ODJEL ZA MATEMATIKU
SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU *2. srpnja 2018.*

PISMENI ISPIT IZ KONVEKSNIH FUNKCIJA

1. Neka su $K_1 \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ i $K_2 \subseteq \mathbb{R}^{n\times m}$ konveksni skupovi. Pokažite da je skup $S = \{(x_1 + x_2, y), x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m, (x_1, y) \in K_1, (x_2, y) \in K_2\}$ konveksan skup.

2. Neka su $a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dvije pozitivne n-torke. Dokažite za $w < 1$ $(w \neq 0)$ vrijedi
$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^w\right)^{\frac{1}{w}} \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^w\right)^{\frac{1}{w}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^w\right)^{\frac{1}{w}}$$
a za $w > 1$ vrijedi suprotna nejednakost. U oba slučaja jednakost vrijedi ako i samo ako su a i b proporcionalne n-torke.

3. Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: Ako je $f : I \to \mathbf{R}$ pozitivna, konveksna, rastuća funkcija i $g : I \to \mathbf{R}$ pozitivna, konkavna, padajuća funkcija, onda je kvocjent f/g konveksna funkcija.

4. Dokažite ili opovrgnite tvrdnje: Funkcija $f : R^+ \to R^+$ definirana s
$$f(x) = 2\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}dt$$
je log-konveksna.

5. Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: Funkcija $f : I \to \mathbf{R}$ je strogo konkavna ako i samo ako za svake tri međusobno različite točke $x_1, x_2, x_3 \in I$ je funkcija $g : I^3 \to \mathbf{R}$ definirana sa
$$g(x_1, x_2, x_3) = \frac{(x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3)}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)}$$
negativna.

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.