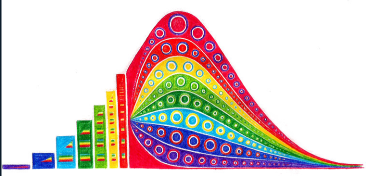


Numerička matematika

Tema: Rješavanje nelinearnih jednadžbi.

28. 11. 2023.

predavač: Kristian Sabo

asistent: Maja Damjanović

Rješavanje nelinearnih jednadžbi

- f realna neprekidna funkcija definirana na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Svaki kompleksni broj ξ koji je rješenje jednadžbe

  $$f(\xi) = 0,$$

  nazivamo nultočkom funkcije f.
  Ako je funkcija neprekidna na intervalu $[a, b]$ i ako na rubovima intervala prima suprotne vrijednosti

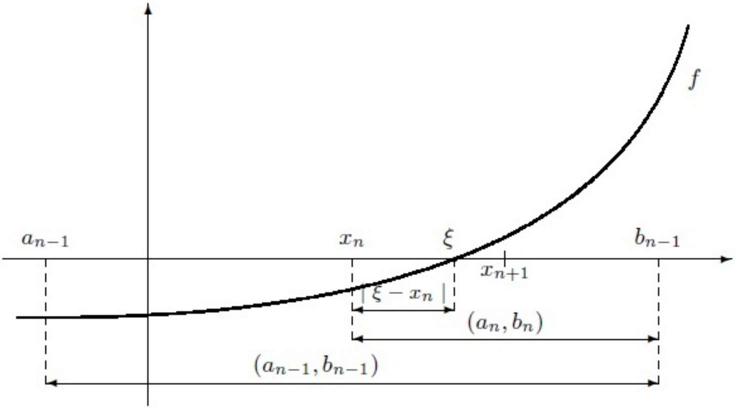
  $$f(a) \cdot f(b) < 0$$

  onda postoji barem jedna točka $\xi \in I$ za koju vrijedi $f(\xi) = 0$.
- traženje realnog rješenja jednadžbe svodi se na dva koraka:
  1. separirati interval I u kome funkcija ima nultočku,
  2. nekom iterativnom metodom odrediti aproksimaciju nultočke ξ s unaprijed zadanom točnošću.

Zadatak 1.

Separirajte intervale u kojima se nalaze nultočke funkcije $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Metoda bisekcije



- $a_0 = a, b_0 = b$
- definiramo niz segmenata $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$ koji sadrži korijen jednadžbe $f(x) = 0$

$$x_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1})$$

- ako je $f(a_{n-1}) \cdot f(x_n) < 0$, tada je

$$a_n = a_{n-1} \quad \& \quad b_n = x_n$$

inače

$$a_n = x_n \quad \& \quad b_n = b_{n-1}$$

- linearna brzina konvergencije

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|\xi - x_n|$$

pri čemu vrijedi

$$|\xi - x_n| \leq \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}|$$

Zadatak 2.

Metodom bisekcije odredite pozitivnu nultočku funkcije $f(x) = x^3 - 3x - 1$ uz točnost $\varepsilon = 0.05$.

Zadatak 3. (za vježbu)

Metodom bisekcije odredite nultočku funkcije $f(x) = 2x - \ln x - 4$ uz točnost $\varepsilon = 0.05$ (za početni segment uzmite $[2, 2.5]$). (Rješenje: $x_{aprox} = 2.46975$)

Zadatak 2.

Metodom bisekcije odredite pozitivnu nultočku funkcije $f(x) = x^3 - 3x - 1$ uz točnost $\varepsilon = 0.05$.

Zadatak 3. (za vježbu)

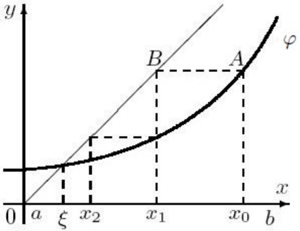
Metodom bisekcije odredite nultočku funkcije $f(x) = 2x - \ln x - 4$ uz točnost $\varepsilon = 0.05$ (za početni segment uzmite $[2, 2.5]$). (Rješenje: $x_{aprox} = 2.46975$)

Metoda jednostavnih iteracija

- jednadžbu $f(x) = 0$ možemo napisati u obliku

$$x = \varphi(x),$$

gdje za funkciju φ obično postoji više izbora.



- definiramo niz aproksimacija

$$x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), x_3 = \varphi(x_2), \ldots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \ldots$$

Neka je $\varphi : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidno derivabilna funkcija za koju vrijedi:

(i) $\varphi(x) \in I$ za svaki $x \in I$,

(ii) $\exists q \in \langle 0, 1\rangle$, takav da je $|\varphi'(x)| \leq q$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

Tada postoji jedinstveni $\xi \in I$ takav da bude $\varphi(\xi) = \xi$. Osim toga, za proizvoljni $x_0 \in I$, niz definiran s

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots$$

konvergira prema ξ i vrijede ovakve ocjene pogreške aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|,$$

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|.$$

Metoda ima linearnu brzinu konvergencije, tj. vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leq q|\xi - x_n|.$$

Zadatak 1.

Metodom jednostavnih iteracija riješite jednadžbu $x^3 - x - 1 = 0$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 2.

Funkcija $f(x) = x + \ln x$ ima jednostruku realnu nultočku ξ na intervalu $[0.1, 1]$. Koji od navedenih iterativnih procesa konvergira prema ξ?

(a) $x_{n+1} = -\ln x_n$;

(b) $x_{n+1} = e^{-x_n}$;

(c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + e^{-x_n})$.

Zadatak 3.(za vježbu)

Metodom jednostavnih iteracija odredite po apsolutnoj vrijednosti veće rješenje jednadžbe $2x - \log x - 7 = 0$ uz točnost $\varepsilon = 0.0001$.
(Rješenje: $x_{aprox} = 3.7892215$)

Zadatak 1.

Metodom jednostavnih iteracija riješite jednadžbu $x^3 - x - 1 = 0$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 2.

Funkcija $f(x) = x + \ln x$ ima jednostruku realnu nultočku ξ na intervalu $[0.1, 1]$. Koji od navedenih iterativnih procesa konvergira prema ξ?

(a) $x_{n+1} = -\ln x_n$;

(b) $x_{n+1} = e^{-x_n}$;

(c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + e^{-x_n})$.

Zadatak 3.(za vježbu)

Metodom jednostavnih iteracija odredite po apsolutnoj vrijednosti veće rješenje jednadžbe $2x - \log x - 7 = 0$ uz točnost $\varepsilon = 0.0001$. (Rješenje: $x_{aprox} = 3.7892215$)

Zadatak 1.

Metodom jednostavnih iteracija riješite jednadžbu $x^3 - x - 1 = 0$ uz točnost $\varepsilon = 0.0005$.

Zadatak 2.

Funkcija $f(x) = x + \ln x$ ima jednostruku realnu nultočku ξ na intervalu $[0.1, 1]$. Koji od navedenih iterativnih procesa konvergira prema ξ?

(a) $x_{n+1} = -\ln x_n$;

(b) $x_{n+1} = e^{-x_n}$;

(c) $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + e^{-x_n})$.

Zadatak 3.(za vježbu)

Metodom jednostavnih iteracija odredite po apsolutnoj vrijednosti veće rješenje jednadžbe $2x - \log x - 7 = 0$ uz točnost $\varepsilon = 0.0001$.
(Rješenje: $x_{aprox} = 3.7892215$)