Zadatak 63. Neka su x, y, z pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $xy + yz + zx + xyz = 4$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{y+2} + \sqrt{z+2} \geq 3\sqrt{3}.$$

4.4 Čebiševljeva nejednakost

Teorem 6 *(Diskretni oblik Čebiševljeve nejednakosti)*
Neka su $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ dvije n-torke pozitivnih realnih brojeva i $p = (p_1, \dots, p_n)$ nenegativna n-torka realnih brojeva.

(i) Ako su n-torke a i b monotone u istom smislu, tj. $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ za $i, j = 1, \dots, n$, onda vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i$$

(ii) Obratno, ako je $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \leq 0$ za $i, j = 1, \dots n$, onda vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{i=1}^{n} p_i a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \sum_{i=1}^{n} p_i b_i$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$ ili $b_1 = \cdots = b_n$.

Zadatak 64. Neka su a, b, c duljine stranica, a α, β, γ mjere njima nasuprotnih kutova (u radijanima) trokuta ABC. Dokažite da vrijedi

$$\frac{\alpha a + \beta b + \gamma c}{a + b + c} \geq \frac{\pi}{3}.$$

Zadatak 65. Neka su x_i, $i = 1, 2, \dots n$, pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} \leq x_1^{x_1} x_2^{x_2} \cdots x_n^{x_n}.$$

Zadatak 66. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} + \frac{a^3 + b^3 + d^3}{a + b + d} + \frac{a^3 + c^3 + d^3}{a + c + d} + \frac{b^3 + c^3 + d^3}{b + c + d} \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Zadatak 67. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokažite da za svaki $\alpha \geq 2$ vrijedi

$$\frac{1}{a^\alpha(b+c)} + \frac{1}{b^\alpha(c+a)} + \frac{1}{c^\alpha(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Zadatak 68. Neka su $a_1, a_2, \ldots a_n$ pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a_1}{2-a_1} + \frac{a_2}{2-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{2-a_n} \geq \frac{n}{2n-1}.$$

Zadatak 69. Neka su a, b, c duljine stranica, a α, β, γ mjere njima nasuprotnih kutova u radijanima. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\frac{b+c}{\alpha} + \frac{c+a}{\beta} + \frac{a+b}{\gamma} \geq \frac{12s}{\pi},$$

gdje je s poluopseg trokuta.

Zadatak 70. Neka su a, b, c duljine stranica, a α, β, γ mjere njima nasuprotnih kutova (u radijanima) šiljastokutnog trokuta ABC. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma}{a+b+c} \leq \frac{1}{2}.$$

5 Financijska matematika

5.1 Postotni račun

Procentni iznos W izražen kao p/100- ti dio osnovne veličine G:

$$W = \frac{G \cdot p}{100}$$

W je p% od G.

Zadatak 1. Cijena televizora snižena je za 12% i sada iznosi 2178.00 kn. Kolika je bila cijena televizora prije sniženja ?

Zadatak 2. Cijena pšenice povećana je za 15% i sada iznosi 1 380.00 kn po toni. Kolika je bila cijena pšenice prije poskupljenja?

Zadatak 3. Kupovna cijena jednog automobila je 112 000.00 kn. Automobil se može dobiti na 40- mjesečni kredit. Odmah treba uplatiti 5% cijene automobila, a na ostatak se dodaje 20% kamata. Tako dobiveni iznos dijeli se s 40. Kolika je ovako dobivena mjesečna rata?