

MathOS cup - zadaci za 4. razred

Zadaci za 1 bod

Zadatak 1 Zbroj svih prirodnih brojeva između 1 i 1000 koji su djeljivi sa 17 iznosi:

Odgovor: (a) 29087, (b) 29493, (c) 29580, (d) 30090

Rješenje: (a)

Zadatak 2 Koeficijent uz x^6 u izrazu $(\sqrt{x} + x^3)^7$ iznosi:

Odgovor: (a) 0, (b) 1, (c) 7, (d) 21

Rješenje: (c)

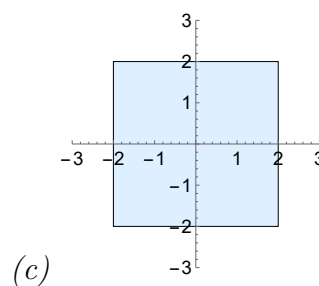
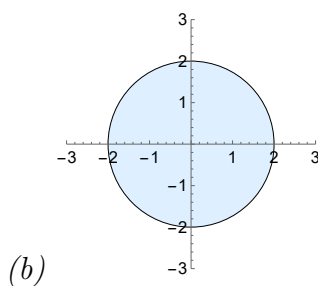
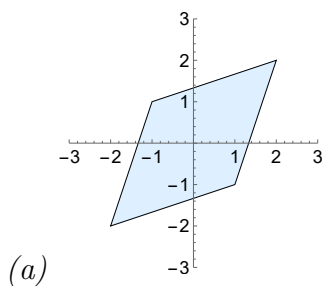
Zadatak 3 Neka je $f(x) = ax^2 + bx + 5$. Odredite sumu realnih parametara a i b tako da tangenta na graf funkcije f u točki $(1, 9)$ bude okomita na pravac $x + 3y - 3 = 0$.

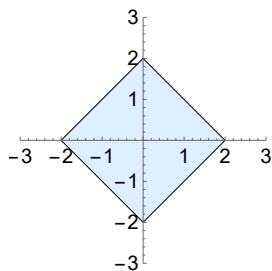
Odgovor: (a) -4 , (b) 4 , (c) 6 , (d) 10

Rješenje: (b)

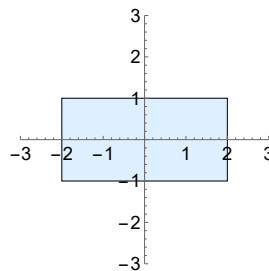
Zadatak 4 Skicirajte i označite dio ravnine u kojemu leže sve točke (x, y) koje zadovoljavaju nejednakost $|x| + |y| \leq 2$.

Odgovor:

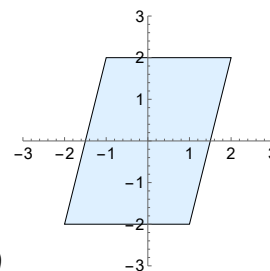




(d)



(e)



(f)

Rješenje: (d)

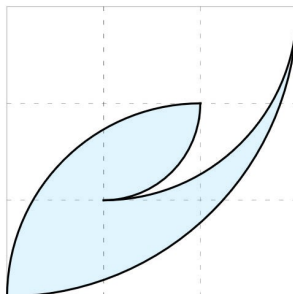
Zadaci za 2 boda

Zadatak 5 Odredite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^n}}$.

Odgovor: (a) 0, (b) $\frac{2}{7}$, (c) $\frac{12}{7}$, (d) $\frac{7}{12}$

Rješenje: (c)

Zadatak 6 Ivan je iz kvadratne limene ploče duljine stranice 3 metra izrezao lik omeđen kružnim lukovima kao na slici. Odredite koliko posto ploče je otpad. Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.



Odgovor: (a) 29 (b) 45 (c) 68 (d) 73

Rješenje: (c).

Zadatak 7 Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, funkcija definirana formulom $f(x) = \log_2 \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$.
Odredite skup D i inverznu funkciju funkcije f .

Odgovor:

- | | |
|-----------------------------------|---|
| (a) $D = \mathbb{R}$, | (e) $f^{-1}(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$, |
| (b) $D = [-1, 1]$, | (f) $f^{-1}(x) = \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$, |
| (c) $D = \langle -1, 1 \rangle$, | (g) $f^{-1}(x) = \frac{10^{2x} + 1}{10^{2x} - 1}$, |
| (d) $D = [-1, 1)$, | (h) $f^{-1}(x) = \frac{-2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}}$ |

Rješenje: (c) i (e)

Zadaci za 3 boda

Zadatak 8 Za kompleksni broj $v = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$ odredite sve kompleksne brojeve z sa svojstvom:

$$\arg\left(\frac{z^5}{i^{2022}}\right) = \arg(v), \quad |z| = 6.$$

Rješenje: $z = 3 + 3\sqrt{3}i$.

Zadatak 9 Za prirodni broj n odredite sumu $1 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 14 + \dots + n(5n - 1)$. Rezultat zapišite u faktoriziranom obliku.

Rješenje: $\frac{n(n+1)(5n+1)}{3}$.

Zadatak za 4 boda

Zadatak 10 Odredite duljine stranica pravokutnika maksimalne površine koji se može upisati u jednakostranični trokut duljine stranice a ako jedna stranica pravokutnika leži na bazi trokuta.

Rješenje: $\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{4}$.