Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
7. veljače 2018.

## Pismeni ispit iz Linearne algebre 1

**Zadatak 1.** [20 bodova]

*Zadani su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ i $\vec{b} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$. Odredite $\lambda = -\vec{a} \cdot \vec{b}$ i definirajte vektor $\vec{c} = 2\lambda\vec{j} + \lambda\vec{k}$. Zatim, odredite vektor $\vec{d}$ za koji vrijedi $\vec{c} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{d}$ i $\vec{c} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{d}$ te pokažite da su vektori $\vec{a} - \vec{b}$ i $\vec{c} - \vec{d}$ kolinearni.*

Rješenje: $\lambda = 7, \vec{d} = -21\vec{i} - 14\vec{j} - 7\vec{k}, \vec{c} - \vec{d} = 7(\vec{a} - \vec{b})$.

**Zadatak 2.** [20 bodova]

(a) *Iskažite Cauchy – Schwarz – Buniakowsky teorem.*

(b) *Neka su $x_1, x_2, x_3$ pozitivni realni brojevi. Primjenom Cauchy – Schwarz – Buniakowsky nejednakosti dokažite da vrijedi:*

$$\left(\frac{1}{3x_1} + \frac{1}{4x_2} + \frac{5}{12x_3}\right)\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{4} + \frac{5x_3}{12}\right) \geq 1.$$

*Kada u prethodnoj nejednakosti vrijedi jednakost?*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b) Jednakost vrijedi za $x_1 = x_2 = x_3$.*

**Zadatak 3.** [20 bodova]

(a) *Navedite tipove Q-elementarnih matrica. Jesu li one regularne? Ako jesu, što su njihove inverzne matrice?*

(b) *Riješite matričnu jednadžbu: $ABXB^TA^T = I$, gdje je*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 21 & -3 & 13 \\ 8 & -1 & 5 \\ 12 & -2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: *(a) Nastavni materijali;* *(b)* $X = (AB)^{-1} \cdot ((AB)^{-1})^T = \begin{bmatrix} 6 & 13 & -8 \\ 13 & 30 & -18 \\ -8 & -18 & 11 \end{bmatrix}$.

**Zadatak 4.** [20 bodova]

(a) *Iskažite Cramerov teorem za rješavanje sustava linearnih jednadžbi $Ax = b$, $A \in GL_n$ regularna matrica. Što se događa s rješenjem sustava $Ax = b$, ako je matrica sustava $A$ singularna?*

(b) *Gaussovom metodom diskutirajte i riješite sustav linearnih jednadžbi u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\begin{array}{rcrcrcl} \lambda x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & \lambda \\ x_1 & + & x_2 & + & \lambda x_3 & = & \lambda \end{array}$$

*Rješenje: (a) Nastavni materijali; (b) Za $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$: $x = \left(\frac{-1}{\lambda+2}, \frac{\lambda+1}{\lambda+2}, \frac{\lambda+1}{\lambda+2}\right)$; za $\lambda = -2$ sustav nema rješenje; za $\lambda = 1$: $x = x_0 + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, $x_0 = (1, 0, 0)^T, u_1 = (-1, 1, 0)^T, u_2 = (-1, 0, 1)^T, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.*

**Zadatak 5.** [20 bodova]

(a) *Izvedite kanonski oblik jednadžbe pravca $p$ u prostoru koji je zadan točkom $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E$ i vektorom $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \in X_0(E)$.*

(b) *Odredite nepoznati parametar $t \in \mathbb{R}$ tako da se pravci*

$$
\begin{aligned}
p_1 \quad \ldots \quad & \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-1} \\
p_2 \quad \ldots \quad & \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{t} = \frac{z+1}{1}
\end{aligned}
$$

*sijeku te odredite točku sjecišta. Zatim, odredite kut između tih pravaca.*

*Rješenje: (a) Nastavni materijali; (b) $t = 3$, sjecište $P = (5, 4, 1)$, $\measuredangle(p_1, p_2) = 38^\circ 21'$ .*