Pismeni ispit

07.09.2017.

Pravila

Pismeni ispit se piše 120 minuta i ukupno nosi 100 bodova od kojih 50 jest za prolaz uz uvjet da su barem dva zadatka cijela riješena. Ispit se predaje s papirom sa zadacima. Rezultati ispita bit će objavljeni na web stranici kolegija.

Zadatak 1 (20 bodova).
Nacrtajte Vennove dijagrame za skupove

$$(B \setminus (A \cup C)) \cup (C \setminus A) \quad \text{i} \quad (B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C).$$

Odredite odnos ta dva skupa. Inkluziju koja vrijedi općenito dokažite, a za inkluziju koja ne vijedi općenito pronađite kontraprimjer. Postoji li primjer za koji vrijede i jedna i druga inkluzija? Ako postoji, navedite ga, a u suprotnom obrazložite zašto ne postoji.

Zadatak 2 (20 bodova).
Metodom matematičke indukcije dokažite da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$84 \mid 4^{2n} - 3^{2n} - 7.$$

Zadatak 3 (20 bodova).
Funkcija $f : \langle 3, +\infty \rangle \to \langle -4, +\infty \rangle$ zadana je prvilom pridruživanja

$$f(x) = e^{x^4 - 6x^2} - 3.$$

a) Ispitajte injektivnost, surjektivnost i bijektivnost funkcije f.

b) Neka je $g : \langle 6, +\infty \rangle \to \langle -4, +\infty \rangle$ funkcija s pravilom pridruživanja $g(x) = e^{x^2 - 9} - 3$. Pronađite funkciju h takvu da je $f = g \circ h$. Je li funkcija h rastuća?

Zadatak 4 (20 bodova).
Neka je ρ binarna relacija na skupu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definirana s:

$$(a, b)\rho(c, d) \iff (a < c \ \lor \ (a = c \ \land \ b \leq d)).$$

Je li ρ parcijalni uređaj na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$? Je li ρ totalni uređaj na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$?

Zadatak 5 (20 bodova).
Odredite sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ koji zadovoljavaju

$$x(x-1)p(x+1) = (x+2)(x+1)p(x-1) + 2(x+2)x(x^2-1), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$