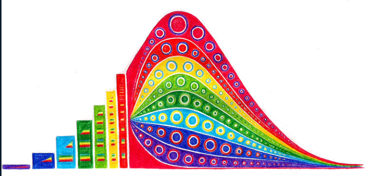

Numerička matematika

Tema: Pogreške

24. 10. 2023.

predavač: Kristian Sabo

asistent: Maja Damjanović

Apsolutna i relativna pogreška

- a stvarna vrijednost neke poznate ili nepoznate veličine, a^* njezina približna vrijednost

Definicija

Razliku $(a - a^*)$ između stvarne veličine a i njene aproksimacije a^* nazivamo pogreška aproksimacije. Apsolutnu vrijednost pogreške aproksimacije nazivamo apsolutna pogreška aproksimacije i označavamo

$$\Delta a^* = |a - a^*|.$$

Apsolutna i relativna pogreška

- a stvarna vrijednost neke poznate ili nepoznate veličine, a^* njezina približna vrijednost

Definicija

Razliku $(a - a^*)$ između stvarne veličine a i njene aproksimacije a^* nazivamo pogreška aproksimacije. Apsolutnu vrijednost pogreške aproksimacije nazivamo apsolutna pogreška aproksimacije i označavamo

$$\Delta a^* = |a - a^*|.$$

Apsolutna i relativna pogreška

- u praksi stvarna vrijednost a često nije poznata, ali se zna da se pogreška aproksimacije kreće u intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$, za neki $\varepsilon > 0$, tj. vrijedi

$$-\varepsilon \leq a - a^* \leq \varepsilon \Leftrightarrow |a - a^*| \leq \varepsilon$$

- broj $\varepsilon > 0$ nazivamo granica pogreške aproksimacije
- često simbolički pišemo

$$a = a^* \pm \varepsilon$$

Apsolutna i relativna pogreška

- u praksi stvarna vrijednost a često nije poznata, ali se zna da se pogreška aproksimacije kreće u intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$, za neki $\varepsilon > 0$, tj. vrijedi

$$-\varepsilon \leq a - a^* \leq \varepsilon \Leftrightarrow |a - a^*| \leq \varepsilon$$

- broj $\varepsilon > 0$ nazivamo granica pogreške aproksimacije
- često simbolički pišemo

$$a = a^* \pm \varepsilon$$

Apsolutna i relativna pogreška

- u praksi stvarna vrijednost a često nije poznata, ali se zna da se pogreška aproksimacije kreće u intervalu $[-\varepsilon, \varepsilon]$, za neki $\varepsilon > 0$, tj. vrijedi

$$-\varepsilon \leq a - a^* \leq \varepsilon \Leftrightarrow |a - a^*| \leq \varepsilon$$

- broj $\varepsilon > 0$ nazivamo granica pogreške aproksimacije
- često simbolički pišemo

$$a = a^* \pm \varepsilon$$

Apsolutna i relativna pogreška

Definicija

Omjer između apsolutne pogreške Δa^* i apsolutne vrijednosti veličine a ($a \neq 0$) nazivamo relativna pogreška aproksimacije i pišemo

$$\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a|}.$$

Napomena

Kako je u praksi obično $a^* \approx a$, onda se relativna pogreška često izražava na sljedeći način

$$\delta a^* \approx \frac{\Delta a^*}{|a^*|}, \quad a^* \neq 0.$$

Apsolutna i relativna pogreška

Definicija

Omjer između apsolutne pogreške Δa^* i apsolutne vrijednosti veličine a ($a \neq 0$) nazivamo relativna pogreška aproksimacije i pišemo

$$\delta a^* = \frac{\Delta a^*}{|a|}.$$

Napomena

Kako je u praksi obično $a^* \approx a$, onda se relativna pogreška često izražava na sljedeći način

$$\delta a^* \approx \frac{\Delta a^*}{|a^*|}, \quad a^* \neq 0.$$

Zadatak 1.

Ocijenite integral $\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx$ (aproksimirajte) te izračunajte apsolutnu i relativnu pogrešku.

Signifikantne znamenke

- svaki pozitivni realni broj a u dekadskom sustavu možemo zapisati u obliku

$$a = b_m 10^m + b_{m-1} 10^{m-1} + \cdots + b_{m-n+1} 10^{m-n+1} + b_{m-n} 10^{m-n} + \cdots, \quad b_m \neq 0,\ m \in \mathbb{Z} \tag{1}$$

gdje su $b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ znamenke broja a

Signifikantne znamenke

Definicija

Neka je

$$a^* = b_m^* 10^m + b_{m-1}^* 10^{m-1} + \cdots + b_{m-n+1}^* 10^{m-n+1} + b_{m-n}^* 10^{m-n} + \cdots, \\ b_m^* \neq 0,\ m \in \mathbb{Z}$$

aproksimacija broja a zadanog s (1). Kaže se da su prvih n znamenki $b_m^*, \ldots, b_{m-n+1}^*$ broja a^* signifikantne (pouzdane) ako je n najveći pozitivni cijeli broj za koji vrijedi

$$\Delta a^* = |a - a^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

Signifikantne znamenke

Napomena

Broj signifikantnih znamenaka približnog broja a^* možemo definirati i na drugi način - kao najveći pozitivni cijeli broj n za koji vrijedi

$$\delta a^* \approx \frac{|a - a^*|}{|a^*|} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n+1}.$$

Broj signifikantnih znamenki procijenjen na taj način može se od onog iz prethodne definicije razlikovati najviše za jedan.

Zadatak 5.

Ako je a^* aproksimacija broja a, koliko znamenki od a^* je signifikantno:

(a) $a = 23.395, \quad a^* = 23.40;$

(b) $a = 0.00275, \quad a^* = 0.00266;$

(c) $a = 243317, \quad a^* = 243315;$

(d) $a = 0.012815, \quad a^* = 0.0130.$

Pogreške kod izračunavanja vrijednosti funkcije

- zadana je realna funkcija n varijabli $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Treba izračunati apsolutnu pogrešku vrijednosti funkcije u točki $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ ako je $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*, i = 1, \ldots, n$
- prema teoremu o srednjoj vrijednosti je

$$\Delta z^* = |f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} (x_i - x_i^*) \right|,$$

gdje je $\tilde{x}_i$ između x_i i x_i^*

- budući brojevi $\tilde{x}_i$ nisu poznati, a $x_i^* \approx x_i$, možemo pisati

$$\Delta z^* \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^*$$

- zato je

$$\Delta z^* \approx \sum_{i=1}^{n} |\partial_i f^*| \Delta x_i^*, \text{ gdje je } \partial_i f^* = \frac{\partial f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i}$$

Pogreške kod izračunavanja vrijednosti funkcije

- zadana je realna funkcija n varijabli $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Treba izračunati apsolutnu pogrešku vrijednosti funkcije u točki $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ ako je $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*, i = 1, \ldots, n$
- prema teoremu o srednjoj vrijednosti je

$$\Delta z^* = |f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i}(x_i - x_i^*) \right|,$$

gdje je $\tilde{x}_i$ između x_i i x_i^*

- budući brojevi $\tilde{x}_i$ nisu poznati, a $x_i^* \approx x_i$, možemo pisati

$$\Delta z^* \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^*$$

- zato je

$$\Delta z^* \approx \sum_{i=1}^{n} |\partial_i f^*| \Delta x_i^*, \text{ gdje je } \partial_i f^* = \frac{\partial f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i}$$

Pogreške kod izračunavanja vrijednosti funkcije

- zadana je realna funkcija n varijabli $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Treba izračunati apsolutnu pogrešku vrijednosti funkcije u točki $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ ako je $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*, i = 1, \ldots, n$
- prema teoremu o srednjoj vrijednosti je

$$\Delta z^* = |f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} (x_i - x_i^*) \right|,$$

gdje je $\tilde{x}_i$ između x_i i x_i^*

- budući brojevi $\tilde{x}_i$ nisu poznati, a $x_i^* \approx x_i$, možemo pisati

$$\Delta z^* \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^*$$

- zato je

$$\Delta z^* \approx \sum_{i=1}^{n} |\partial_i f^*| \Delta x_i^*, \text{ gdje je } \partial_i f^* = \frac{\partial f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i}$$

Pogreške kod izračunavanja vrijednosti funkcije

- zadana je realna funkcija n varijabli $z = f(x_1, \ldots, x_n)$. Treba izračunati apsolutnu pogrešku vrijednosti funkcije u točki $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ ako je $x_i = x_i^* \pm \Delta x_i^*, i = 1, \ldots, n$
- prema teoremu o srednjoj vrijednosti je

$$\Delta z^* = |f(x_1, \ldots, x_n) - f(x_1^*, \ldots, x_n^*)| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} (x_i - x_i^*) \right|,$$

gdje je $\tilde{x}_i$ između x_i i x_i^*

- budući brojevi $\tilde{x}_i$ nisu poznati, a $x_i^* \approx x_i$, možemo pisati

$$\Delta z^* \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^* \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^*$$

- zato je

$$\Delta z^* \approx \sum_{i=1}^{n} |\partial_i f^*| \Delta x_i^*, \text{ gdje je } \partial_i f^* = \frac{\partial f(x_1^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i}$$

Zadatak 1.

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x + \sin x$, $x = 1 \pm 0.01$.
Procijenite apsolutnu pogrešku u točki $x^* = 1$.

Zadatak 2.

Procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku pri izračunavanju površine P pravokutnika sa stranicama $a = 29.3 \pm 0.05$ cm i $b = 18.1 \pm 0.04$ cm.

Zadatak 3.

Procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku prilikom:

(a) zbrajanja n približnih brojeva;

(b) množenja n približnih brojeva;

(c) potenciranja s $n-$tom potencijom jednog približnog broja.

Zadatak 1.

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x + \sin x$, $x = 1 \pm 0.01$. Procijenite apsolutnu pogrešku u točki $x^* = 1$.

Zadatak 2.

Procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku pri izračunavanju površine P pravokutnika sa stranicama $a = 29.3 \pm 0.05$ cm i $b = 18.1 \pm 0.04$ cm.

Zadatak 3.

Procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku prilikom:

(a) zbrajanja n približnih brojeva;

(b) množenja n približnih brojeva;

(c) potenciranja s $n-$tom potencijom jednog približnog broja.

Zadatak 1.

Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^x + \sin x$, $x = 1 \pm 0.01$. Procijenite apsolutnu pogrešku u točki $x^* = 1$.

Zadatak 2.

Procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku pri izračunavanju površine P pravokutnika sa stranicama $a = 29.3 \pm 0.05$ cm i $b = 18.1 \pm 0.04$ cm.

Zadatak 3.

Procijenite apsolutnu i relativnu pogrešku prilikom:

(a) zbrajanja n približnih brojeva;

(b) množenja n približnih brojeva;

(c) potenciranja s $n-$tom potencijom jednog približnog broja.