Kolokvij 2(A)

26.01.2017.

Pravila

Kolokvij se piše 120 min te se predaje s radnim listom i papirom sa zadacima (sve papire koji se predaju potrebno je potpisati). Uvjet za polaganje kolokvija je ostvarenih minimalno 40 bodova po svakom kolokviju i minimalno 90 bodova ukupno.

Zadatak 1 (20 bodova).
Neka je $f : \{1, 2, 3\} \to \{a, b, c, d\}$ injekcija takva da vrijedi $f^{-1}(\{a\}) = 1, f^{-1}(\{b\}) = 2, f^{-1}(\{c\}) = 3$. Odredite sve surjekcije $g_i : \{a, b, c, d\} \to \{1, 2, 3\}$ takve da vrijedi $g_i \circ f = 1_{\{1,2,3\}}$.

[Rj. 3 surjekcije: $g_1 : g_1(a) = g_1(d) = 1, g_1(b) = 2, g_1(c) = 3$, $g_2 : g_2(a) = 1, g_2(b) = g_2(d) = 2, g_2(c) = 3$, $g_3 : g_3(a) = 1, g_3(b) = 2, g_3(c) = g_3(d) = 3$]

Zadatak 2 (10 bodova).
Neka su $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije. Provjerite parnost funkcije fg ako su:

(a) obje funkcije parne,

(b) f parna i g neparna funkcija.

[Rj. a) parna, b) neparna - za izvod pogledat vježbe]

Zadatak 3 (10 bodova).
Odredite domenu i sliku te skicirajte graf funkcije f zadane formulom

$$f(x) = \left|2\log_{\frac{1}{3}}(x+2)\right| + 1.$$

[Rj. $D_f = \langle -2, +\infty\rangle$, $Im_f = [1, +\infty\rangle$]

Zadatak 4 (10 bodova).
Rastavite na sumu parcijalnih razlomaka

$$\frac{3x^2 + 2x - 4}{x^3 - 8}.$$

[Rj. $\frac{1}{x-2} + \frac{2x+4}{x^2+2x+4}$]

Zadatak 5 (20 bodova).
Na skupu $\mathbb{R}^2$ defnirana je relacija ρ na sljedeći način

$$(x_1, y_1)\rho(x_2, y_2) \iff |x_1| - |x_2| = |y_1| - |y_2|.$$

Provjerite je li ρ relacija ekvivalencije, ako jeste odredite klasu elementa $(1, 1)$.

[Rj. $[(1, 1)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = |x|\}$]

Zadatak 6 (15 bodova).
Neka je $S = \{a, b, c, d, e, f\}$.

(a) Odredite relaciju ekvivalencije ρ koja inducira sljedeću particiju skupa S:

$$S = \{a\} \cup \{b, c, d\} \cup \{e, f\}.$$

(b) Odredite relaciju ρ_1 sa svojstvom $\rho_1 \subset \rho$, ρ_1 je relacija parcijalnog uređaja na S i $k(\rho_1) = 9$. Postoji li relacija $\rho_2 \subset \rho$ i ρ_2 relacija potpunog uređaja na skupu S. Obrazložite odgovor!

[Rj. a) $\rho = \{(a, a), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d), (d, b), (d, c), (d, d), (e, e), (e, f), (f, e), (f, f)\}$,
b) npr. $\rho_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (b, c), (b, d), (e, f)\}$, ρ_2 ne postoji
(ne vrijedi svojstvo $\forall x, y \in S \quad x\rho y \vee y\rho x$)]

Zadatak 7 (15 bodova).
Polinoma $f(x) = 3x^4 - x^3 - ax^2 + 10x + b$ pri dijeljenju sa $x + 2$ daje ostatak 21, a pri dijeljenju sa $x - 1$ daje ostatak 6. Odredite parametre a, b, i ostatak pri dijeljenju $f(x)$ s $g(x) = x^2 + x - 2$.

[Rj. $a = 3, b = -3, r(x) = -5x + 11$]

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.