DRUGI KOLOKVIJ

7.6.2021.

Pravila

Kolokvij se piše 120 minuta. Sve tvrdnje potrebno je detaljno obrazložiti, inače neće biti bodovane. Ukoliko koristite tvrdnje pokazane na vježbama i/ili predavanjima, navedite/objasnite na koje tvrdnje se pozivate.

Zadatak 1 (10+15). Linearan operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je s

$$\mathcal{A}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, 2x_2, x_1 + x_2 + x_3).$$

a) Odredite matricu operatora $\mathcal{A}$ u kanonskoj bazi prostora $\mathbb{R}^3$,

b) Odredite matricu operatora $\mathcal{A}$ u bazi $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, pri čemu je

$$e'_1 = e_1 + e_2,$$
$$e'_2 = e_1 + e_3,$$
$$e'_3 = 2e_2 - e_3.$$

Zadatak 2 (15+5). Dana je matrica A

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Odredite svojstveni polinom, svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice A.

b) Odredite minimalni polinom matrice A.

Zadatak 3 (10). Odredite matricu A^7, ako matrica A ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$, a pripadni svojstveni vektori su $v_1 = (1, 0)$ i $v_2 = (1, 1)$.

Zadatak 4 (10). Neka je $\mathcal{P}_1$ realan vektorski prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 1. Provjerite je li preslikavanje

$$\langle p, q\rangle = (p(0))^2 + (q(1))^2, \ \ p, q \in \mathcal{P}_1,$$

skalarni produkt na $\mathcal{P}_1$.

Zadatak 5 (10+10). Odredite ortonormiranu bazu za potprostor $W \leq \mathbb{R}^3$ koji je razapet vektorima $w_1 = (1, 1, 0), w_2 = (0, 1, 0)$, te odredite ortogonalni komplement od W.

Zadatak 6 (5+10). Linearan operator $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadan je s

$$A(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$

a) Provjerite je li A hermitski operator i navedite zaključak.

b) Provjerite je li A unitaran operator i navedite zaključak.