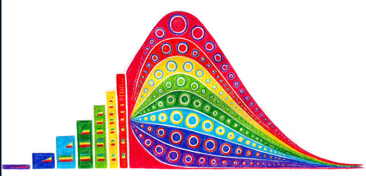

Numerička matematika

Tema: Interpolacija.

21. 11. 2023.

predavač: Kristian Sabo

asistent: Maja Damjanović

Kubični interpolacijski spline

- neprekidnu funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ čije vrijednosti $y_0, y_1, \ldots, y_n$ poznajemo u $(n + 1)$ čvorova $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, interpolirat ćemo funkcijom $C : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$C(x) = C_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \ldots, n$$

  gdje su C_i kubični polinomi koji trebaju zadovoljavati sljedeće uvjete:
  (i) $C_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, i = 1, \ldots, n$
  (ii) $C_i(x_i) = y_i, i = 1, \ldots, n$
  (iii) $C_i'(x_i) = C_{i+1}'(x_i), i = 1, \ldots, n-1$
  (iv) $C_i''(x_i) = C_{i+1}''(x_i), i = 1, \ldots, n-1$
- za jednoznačno određivanje funkcije C potrebno je zadati još dva uvjeta:

$$0 = C_1''(x_0), \quad 0 = C_n''(x_n)$$

Teorem

Zadani su podaci (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ koji zadovoljavaju uvjete $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Tada postoji jedinstveni prirodni kubični interpolacijski spline C, pri čemu su polinomi C_i, $i = 1, \ldots, n$ zadani s

$$C_i(x) = \left(y_{i-1} - s_{i-1}\frac{h_i^2}{6}\right) + b_i(x - x_{i-1}) + \frac{s_{i-1}}{6h_i}(x_i - x)^3 + \frac{s_i}{6h_i}(x - x_{i-1})^3$$

gdje je

$$b_i = d_i - (s_i - s_{i-1})\frac{h_i}{6}$$

$$d_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}, \quad h_i = x_i - x_{i-1},$$

a brojevi s_i, $i = 0, \ldots, n$ zadovoljavaju sustav jednadžbi

$$s_{i-1}h_i + 2s_i(h_i + h_{i+1}) + s_{i+1}h_{i+1} = 6(d_{i+1} - d_i), \quad i = 1, \ldots, n-1$$

$$s_0 = s_n = 0$$

Zadatak 1.

Na osnovu podataka iz tablice

x	1	2	3	4
y	1	5	6	7

(a) Odredite prirodni kubični interpolacijski spline.

(b) Izračunajte $C(\frac{3}{2})$.

(c) Izračunajte vrijednost druge derivacije od C u čvorovima.

(d) Izračunajte $C'(2)$.

Zadatak 2.

Za točke $T_0 = (0, 10), T_1 = (1, 12), T_2 = (2, 10), T_3 = (3, 12)$ i $T_4 = (4, 14)$ odredite vrijednost drugih derivacija pripadnog prirodnog kubičnog interpolacijskog splinea u čvorovima interpolacije.

Po dijelovima kubna interpolacija

- pretpostavimo da su zadani podaci $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ i $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, te želimo pronaći funkciju φ koja interpolira zadane podatke takvu da je $\varphi\big|_{[x_{i-1},x_i]} = \varphi_i$, $i = 1, \ldots, n$ polinom trećeg stupnja, takav da vrijedi

$$\varphi_i(x_{i-1}) = y_{i-1}, \quad \varphi_i(x_i) = y_i$$

$$\varphi_i'(x_{i-1}) = y_{i-1}', \quad \varphi_i'(x_i) = y_i'$$

- ako su nam poznate i vrijednosti derivacije u čvorovima interpolacije, tada možemo postupiti kao u slučaju Hermiteovog interpolacijskog polinoma, tražeći na svakom podintervalu pripadni kubni polinom

Zadatak 3.

Odredite lokalni oblik za po dijelovima kubnu interpolaciju za funkciju $f(x) = 1/x$ i čvorove interpolacije $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$.

Rješavanje nelinearnih jednadžbi

- f realna neprekidna funkcija definirana na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Svaki kompleksni broj ξ koji je rješenje jednadžbe

  $$f(\xi) = 0,$$

  nazivamo nultočkom funkcije f.
  Ako je funkcija neprekidna na intervalu $[a, b]$ i ako na rubovima intervala prima suprotne vrijednosti

  $$f(a) \cdot f(b) < 0$$

  onda postoji barem jedna točka $\xi \in I$ za koju vrijedi $f(\xi) = 0$.
- traženje realnog rješenja jednadžbe svodi se na dva koraka:
  1. separirati interval I u kome funkcija ima nultočku,
  2. nekom iterativnom metodom odrediti aproksimaciju nultočke ξ s unaprijed zadanom točnošću.

Zadatak 1.

Separirajte intervale u kojima se nalaze nultočke funkcije $f(x) = x^3 - 3x - 1$.