KOLOKVIJ 1

16.04.2021.

Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta. Sve tvrdnje potrebno je detaljno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Ukoliko koristite tvrdnje pokazane na vježbama i/ili predavanjima navedite/objasnite na koje tvrdnje se pozivate.

Zadatak 1 (15 bodova). Neka je $V = \mathbb{R}$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Definirajmo binarnu operaciju *zbrajanja*

$$x \oplus y = x + y, \quad \text{za sve} \quad x, y \in V$$

te operaciju *množenja skalarima*

$$\alpha \otimes x = x, \quad \text{za sve} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \text{ za sve} \quad x, y \in V.$$

Provjerite je li skup V s prethodno definiranim operacijama $\oplus$ i $\otimes$ vektorski prostor.

Zadatak 2 (20 bodova).

(a) Neka je skup $\{a, b, c\}$ linearno nezavisan. Ispitajte je li tada i skup $\{2a - b, b - c, 2a + b + 2c\}$ linearno nezavisan.

(b) Odredite uvjete na a, b, c tako da vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pripada linearnoj ljusci vektora $u_1 = (-1, 0, 3)$, $u_2 = (0, 2, 1)$ i $u_3 = (1, -2, -4)$.

Zadatak 3 (25 bodova).

(a) Ispitajte je li skup $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cdot x_2 > 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^2$.

(b) Ispitajte je li skup $S = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = \begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ potprostor od $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (što je prostor svih realnih matrica reda 2).

U slučaju da se radi o potprostoru, odredite jednu bazu i dimenziju te direktan komplement za taj potprostor.

Zadatak 4 (15 bodova). U prostoru $\mathbb{R}^3$ zadani su potprostori L i M sa svojim bazama $B_L = \{(1, 2, 1), (-1, -1, -1)\}$ i $B_M = \{(-1, 1, -3), (1, 0, 3)\}$. Odredite bazu prostora $L + M$ te bazu prostora $L \cap M$.

Zadatak 5 (25 bodova).

(a) Je li operator translacije $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, za proizvoljan $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) \neq (0, 0)$, tj. definiran s

$$\mathcal{T}(x, y) = (x + a, y + b)$$

linearan?

(b) Neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ baza trodimenzionalnog vektorskog prostora V te neka je $\mathcal{B} : V \to V$ linearan operator definiran s

$$\begin{aligned} \mathcal{B}e_1 &= 3e_1 - 2e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}e_2 &= e_1 + e_2 \\ \mathcal{B}e_3 &= 0. \end{aligned}$$

Nađite bazu za sliku te bazu za jezgru operatora $\mathcal{B}$. Zatim, odredite rang i defekt operatora $\mathcal{B}$.