Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
29. studenog 2016.

1. kontrolna zadaća iz Kombinatorne i diskretne matematike
Ak. god. 2016./2017.

Zadatak 1 [20b] *Studenti matematike su odlučili organizirati plesnu večer na koju se odazvalo* 150 *ljudi. Tijekom večeri okupljene osobe plesale su isključivo u parovima. Pokažite da postoje barem dvije osobe koje su plesale s jednakim brojem različitih osoba.*

Zadatak 2 [20b] *Koliko ima različitih riječi sastavljenih od* 10 *slova hrvatske abecede (bez slova s kvačicama i dvoslova) ako:*

a) na prvom i zadnjem mjestu ne smije biti samoglasnik?

b) se riječ mora sastojati od svih međusobno različitih slova među kojima je 3 *samoglasnika?*

Zadatak 3 [20b] *Društvo sastavljeno od* 10 *prijatelja, među kojima je* 5 *muških i* 5 *ženskih osoba odlučilo je otići u kino i poslije toga na pizzu.*

a) Na koliko načina oni mogu stati u red za ulaz u kino ukoliko barem dvije cure (unaprijed odabrane) moraju biti jedna iza druge?

b) Ulaznice koje imaju se nalaze u zadnjem i predzadnjem redu (u svakom po 5*). Na koliko načina se može napraviti razmještaj u zadnjem redu ukoliko u njemu mora biti više ženskih osoba?*

c) Na koliko načina mogu sjesti za okrugli stol u pizzeriji ukoliko među prisutnima ima dva para koji žele sjesti jedan do drugoga?

Zadatak 4 [20b] *Na jednoj radio stanici u nagradnoj igri je poklonjeno* 50 *ulaznica. Koliko je mogućih raspodjela ulaznica ukoliko je poznato da je od* 15 *slušatelja koji su sudjelovali u nagradnoj igri njih* 8 *dobilo ulaznice i da među njima nitko nije dobio više od pola ulaznica?*

Zadatak 5 [20b]

a) Dokažite da vrijedi:

$$4n^2 \cdot (-1)^n = \sum_{k=0}^{n} k(k+1)\binom{n}{k}(-2)^k.$$

b) Odredite koeficijent uz $x_2^2 x_3^5 x_4^3$ *u razvoju od:*

$$(5x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4)^{10}.$$

Zadatak 6 [20b] *DODATNI ZADATAK*
U tablici 10×10 *susjednim se poljima smatraju polja koja dijele barem jedan zajednički vrh. U svako polje upisan je prirodni broj manji ili jednak* 10 *tako da su brojevi u svaka dva susjedna polja relativno prosti. Dokažite da postoji broj koji je u tablicu upisan barem* 17 *puta.*

Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku
29. studenog 2016.

1. kontrolna zadaća iz Kombinatorne i diskretne matematike
Ak. god. 2016./2017.

Zadatak 1 [20b] *Prilikom svog druženja* 30 *prijatelja odlučilo je odmjeriti snage u šahu. Pokažite da nakon svih odigranih partija tijekom te večeri postoje barem dvije osobe koje su odigrale jednak broj partija.*

Zadatak 2 [20b] *Koliko ima različitih brojeva sastavljenih od* 5 *znamenki, a koji:*

a) na prvom i zadnjem mjestu imaju neparnu znamenku?

b) imaju sve međusobno različite znamenke i sadrže 3 *parne znamenke?*

Zadatak 3 [20b] *Ivana i Marija su odlučile slaviti zajedno rođendan i na njega pozvati svaka po* 5 *najboljih prijatelja. Poznato je da Ivana i Marija nemaju zajedničkih prijatelja i da Ivana ima* 8 *prijateljica i* 3 *prijatelja, a Marija* 5 *prijateljica i* 7 *prijatelja.*

a) Na koliko načina mogu izabrati prijatelje koje će zvati na proslavu ako nema dodatnih uvjeta?

b) Na koliko načina mogu napraviti odabir ako nakon odabira mora biti jednak broj muških i ženskih prijatelja?

c) Ukoliko je na proslavu pozvano 5 *prijatelja i* 5 *prijateljica, na koliko načina oni mogu sjesti za okrugli stol ako barem* 4 *ženske osobe trebaju sjediti jedna do druge? (Ivana i Marija isto trebaju sjediti za stolom)*

Zadatak 4 [20b] *Parlament ima* 151 *zastupničkih mjesta. Izborni prag je prešlo* 9 *stranaka (to su stranke koje su osvojile barem jedno zastupničko mjesto). Koliko ima mogućih raspodjela zastupničkih mjesta u kojima niti jedna stranka nema apsolutnu većinu?*

Zadatak 5 [20b]

a) Dokažite da vrijedi:

$$(2-3n)\cdot(-2)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}(k-1)\binom{n}{k}(-3)^k.$$

b) Odredite koeficijent uz $x_1^3x_2x_4^4$ *u razvoju od:*

$$(x_1-3x_2+10x_3-2x_4)^8\,.$$

Zadatak 6 [20b] *DODATNI ZADATAK*
U tablici 10×10 *susjednim se poljima smatraju polja koja dijele barem jedan zajednički vrh. U svako polje upisan je prirodni broj manji ili jednak* 10 *tako da su brojevi u svaka dva susjedna polja relativno prosti. Dokažite da postoji broj koji je u tablicu upisan barem* 17 *put*