ODJEL ZA MATEMATIKU
SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU *3. srpnja 2015.*

PISMENI ISPIT IZ KONVEKSNIH FUNKCIJA

1. Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: Ako su $S, T \subseteq \mathbf{R}^n$ konveksni skupovi, $\mathrm{int}T \neq \emptyset$ i $S \cap \mathrm{int}T = \emptyset$, onda postoji hiperravnina koja separira S i T.

2. Za proizvoljan skup $P \subseteq \mathbf{R}^n$ definiramo $P^\star = \{x \in \mathbf{R}^n | x \cdot y \leq 0, \forall y \in P\}$. Dokažite da je $P^\star$ konveksan konus. Ako je $P \subseteq Q \subseteq \mathbf{R}^n$, dokažite da je $Q^\star \subseteq P^\star$.

3. Neka je x realan broj, takav da je $-1 < x \neq 0$. Dokažite: Ako je a realan broj takav da je $a > 1$ ili $a < 0$, tada vrijedi
$$(1+x)^a > 1 + ax,$$
ako je $0 < a < 1$ tada vrijedi
$$(1+x)^a < 1 + ax.$$

4. Dokažite: Ako je $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ konveksna odozgo omeđena funkcija onda je f konstantna funkcija.

5. Dokažite: Funkcija $f : I \to \mathbf{R}$ je konveksna ako i samo ako vrijedi
$$\begin{vmatrix} 1 & x & f(x) \\ 1 & y & f(y) \\ 1 & z & f(z) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \geq 0,$$
za svake tri međusobno različite točke $x, y, z \in I$.

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.