

## 4 Nejednakosti

### 4.1 Aritmetička, geometrijska, harmonijska i kvadratna sredina i pripadne nejednakosti

Neka je  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  dana  $n$ -toraka pozitivnih brojeva. Tada su harmonijska, geometrijska, aritmetička i kvadratna sredina  $n$ -torke  $a$  definirane redom sa

$$H_n(a) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}},$$

$$G_n(a) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n},$$

$$A_n(a) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

$$K_n(a) = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

Vrijedi  $H_n(a) \leq G_n(a) \leq A_n(a) \leq K_n(a)$ . Pri tome jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

**Zadatak 1.** Neka su  $a, b, c$  pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

**Zadatak 2.** Neka su  $a, b, c$  pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{1}{c}\right)\left(c + \frac{1}{a}\right) \geq 8.$$

**Zadatak 3.** Neka su  $a_1, a_2, \dots, a_n$  pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$ . Dokažite da vrijedi

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 2^n.$$

**Zadatak 4.** Neka su  $a, b, c$  pozitivni realni brojevi takvi da vrijedi  $a+b+c = 1$ . Dokažite da vrijedi

$$ab + bc + ac \geq 9abc.$$

**Zadatak 5.** Neka su  $a, b, c$  pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

**Zadatak 6.** Dokažite da za svaki prirodan broj  $n$  vrijedi nejednakost

$$3n(3n + 1)^2 > 4 \sqrt[n]{(3n)!}$$

**Zadatak 7.** Dokažite da za svaki prirodan broj  $n$  vrijedi nejednakost

$$n^n \geq 2^{n-1}n!$$

**Zadatak 8.** Dokažite da za svaki prirodan broj  $n \geq 2$  vrijedi nejednakost

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$$

**Zadatak 9.** Dokažite da za svaki prirodan broj  $n$  vrijedi nejednakost

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$