

1 Primjene kompleksnih brojeva

Zadatak 1. Izračunajte integrale:

a) $\int \cos^2(3x) \sin^3(2x) dx,$

b) $\int \cos^3(4x) \sin^2(3x) dx,$

c) $\int \cos^2(2x) \sin^2(3x) dx,$

d) $\int e^{ax} \cos(bx) dx,$

e) $\int e^{ax} \sin(bx) dx.$

Zadatak 2. Neka je $T(2, 1)$ vrh kvadrata čije je središte u ishodištu. Odredite koordinate preostalih vrhova kvadrata.

Zadatak 3. Neka su $A(5, 1)$ i $C(1, 3)$ dva nasuprotna vrha kvadrata. Odredite koordinate preostalih vrhova.

Zadatak 4. Neka je $A(2, 3)$ vrh jednakostraničnog trokuta sa središtem u ishodištu. Odredite koordinate preostalih vrhova.

Zadatak 5. Neka je A_k točka kompleksne ravnine koja predstavlja kompleksni broj z_k , $k = 1, 2, 3, 4$. Ako vrijedi $z_4 - z_2 = i(z_3 - z_1)$, dokažite $|A_1A_3| = |A_2A_4|$ i $A_1A_3 \perp A_2A_4$.

Zadatak 6. Neka su $A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_2, y_2)$ točke u kompleksnoj ravnini. Odredite koordinate točke $B(x, y)$ za koju je trokut A_1A_2B jednakokračan pravokutan trokut s pravim kutom u točki B .

Zadatak 7. U kružnicu polumjera R upisan je pravilni mnogokut $A_1A_2 \cdots A_n$. Dokažite da za svaku točku T s kružnice vrijedi

$$\sum_{k=1}^n |TA_k|^2 = 2nR^2.$$

Zadatak 8. U jediničnu kružnicu upisan je pravilni mnogokut $A_1A_2 \cdots A_n$. Dokažite da je umnožak duljina svih njegovih stranica i dijagonala jednak $\sqrt{n^n}$.

Zadatak 9. Neka je a kompleksan te b realan broj. Dokažite da jednadžbe $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$, $\bar{a}z - a\bar{z} + ib = 0$ definiraju pravce.

Zadatak 10. Dokažite da je trokut s vrhovima u točkama O, z_1, z_2 pravokutan s pravim kutom u točki O ako i samo ako vrijedi $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0$.

Zadatak 11. Pokažite da jednadžba pravca koji prolazi točkama z_1, z_2 glasi

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Zadatak 12. Pokažite da je $|z - a| = 2|z|$ jednadžba kružnice sa središtem u točki $-\frac{1}{3}a$ i polumjerom $\frac{2}{3}|a|$.