

Napomena. Jednadžbu oblika

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cdot \cos x + c = 0$$

zovemo **simetričnom** jednadžbom i rješavamo ju uvodeći supstituciju $t = \sin x + \cos x$, a kvadriranjem dobivamo $\frac{t^2-1}{2} = \sin x \cdot \cos x$. Tako se početna jednadžba svodi na kvadratnu po nepoznanici t .

Zadatak 7. Riješite sljedeće jednadžbe:

a) $2 \sin x \cdot \cos x - \sin x - \cos x = 1$

b) $3(\sin x + \cos x) + 2 \sin x \cdot \cos x - 3 = 0$

Rješenje: $x_1 = 2k\pi, x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

c) $\operatorname{tg} x + 1 = \frac{1}{\cos x} - 2 \sin x$

3 Nejednadžbe

3.1 Nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima

Zadatak 1. Riješite sljedeće nejednadžbe:

a) $|4x + 1| \geq -x + 2$

b) $|3x + 1| < 2x + 5$

Rješenje: $x \in \langle -\frac{6}{5}, 4 \rangle$

c) $|x^2 - x - 6| > 4$

d) $|x^2 - 2x - 15| \leq x + 13$

e) $|-x^2 + 2x + 3| \geq x + 4$

Rješenje: $x \in \langle -\infty, \frac{1}{2}(3 - \sqrt{37}) \rangle \cup [\frac{1}{2}(3 + \sqrt{37}), \infty \rangle$

f) $|-x^2 + x| < 3x - 8$

Rješenje: $x \in \emptyset$

g) $|2x - 1| - |x + 2| \leq -\frac{1}{3}x + 1$

h) $|3x + 5| - 2|x - 1| \leq -4x$

Rješenje: $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{3} \rangle$

3.2 Racionalne nejednadžbe

Napomena. Nejednadžbe tipa

$$(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n) > 0,$$

gdje su $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ mogu se riješiti tzv. metodom intervala. Na brojevnom pravcu nanesimo brojeve a_1, a_2, \dots, a_n u rastućem poretku. Na intervalu iza najvećeg broja a_n stavimo znak plus, a na sljedećem lijevom intervalu znak minus, pa zatim opet znak plus, pa minus itd. Rješenje nejednadžbe je unija intervala nad kojim je znak plus. Na sličan način možemo riješiti nejednadžbe tipa

$$\frac{(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)}{(x - b_1)(x - b_2) \cdots (x - b_n)} > 0,$$

gdje su svi realni brojevi a_i, b_j međusobno različiti.

Zadatak 2. Riješite sljedeće nejednadžbe:

a) $\frac{7x + 1}{4x - 3} \geq -2$

b) $\frac{5 - 9x}{2x - 5} < 3$

Rješenje: $x \in \langle -\infty, \frac{4}{3} \rangle \cup \langle \frac{5}{2}, \infty \rangle$

c) $\frac{(x - 2)(x - 5)(x - 6)}{(x - 3)(x - 4)} > 0$

Rješenje: $x \in \langle 2, 3 \rangle \cup \langle 4, 5 \rangle \cup \langle 6, \infty \rangle$

d) $\frac{(x - 5)(x + 1)^2(x + 2)}{(x - 1)(x + 6)} \leq 0$

e) $\frac{(x^2 + x + 5)(x + 1)(x - 3)}{(x + 7)(x - 4)} \geq 0$

f) $\frac{(-x + 2)(x - 1)}{(-x - 3)(x - 5)(-x + 3)} > 0$

Rješenje: $x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 1, 2 \rangle \cup \langle 3, 5 \rangle$

g) $\frac{(x + 1)^3(x - 2)}{(x - 4)(x + 3)(x - 5)^2} < 0$

Rješenje: $x \in \langle -3, -1 \rangle \cup \langle 2, 4 \rangle$

Zadatak 3. Riješite sljedeće nejednadžbe:

a) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 8x + 15} \geq 0$

b) $\frac{x^2 - x}{x^2 + 9x + 14} \geq 0$
 Rješenje: $x \in \langle -\infty, -7 \rangle \cup \langle -2, 0 \rangle \cup [1, \infty)$

c) $\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 9x + 20} \leq 0$
 Rješenje: $x \in \langle -5, -4 \rangle \cup [-2, 1]$

d) $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 4x + 3} < -3$

e) $\frac{x^2 - 1}{x^2 + x} < \frac{1}{2}$
 Rješenje: $x \in \langle 0, 2 \rangle$

f) $\frac{x^2 - x}{x^2 + x + 1} < 2$
 Rješenje: $x \in \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle -1, \infty \rangle$

3.3 Iracionalne jednadžbe

Napomena.

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow [(f(x) \geq 0 \wedge g(x) < 0) \vee (f(x) > (g(x))^{2n} \wedge g(x) \geq 0)], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 4. Riješite sljedeće nejednadžbe:

a) $\sqrt{x+5} > 7-x$

b) $\sqrt{1-4x^2} \geq 1-3x$

c) $\sqrt{x^2-3x} > x+1$
 Rješenje: $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{5} \rangle$

d) $\sqrt{3x^2-2x-1} \geq x$
 Rješenje: $x \in \langle -\infty, -\frac{1}{3} \rangle \cup [\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}), \infty)$

e) $\sqrt{3 + \sqrt{x + 4}} > 2$

f) $\sqrt{5 + \sqrt{x^2 + 7}} > 3$

Rješenje: $x \in \langle -\infty, -3 \rangle \cup \langle 3, \infty \rangle$

Napomena.

$$\sqrt[2n]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow [f(x) < (g(x))^{2n} \wedge f(x) \geq 0 \wedge g(x) > 0], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zadatak 5. Riješite sljedeće nejednadžbe:

a) $\sqrt{4x + 10} < 2x + 1$

b) $\sqrt{x^2 - 3x + 2} < x$

Rješenje: $x \in [2, \infty) \cup \langle \frac{2}{3}, 1 \rangle$

c) $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \leq x - 3$

d) $\sqrt{-x^2 - x + 2} < x + 4$

Rješenje: $x \in [-2, 1]$

e) $\sqrt{x^2 + 4x + 4} < -x - 2$

Zadatak 6. Riješite sljedeće nejednadžbe:

a) $\sqrt{x + 1} + \sqrt{x + 6} \leq 5$

b) $\sqrt{x - 3} + \sqrt{x + 4} \leq 2$

Rješenje: $x \in \emptyset$

c) $\sqrt{5x + 4} + \sqrt{5x - 4} > \sqrt{10x - 6}$

d) $\sqrt{x + 1} - \sqrt{2x - 3} < \sqrt{x + 2}$

Rješenje: $x \in [\frac{3}{2}, \infty)$

e) $\frac{1 - \sqrt{1 - 8x^2}}{2x} < 1$

Rješenje: $x \in [-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0) \cup \langle 0, \frac{1}{3} \rangle$

f) $\sqrt[3]{5x^2 + 2x + 3} \leq x + 1$