4.2 Jensenova nejednakost

Teorem 1 ***[Diskretna Jensenova nejednakost]***. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konveksna na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ takve da $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ vrijedi nejednakost*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{1}$$

Ako je f strogo konveksna, tada u (1) vrijedi stroga nejednakost, osim ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Teorem 2 ***[Diskretna suprotna Jensenova nejednakost]***. *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konkavna na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, i $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ takve da $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ vrijedi nejednakost*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{2}$$

Ako je f strogo konkavna, tada u (2) vrijedi stroga nejednakost, osim ako je $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Zadatak 36. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $a+b+c = 1$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

.

Zadatak 37. Dokažite da za svaki $x \in [0, \infty\rangle$ vrijedi nejednakost

$$x^5 + (1-x)^5 \geq \frac{1}{16}.$$

Zadatak 38. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

Zadatak 39. Neka su a, b, c duljine stranica trokuta, a s njegov poluopseg. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} \geq s.$$

Zadatak 40. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitivni realni brojevi ($n \geq 2$) takvi da vrijedi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dokažite da tada vrijedi nejednakost

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+\cdots+a_n} + \frac{a_2}{1+a_1+a_3+\cdots+a_n} + \cdots + \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Zadatak 41. Odredite minimalnu vrijednost za k tako da za a i b pozitivne realne brojeve vrijedi nejednakost

$$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} \leq k\sqrt[3]{a+b}.$$

Zadatak 42. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geq \sqrt{6(x+y+z)}.$$

Zadatak 43. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $abc = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Zadatak 44. Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geq 6.$$

Zadatak 45. Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \leq \frac{1}{8}.$$

Zadatak 46. Neka su α, β, γ kutovi trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Zadatak 47. Neka su α, β, γ kutovi šiljastokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geq 9.$$

Zadatak 48. Neka su a, b, c duljine stranica, a P površina trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}.$$

Zadatak 49. Neka su a, b, c duljine stranica, α, β, γ nasuprotni kutovi, a R polumjer opisane kružnice šiljastokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{a^2}{\cos\alpha} + \frac{b^2}{\cos\beta} + \frac{c^2}{\cos\gamma} \geq 18R^2.$$