Pravila

Pismeni ispit se piše 120 minuta i ukupno nosi 100 bodova od kojih 50 jest za prolaz uz uvjet da su barem dva zadatka cijela riješena. Ispit se predaje s papirom sa zadacima. Rezultati ispita bit će objavljeni na web stranici kolegija.

Zadatak 1 (10 + 10). Neka je $f : X \to Y$ funkcija, $A \subseteq Y$ i $B \subseteq X$. Dokažite tvrdnje.

(a) $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$.

(b) f je surjekcija ako i samo ako je $f(B)^c \subseteq f(B^c)$.

Zadatak 2 (20). Neka su za svaki prirodan broj i dani skupovi

$$A_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2^{2-2i})^2 + y^2 \leq 2^{4-4i}\},$$

$$B_i = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2^{1-2i})^2 + y^2 \geq 2^{2-4i}\}.$$

Nadalje neka je n prirodan broj. Odredite izraz koji određuje površinu skupa

$$\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap B_i).$$

Zadatak 3 (20). Neka je a realan broj. Pokažite da za svaki prirodan broj n polinom $x - a$ dijeli polinom $x^n - a^n$.

Zadatak 4 (20). Neka je $n \in \mathbb{N}$ te neka je na skupu $\mathbb{Z}^2$ definirana relacija ρ s

$$x \,\rho\, y \;\Leftrightarrow\; x^2 \equiv y^2 \pmod{n}.$$

Provjerite je li ρ relacija ekvivalencije te, ako je, odredite klasu elementa 2 za $n = 4$ i $n = 7$.

Zadatak 5 (20). Odredite jednu trojku realnih brojeva a, b, c takvih da su $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ i $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ rješenja simetrične jednadžbe

$$x^4 + bx^3 + ax^2 + cx + 1 = 0.$$