

2 Jednadžbe

2.1 Jednadžbe s apsolutnim vrijednostima

Zadatak 1. U skupu \mathbb{R} riješite sljedeće jednadžbe:

a) $||x - 3| - 5| = 4$

b) $|3 - x| = 2x - 1$

c) $|2x + 3| = 4x$
Rješenje: $x = \frac{3}{2}$

d) $|2x - 3| + |x + 1| = 5x + 1$

e) $|x - 1| + |x - 2| = 1$
Rješenje: $x \in [1, 2]$

f) $|x + 1| - |2x - 3| = 2$
Rješenje: $x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = 2$

g) $|x^2 + 5x + 4| = -x$

2.2 Racionalne jednadžbe

Zadatak 2. Riješite sljedeće jednadžbe:

a) $\frac{2}{x} - \frac{3x}{9 - x^2} = \frac{5x - 15}{x^2 + 6x + 9}$

b) $\frac{x - 2}{2x^2 + 4x} - \frac{x + 2}{3x^2 - 6x} = \frac{4}{4 - x^2}$

c) $\frac{x + 1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{16}{x^2 - 1}$
Rješenje: $x = 4$

d) $\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 3} = \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x + 4}$
Rješenje: $x = -\frac{5}{2}$

e) $\frac{1}{1 - 4x^2} + \frac{x + 1}{2x^2 + x} = \frac{x - 1}{2x^2 - x}$
Rješenje: nema rješenja

$$\text{f) } 1 - \frac{x}{1 + \frac{x}{1-x}} = x^2$$

$$\text{g) } \frac{1 + |x|}{1 - |x|} - \frac{1 - |x|}{1 + |x|} = 0$$

$$\text{h) } \left| \frac{x}{x+1} \right| - \left| \frac{2x}{1+x} \right| = -1$$

2.3 Iracionalne jednadžbe

Napomena. Ako je $f(x) \geq 0$ i $g(x) \geq 0$ ili $f(x) < 0$ i $g(x) < 0$, onda vrijedi

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n} = (g(x))^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$\sqrt[2n]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow [f(x) = (g(x))^{2n} \wedge g(x) \geq 0], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 3. Riješite sljedeće jednadžbe:

$$\text{a) } \sqrt{x+7} = x+1$$

$$\text{b) } \sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 4$$

$$\text{c) } \sqrt{x-1} + \sqrt{2x+5} = 8$$

$$\text{Rješenje: } x = 10$$

$$\text{d) } \sqrt{4-x} + \sqrt{5+x} = 3$$

$$\text{Rješenje: } x_1 = -5, x_2 = 4$$

$$\text{e) } \sqrt{2x+6} - \sqrt{x-1} = \sqrt{3x-11}$$

$$\text{Rješenje: } x = 5$$

Zadatak 4. Riješite sljedeće jednadžbe:

$$\text{a) } \sqrt{3 - \sqrt{2 + \sqrt{3x+1}}} = 1$$

$$\text{b) } \sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x + \sqrt{x+2}}$$

$$\text{c) } \sqrt{3 + \sqrt{x-3}} = 2$$

$$\text{Rješenje: } x = 4$$

d) $\sqrt{2 - \sqrt{2x - 1}} = 1$

Rješenje: $x = 1$

e) $\sqrt{6 - \sqrt{5 - \sqrt{3 - \sqrt{x + 1}}}} = 2$

Rješenje: $x = 3$

f) $\sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$

Rješenje: $x = 5$

Zadatak 5. Riješite sljedeće jednadžbe:

a) $\sqrt{x^2 + 5x + 3} + 2 = 4 - x$

b) $\sqrt{x^2 + 2x} = 2x - 1$

Rješenje: $x = \frac{3 + \sqrt{6}}{3}$

c) $\sqrt{2x + 3} \cdot \sqrt{2x - 3} = 4$

d) $\sqrt{x + 1} \cdot \sqrt{5 - x} = \sqrt{x + 3} \cdot \sqrt{4 - x}$

Rješenje: $x = \frac{7}{3}$

e) $\frac{1}{1 - \sqrt{1 - x}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 - x}} = \frac{\sqrt{3}}{x}$

f) $\frac{x - 1}{\sqrt{x + 1}} = 4 + \frac{\sqrt{x} - 1}{2}$

Rješenje: $x = 81$

g) $\sqrt{x + 1} - \sqrt[3]{2x - 6} = 2$

Rješenje: $x_1 = 3, x_2 = 35, x_3 = -1$

Napomena.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^{2n+1} = (g(x))^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 6. Riješite sljedeće jednačbe:

a) $\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-5} = 1$

b) $\sqrt[3]{3-x} + \sqrt[3]{6+x} = 3$

Rješenje: $x_1 = -5, x_2 = 2$

c) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$

d) $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{3x-2}$

Rješenje: $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{2}$

2.4 Eksponencijalne i logaritamske jednačbe

Zadatak 7. Riješite sljedeće jednačbe:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \left(\frac{4}{9}\right)^{x+2} = 12$

b) $3^{\frac{3x-5}{3-x}} = 3^{2x}$

Rješenje: $x_1 = -1, x_2 = \frac{5}{2}$

c) $2^{x^2+4x} - 4^{-x^2+2} = 0$

d) $4^{\frac{1}{2}x+2} = 8^{-\frac{1}{2}x+2}$

Rješenje: $x = \frac{4}{5}$

e) $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$

Rješenje: $x = 3$

f) $2^{x+1} \cdot 5^{2x-1} = 40 \cdot 0.1^{x+2}$

g) $27 \cdot \sqrt{3 \cdot 9^{2x-1}} = 9 \cdot 3^{x+1}$

Rješenje: $x = \frac{1}{2}$

h) $3^{2x-3} \cdot 2^{4x-10} = 0.75 \cdot 12^x$

Rješenje: $x = 4$

i) $5 \cdot 3^{2x-1} + 9^x = 8$

Rješenje: $x = \frac{1}{2}$

j) $4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2} = 84$

Rješenje: $x = 1$

Zadatak 8. Riješite sljedeće jednadžbe:

a) $9^x - 3^{x+1} = 4$

b) $36^x = 3^{x+2} \cdot 2^x - 18$

Rješenje: $x_1 = 1, x_2 = \log_6 3$

c) $5 \cdot 2^{2x+2} - 2 \cdot 6^{x+1} = 3^{2x+3}$

d) $2^x + 2 \cdot 2^{-x} = 3$

Rješenje: $x_1 = 0, x_2 = 1$

e) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} = 7^{x-2} + 7^{x-1}$

Rješenje: $x = 3$

f) $\frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{3}$

g) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 2$

Rješenje: $x = 1$

h) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{x}} = \frac{16}{9}$

Rješenje: $x_1 = -2, x_2 = 1$