4.3 Nejednakosti izvedene iz Jensenove nejednakosti

Teorem 3 (CSB nejednakost) *Ako su* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *n-torke realnih brojeva, tada vrijedi*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2 \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\Big).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su n-torke a i b proporcionalne.

U zadacima često primijenjujemo i CSB nejednakost u Engel formi:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}.$$

Teorem 4 (Hölderova nejednakost) *Ako su* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *n-torke pozitivnih realnih brojeva i* p, q *dva realna broja različita od 0, t.d. je* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *tada za* $p > 1$ *vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Za $p < 1$ *vrijedi suprotna nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako su n-torke* a^p *i* b^q *proporcionalne.*

Teorem 5 (Nejednakost Minkowskog) *Ako su* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *i* $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ *n-torke pozitivnih realnih brojeva, tada za* $p > 1$ *vrijedi*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Za $p < 1$ *vrijedi suprotna nejednakost. Jednakost vrijedi ako i samo ako su n-torke a i b proporcionalne.*

Zadatak 50. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$(x + y + z)\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big) \geq 9.$$

Zadatak 51. Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \cdots + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

Zadatak 52. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a + b + c = 1$. Dokažite da vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

Zadatak 53. Neka su $x, y, z \in [-\frac{1}{4}, \infty\rangle$ takvi da vrijedi $x + y + z = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}.$$

Zadatak 54. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$x + y + z \leq \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y}.$$

Zadatak 55. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$x^3 z + y^3 x + z^3 y \geq xyz(x + y + z).$$

Zadatak 56. Neka su a, b, c duljine stranice trokuta, a s njegov poluopseg. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geq \frac{9}{8s}.$$

Zadatak 57. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

Zadatak 58. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{3^3} + \frac{b^2}{4^3} + \frac{c^2}{5^3} \geq \frac{(a+b+c)^2}{6^3}.$$

Zadatak 59. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $abc = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Zadatak 60. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c.$$

Zadatak 61. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $xyz = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{x-1}{y+1} + \frac{y-1}{z+1} + \frac{z-1}{x+1} \geq 0.$$

Zadatak 62. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$