Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
21. veljače 2018.

**Pismeni ispit iz Linearne algebre 1**

**Zadatak 1.** [20 bodova]

*Dani su vektori $\vec{a} = (0, 4, 3)$, $\vec{b} = (1, -1, -1)$, $\vec{c} = (-2, -1, 3)$. Odredite volumen paralelepipeda određenog vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Jesu li ti vektori linearno zavisni? Obrazložite. Odredite $t \in \mathbb{R}$ tako da vektor $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} + t\vec{c}$ leži u ravnini određenoj vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$. Za dobiveni $t$ prikažite vektor $\vec{v}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$.*

Rješenje: *$V = 13$; vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ su linearno nezavisni, jer je $\det\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \neq 0$; $t = 2$; $\vec{v} = -\vec{a} - 5\vec{b}$.*

**Zadatak 2.** [20 bodova]

(a) *Kako se definira skalarni produkt dva vektora $\vec{a}, \vec{b} \in X_0(E)$? Navedite osnovna svojstva skalarnog produkta.*

(b) *Provjerite čine li vektori $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ bazu vektorskog prostora $X_0(E)$. Ako čine, Gram – Schmidtovim postupkom ortogonalizacije sagradite ortonormiranu bazu $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ i vektor $\vec{d} = 8\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ prikažite u novoj bazi.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$, $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j})$, $\vec{w} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k})$, $\vec{d} = \frac{4}{\sqrt{3}}\vec{u} - \frac{9}{\sqrt{2}}\vec{v} + \frac{13}{\sqrt{6}}\vec{w}$.*

**Zadatak 3.** [20 bodova]

(a) *Koliko iznose determinante elementarnih Q-matrica: $Q_{ij}$, $Q_i(\lambda)$, $Q_i(\lambda; j)$, a koliko determinante pripadnih inverznih matrica: $Q_{ij}^{-1}$, $Q_i^{-1}(\lambda)$, $Q_i^{-1}(\lambda; j)$?*

(b) *Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da rang matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 11 & 13 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & 19 & 25 \\ \lambda & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

*bude jednak 3. Naznačite koje ste elementarne transformacije (elementarne matrice) pri tome koristili.*

Rješenje: *(a) Nastavni materijali; (b) $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$.*

**Zadatak 4.** [20 bodova]

(a) *Uz koje uvjete je provediva LU-dekompozicija kvadratne matrice $A \in M_n$?*

(b) *Odredite LU - dekompoziciju matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

*te izračunajte njenu determinantu. Koristeći $LU$ - dekompoziciju matrice $A$ riješite sustav* $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

*Rješenje: (a) Nastavni materijali;* *(b)* $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1 \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$; $det(A) = det(LU) = det(L) \cdot det(U) = 12$; $x = (2, 2, -2, \frac{1}{2})^T$.

**Zadatak 5.** [20 bodova]

(a) *Izvedite kanonski oblik jednadžbe pravca $p$ u prostoru koji je zadan dvijema različitim točkama* $P_0 = (x_0, y_0, z_0), P_1 = (x_1, y_1, z_1) \in E$.

(b) *Odredite jednadžbu sjecišta ravnina*

$$\begin{aligned} M_1 \quad \ldots \quad & x + y - 4z - 5 = 0 \\ M_2 \quad \ldots \quad & 2x - y - 2z - 1 = 0. \end{aligned}$$

*Rješenje: (a) Nastavni materijali;* *(b)* $p \ldots \dfrac{x-2}{-6} = \dfrac{y-3}{-6} = \dfrac{z}{-3}$.