

1. kolokvij iz Matematike
Ak. god. 2017./2018.

Zadatak 1 (5+5 bod)

- a) Definirajte linearnu nezavisnost vektora $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \dots, \vec{a}_n \in X_O$.
b) Navedite primjer dva vektora koji su linearno nezavisni te obrazložite svoju tvrdnju.

Zadatak 2 (5+5 bod) Neka je zadana funkcija $g : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Napišite definiciju neprekidnosti funkcije u točki $c \in \langle a, b \rangle$.
b) Navedite primjer funkcije g koja nije neprekidna u barem jednoj točki i svoju tvrdnju obrazložite.

Zadatak 3 (15 bod) Metodom matematičke indukcije pokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Zadatak 4 (10+10 bod)

- a) Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2x}{x+5}} - \log_2(4-x)$.
b) Ispitajte bijektivnost funkcije $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ dane izrazom $g(x) = \frac{2x+1}{6-3x}$ i ako je ona bijektivna pronađite joj inverz.

Zadatak 5 (7+10 bod) Riješite:

- a) $\frac{12}{\log_2 x - 2} = 2 + \log_2 x$,
b) $3 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 3^{2x} < 0$.

Zadatak 6 (7+8 bod) Izračunajte sljedeće limese:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 5x - 1}{x \sin 5x}$,
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3 + 4x}{2x^3} \right)^{3x^2}$.

Zadatak 7 (8+5 bod)

- a) Čine li sljedeći vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ bazu u $X_O(E)$?
b) Prikažite vektor $4\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ i $\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.

1. kolokvij iz Matematike
Ak. god. 2017./2018.

Zadatak 1 (5+5 bod)

- a) Definirajte linearnu zavisnost vektora $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \dots, \vec{b}_n \in X_0$.
b) Navedite primjer dva vektora koji su linearno zavisni te obrazložite svoju tvrdnju.

Zadatak 2 (5+5 bod) Neka je zadana funkcija $h : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$.

- a) Napišite definiciju neprekidnosti funkcije u točki $d \in \langle a, b \rangle$.
b) Navedite primjer funkcije h koja nije neprekidna u barem jednoj točki i svoju tvrdnju obrazložite.

Zadatak 3 (15 bod) Metodom matematičke indukcije pokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}.$$

Zadatak 4 (10+10 bod)

- a) Odredite domenu funkcije $f(x) = \log_3 \left(\frac{3x}{x-2} - 4 \right) + \sqrt{x-3}$.
b) Ispitajte bijektivnost funkcije $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dane izrazom $g(x) = \frac{4-2x}{1+x}$ i ako je ona bijektivna pronađite joj inverz.

Zadatak 5 (7+10 bod) Riješite:

- a) $3 - \log_3 x = -\frac{16}{3 + \log_3 x}$,
b) $-3 \cdot 4^{2x} + 7 \cdot 12^x - 4 \cdot 3^{2x} > 0$.

Zadatak 6 (7+8 bod) Izračunajte sljedeće limese:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 7x - 1}{x \sin 7x}$,
b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^3 + 6x}{3x^3} \right)^{3x^2}$.

Zadatak 7 (8+5 bod)

- a) Čine li sljedeći vektori $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{k}$ i $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ bazu u $X_0(E)$?
b) Prikažite vektor $\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k}$ kao linearnu kombinaciju vektora $-3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k}$ i $2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.