



Numerička matematika

Tema: Interpolacija.

7. 11. 2020.



Teorem

Neka je $f \in C_{[a,b]}^{n+1}$ funkcija čije vrijednosti su poznate u $(n + 1)$ točaka $x_i, i = 0, 1, \dots, n,$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad y_i = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

i neka je P_n odgovarajući interpolacijski polinom. Tada za svaki $\bar{x} \in [a, b]$ postoji $\xi \in \langle a, b \rangle,$ tako da je

$$f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega(\bar{x}), \quad \omega(\bar{x}) = (\bar{x} - x_0) \cdots (\bar{x} - x_n). \quad (1)$$





Ako označimo $M_{n+1} := \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ onda iz 1 slijedi

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega(x)|$$





Zadatak 1.

Provjerite pogrešku interpolacije za funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$ u čvorovima $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ na intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pogrešku procijenite u točki $\bar{x} = \frac{5}{12}$.

Zadatak 2.

Zadana je funkcija $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 2]$.

- Odredite interpolacijski polinom za f u čvorovima $0, \frac{1}{2}, 2$.
- Ocjenite grešku interpolacijskog polinoma iz prethodnog podzadatka.
- Na osnovu prethodnog podzadatka nađite uniformnu ocjenu za pogrešku za svaki $\bar{x} \in [0, 2]$.
- Kako bi trebalo odabrati čvorove tako da greška bude uniformno najmanja?





Zadatak 1.

Provjerite pogrešku interpolacije za funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$ u čvorovima $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ na intervalu $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Pogrešku procijenite u točki $\bar{x} = \frac{5}{12}$.

Zadatak 2.

Zadana je funkcija $f(x) = e^x$ na intervalu $[0, 2]$.

- Odredite interpolacijski polinom za f u čvorovima $0, \frac{1}{2}, 2$.
- Ocjenite grešku interpolacijskog polinoma iz prethodnog podzadatka.
- Na osnovu prethodnog podzadatka nađite uniformnu ocjenu za pogrešku za svaki $\bar{x} \in [0, 2]$.
- Kako bi trebalo odabrati čvorove tako da greška bude uniformno najmanja?



Hermiteov interpolacijski polinom

- osim vrijednosti funkcije u čvorovima, zadane su i vrijednosti derivacije iste funkcije u čvorovima
- postupamo na isti način kao u općem Newtonovom obliku interpolacijskog polinoma, s time da se podijeljene razlike za ponovljene čvorove definiraju na sljedeći način

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i), \quad f[x_i, x_i, x_i] := f''(x_i)/2!,$$

te podijeljena razlika n -tog reda

$$f[x_i, \dots, x_i] := f^{(n)}(x_i)/n!$$





Hermiteov interpolacijski polinom

- osim vrijednosti funkcije u čvorovima, zadane su i vrijednosti derivacije iste funkcije u čvorovima
- postupamo na isti način kao u općem Newtonovom obliku interpolacijskog polinoma, s time da se podijeljene razlike za ponovljene čvorove definiraju na sljedeći način

$$f[x_i, x_i] := f'(x_i), \quad f[x_i, x_i, x_i] := f''(x_i)/2!,$$

te podijeljena razlika n –tog reda

$$f[x_i, \dots, x_i] := f^{(n)}(x_i)/n!$$





Zadatak 1.

Odredite Hermiteov interpolacijski polinom za funkciju za koju je poznato $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f(1) = 10$, $f'(1) = 20$.

