 1, br. 3, pp. 147-176, 1969.

- EDCircles

C. Akinlar i C. Topal, *EDCircles: A real-time circle detector with a false detection control*, Pattern Recognition, 46, br. 3, pp. 725-740, 2013.

- Fornaciari

M. Fornaciari, A. Prati i R. Cucchiara, *A fast and effective ellipse detector for embedded vision applications*, Pattern Recognition, 47, br. 11, pp. 3693-3708, 2017.

- Napravljene su opsežne simulacije radi usporedbe LeArEst algoritma s navedena tri.
- Ukratko, u prisutnosti aditivne greške, LeArEst se pokazao najbolji.
- Testiranja su napravljena na način da je zašumljena vrlo precizna fotografija stvarnog objekta na razne načine. Obzirom da je poznata stvarna površina objekta, mogli smo napraviti usporedbu metoda.
- Usavršavanje algoritma s ciljem primjene na stvarnim fotografijama i u slučajevima koji trenutno ne izgledaju baš kako bi mi htjeli — u tijeku.