1 Skup kompleksnih brojeva

Skup

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\},$$

na kojemu su operacije zbrajanja i množenja definirane na sljedeći način:

(1) zbrajanje: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

(2) množenje: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

nazivamo skup kompleksnih brojeva.

Neka je $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ i $i = \sqrt{-1}$.

Standardni ili algebarski zapis kompleksnog broja:

$$z = x + yi, \qquad x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z.$$

Kompleksno konjugirani broj:

$$\bar{z} = x - yi.$$

Modul ili apsolutna vrijednost kompleksnog broja:

$$|z| = \sqrt{\bar{z} \cdot z} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kompleksne brojeve prikazujemo u kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini.

Za sve $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ vrijedi:

1. $\bar{\bar{z}} = z$,
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, z_2 \neq 0$
5. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
6. $|z| = |\bar{z}|$
7. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
8. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

Primjer. Neka je $z = i\frac{(1+i)^2}{(1-i)}$. Odredite $\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z,\ \bar{z},\ |z|$.

Zadatak 1. Izračunati $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Zadatak 2. Neka su $|z_1| = |z_2| = 1$ i $z_1 z_2 \neq -1$. Dokažite da je

$$z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 3. Ako za $a, b, c \in \mathbb{C}$ vrijedi $|a| = |b| = |c| = r$, $r \neq 0$, dokažite da vrijedi

$$\left|\frac{ab + bc + ac}{a + b + c}\right| = r.$$

Zadatak 4. Ako vrijedi $|z| = 1$, $z \neq 1$, dokažite da se broj z može prikazati u obliku $z = \frac{t+i}{t-i}$, pri čemu je $t \in \mathbb{R}$.

Zadatak 5. Odredite, a zatim skicirajte u Gaussovoj ravnini sljedeće skupove brojeva:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| = 1\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| \leq 3\}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - 2 + i| < 3\}$

d) $D = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 \leq |z| < 2\}$

e) $E = \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Re}(z - 3) > 0\}$

Zadatak 6. Dokažite da za proizvoljne kompleksne brojeve vrijedi nejednakost

$$|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| \leq 2(|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3|).$$

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arg(z) \in [0, 2\pi), \\ & \text{za } x \neq 0,\ \varphi \text{ je jedno od dva rješenja jednadžbe } \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x} \\ & \text{(određuje se prema predznacima od } x \text{ i } y\text{)}, \\ & \text{za } x = 0, y > 0 \implies \varphi = \frac{\pi}{2}; \\ & \text{za } x = 0, y < 0 \implies \varphi = \frac{3\pi}{2}; \end{aligned}$$

Primjer. Napišite brojeve $z_1 = 1 + i^{123}$, $z_2 = i + \sqrt{3}$ u trigonometrijskom obliku.

Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

$$z_j = r_j(\cos\varphi_j + i\sin\varphi_j),\ z_2 \neq 0 \quad j = 1, 2 \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)] \end{aligned}$$

Potenciranje kompleksnih brojeva

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),\ n \in \mathbb{N}, \qquad \Longrightarrow$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Korjenovanje kompleksnih brojeva

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}$, $\Longrightarrow$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Napomena. Postoji točno n različitih vrijednosti n-toga korijena iz z koji su vrhovi pravilnog n-terokuta.

Zadatak 7. Neka su z i w kompleksni brojevi takvi da vrijedi $|z| = |w| = |z - w|$. Izračunajte $\left(\frac{z}{w}\right)^{999}$.

Zadatak 8. Neka je $u = 3 - 3\sqrt{3}i$. Odredite sve kompleksne brojeve z sa svojstvom da je

$$\arg(z^4 \cdot i^{34}) = \arg(u), \quad |z| = 4.$$

Zadatak 9. Dokažite da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ kompleksan broj $(1+i)^{4n}$ realan.

Primjena kompleksnih brojeva

Zadatak 10. Dokažite da se izraz $(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)\cdots(a_n^2 + b_n^2)$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ može napisati u obliku zbroja dvaju kvadrata.

Zadatak 11. Ako su a i b kompleksni brojevi, dokažite da vrijedi jednakost:

$$|1 - a\bar{b}|^2 - |a - b|^2 = (1 + |ab|)^2 - (|a| + |b|)^2.$$

Zadatak 12. Pokaži da vrijedi $P(\overline{z}) = \overline{P(z)}$, za svaki polinom P s realnim koeficijentima.