Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **A**

1. prosinca 2017.

1. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [25 bodova]

(a) *Što znači da je skup $\mathbb{R}^3$, snabdjeven binarnim operacijama „+" i „·", vektorski prostor? Što zovemo bazom vektorskog prostora? Navedite barem dva primjera vektorskih prostora.*

(b) *Pomoću determinanti provjerite jesu li vektori $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - \vec{j}$ linearno nezavisni. Ako jesu, vektor $\vec{d} = -\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ napišite kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Linearno su nezavisni jer je* $\det\{a, b, c\} = 10 \neq 0$. $\vec{d} = -\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Kako se definira projekcija vektora $\vec{b}$ na pravac određen vektorom $\vec{a}$? Pokažite da za vektor $\vec{b'} := \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{u})\,\vec{u}$, $\vec{u} := \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$, vrijedi: (i) $\vec{b'} \neq \vec{0}$, (ii) $\vec{b'} \perp \vec{u}$, (iii) $\vec{b'} \cdot \vec{b} > 0$.*

(b) *Zadan je trokut $\triangle ABC$ u prostoru s vrhovima $A = (-1, 1, 0)$, $B = (-4, 1, 0)$, $C = (-2, 2, 1)$. Je li trokut $\triangle ABC$ pravokutan?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Jeste jer su vektori $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ okomiti ili jeste jer je $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.*

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Napišite Cauchy – Schwarz – Buniakowsky nejednakost u vektorskom obliku. Kada vrijedi jednakost?*

(b) *Provjerite jesu li vektori $a = (0, 2, -2)$, $b = (2, 2, 2)$, $c = (-2, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ linearno nezavisni. Ako jesu, Gram – Schmidtovim postupkom ortogonalizacije od njih sagradite ortonormirani sustav u, v, w.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(0, 1, -1)$, $v = \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)$, $w = \frac{\sqrt{6}}{6}(-2, 1, 1)$.*

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Kako se definira rang matrice?*

(b) *Odredite rang matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. *Naznačite koje ste elementarne transformacije (elementarne matrice) pri tome koristili.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $r(A) = 3$*

Zadatak 5. [15 bodova]

(a) *Koju matricu zovemo regularnom, a koju singularnom. Navedite kriterije koje poznajete za ispitivanje regularnosti neke matrice.*

(b) *Riješite matričnu jednadžbu* $X \cdot A = B$, *gdje je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $X = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Zadatak 6. [20 bodova]

(a) *Kako se definira determinanta matrice* $A \in M_n$? *Koliko iznose determinante elementarnih* P-*matrica:* P_{ij}, $P_i(\lambda)$, $P_i(\lambda; j)$, *a koliko determinante pripadnih inverznih matrica:* P_{ij}^{-1}, $P_i^{-1}(\lambda)$, $P_i^{-1}(\lambda; j)$?

(b) *Odredite vrijednost determinante* $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $D = 1$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku **B**
1. prosinca 2017.

1. kolokvij iz Linearne algebre 1

Zadatak 1. [20 bodova]

(a) *Napišite definiciju linearne zavisnosti skupa vektora $a_1, \ldots, a_n \in X$ iz vektorskog prostora X. Poznajete li neki kriterij za ispitivanje linearne zavisnosti skupa vektora? Kada za neki skup vektora kažemo da je linearno nezavisan?*

(b) *Pomoću ranga matrice provjerite jesu li vektori $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = -5\vec{i} - 4\vec{j} - 5\vec{k}$ linearno nezavisni. Ako jesu, vektor $\vec{d} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$ napišite kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Linearno su nezavisni jer je $r(\{a, b, c\}) = 3$. $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.*

Zadatak 2. [20 bodova]

(a) *Neka je $\vec{c}$ vektor koji ne leži u ravnini određenoj ortonormiranim vektorima $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Kako se definira projekcija vektora $\vec{c}$ na tu ravninu? Pokažite da za vektor $\vec{c'} = \vec{c} - (\vec{c} \cdot \vec{u})\vec{u} - (\vec{c} \cdot \vec{v})\vec{v}$ vrijedi: (i) $\vec{c'} \neq \vec{0}$, (ii) $\vec{c'} \perp \vec{u}$ & $\vec{c'} \perp \vec{v}$, (iii) $\vec{c'} \cdot \vec{c} > 0$.*

(b) *Zadan je trokut $\triangle ABC$ u prostoru s vrhovima $A = (-5, -5, 0)$, $B = (-5, 1, 4)$, $C = (-3, 1, 4)$. Je li trokut $\triangle ABC$ pravokutan?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) Jeste jer su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ okomiti ili jeste jer je $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$*

Zadatak 3. [20 bodova]

(a) *Napišite Hölderovu nejednakost u vektorskom obliku. Kada vrijedi jednakost?*

(b) *Provjerite jesu li vektori $a = (0, 0, 3)$, $b = (-2, 1, 3)$, $c = (2, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ linearno nezavisni. Ako jesu, Gram – Schmidtovim postupkom ortogonalizacije od njih sagradite ortonormirani sustav u, v, w.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $u = (0, 0, 1)$, $v = \frac{\sqrt{5}}{5}(-2, 1, 0)$, $w = \frac{\sqrt{5}}{5}(1, 2, 0)$.*

Zadatak 4. [20 bodova]

(a) *Što znači da je skup svih kvadratnih matrica M_n, snabdjeven binarnom operacijom množenja, asocijativna algebra s jedinicom?*

(b) *Odredite rang matrice* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Naznačite koje ste elementarne transformacije (elementarne matrice) pri tome koristili.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $r(A) = 2$*

Zadatak 5. [25 bodova]

(a) *Navedite i definirajte tipove P-elementarnih matrica. Jesu li one regularne? Ako jesu, što su njihove inverzne matrice?*

(b) *Riješite matričnu jednadžbu* $A \cdot X = B$, *gdje je* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 15 & 15 & 15 \\ -1 & -1 & -1 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

Zadatak 6. [15 bodova]

(a) *Kako se definira determinanta matrice* $A \in M_n$*? Čemu je jednaka determinanta trokutaste matrice* $T \in M$*?*

(b) *Odredite vrijednost determinante* $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}$.

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $D = 12$

Napomena Rješavanjem svih zadataka ukupno možete postići maksimalno 120 bodova i na taj način kompenzirati eventualne propuste u drugom kolokviju.