



Numerička matematika

Tema: Interpolacija.

14. 11. 2020.



Zadatak 1.

Za funkciju $f(x) = x^4 + 1$ odredite Hermiteov interpolacijski polinom u čvorovima 0 i 1.





- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

- za $i = 1, \dots, n$ definiramo

$$\varphi|_{[x_{i-1}, x_i]} = \varphi_i$$

$$\varphi_i(x) = y_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

- funkcija φ je neprekidna na intervalu $[a, b]$

$$\varphi_i(x_i) = y_i = \varphi_{i+1}(x_i), \quad i = 1, \dots, n - 1$$

i linearna na svakom podintervalu. Osim toga vrijedi

$$\varphi(x_0) = \varphi_1(x_0) = y_0, \quad \varphi(x_i) = \varphi_i(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n$$

tj. φ interpolira funkciju f u čvorovima x_0, x_1, \dots, x_n





Zadatak 2.

Na osnovu podataka iz tablice odredite linearni interpolacijski spline φ i izračunajte $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)$

x	1	3	5
y	3	1	2





- hat-funkcije $C_i, i = 1, \dots, n - 1$

$$C_i(x) = \begin{cases} (x - x_{i-1})/(x_i - x_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+1} - x)/(x_{i+1} - x_i), & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$C_0(x) = \begin{cases} (x_1 - x)/(x_1 - x_0), & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$C_n(x) = \begin{cases} (x - x_{n-1})/(x_n - x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$





- vrijedi

$$C_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

- linearni interpolacijski spline možemo definirati formulom

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n y_i C_i(x)$$





Zadatak 3.

Za podatke iz prethodnog zadatka odredite linearni interpolacijski spline pomoću hat-funkcija.

Zadatak 4.

Odredite pogrešku interpolacije linearnog interpolacijskog splinea za funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$ u čvorovima $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ te odredite linearni interpolacijski spline i skicirajte ga.





Zadatak 3.

Za podatke iz prethodnog zadatka odredite linearni interpolacijski spline pomoću hat-funkcija.

Zadatak 4.

Odredite pogrešku interpolacije linearnog interpolacijskog splinea za funkciju $f(x) = \cos(2\pi x)$ u čvorovima $x = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ te odredite linearni interpolacijski spline i skicirajte ga.





Zadatak 5.

Interpolirajte funkciju $f(x) = e^x$ na $[0, 2]$ linearnim interpolacijskim splineom u ekvidistantnim točkama $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 2$. Koliki treba uzeti n tako da greška aproksimacije funkcije f bude manja od $\varepsilon = 10^{-4}$ u svim točkama.

