Pravila

Pismeni ispit se piše 120 minuta i ukupno nosi 100 bodova od kojih 50 jest za prolaz uz uvjet da su barem dva zadatka cijela riješena. Ispit se predaje s papirom sa zadacima. Rezultati ispita će biti objavljeni na web stranicama kolegija u toku dana.

Zadatak 1 (20 bodova).
Zadana je tvrdnja: *Ako je umnožak $a \cdot b$ strogo manji od umnoška $a \cdot c$, onda je b strogo veći od c ili je a veći ili jednak od* 0.

i) Napišite zadanu tvrdnju simbolima i dokazom svođenjem na kontradikciju dokažite dobiveni složeni sud.

ii) Napišite obrat tog suda, negaciju i obrat po kontrapoziciji i odredite istinitost dobivenih sudova (obrazložite svoje odgovore).

Zadatak 2 (20 bodova).
Dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ puta}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

Zadatak 3 (20 bodova).
Zadane su funkcije $f : [1,3] \to [-1,3]$ i $g : [-3,3] \to [0,3]$ s $f(x) = (x-4)(x-2)$, $g(x) = ||x|-1|$.

a) Odredite $f(A)$ i $f^{-1}(A)$ za $A = [1,2\rangle$.

b) Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcija f i g te za funkciju koja je bijekcija odredite inverz.

c) Pokažite da su slike funkcija f i g ekvipotentni skupovi.

Zadatak 4 (20 bodova).
Na partitivnom skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ skupa prirodni brojeva zadana je binarna relacija ρ definirana s

$$A\rho B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset \;\wedge\; A \cup B = \mathbb{N}.$$

Ispitajte je li relacija ρ refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna. Ako neko svojstvo ne vrijedi pokažite to kontraprimjerom. Je li ρ relacija ekvivalencije? A parcijalnog uređaja? Sve svoje tvrdnje obrazložite.

Zadatak 5 (20 bodova).
Odredite parametre a, b tako da polinom

$$p(x) = a(ax^{26} - 2x^4 - b)^{2017} - x(x^2-1)$$

bude normiran, ima slobodni koeficijent jednak 1 i zbroj koeficijenata mu je 0. Za tako određene parametre a, b odredite ostatak pri djeljenju polinoma $p(x)$ polinomom $x^2 + x$.