ODJEL ZA MATEMATIKU
SVEUČILIŠTE J. J. STROSSMAYERA U OSIJEKU *7. srpnja 2017.*

PISMENI ISPIT IZ KONVEKSNIH FUNKCIJA

1. Neka je $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linearan operator i $T \subseteq \mathbb{R}^n$. Ispitajte odnos među skupovima $\mathrm{conv} f^{-1}(T)$ i $f^{-1}(\mathrm{conv} T)$. Ako inkluzije vrijede dokažite ih, u slučaju da neka inkluzija ne vrijedi navedite kontraprimjer.

2. Za proizvoljan skup $S_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ definiramo $\overline{S_1} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot y \leq 0, \forall y \in S_1\}$. Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: Skup $\overline{S_1}$ je konveksni konus. Ako je $S_1 \subseteq S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, dokažite da je $\overline{S_1} \supseteq \overline{S_2}$.

3. Dokažite tvrdnju: Neka je $f : I \to \mathbf{R}$ konveksna funkcija neprekidna na I koja u točki $x_0 \in I$ postiže lokalni minimum. Tada funkcija f u toj točki x_0 postiže i globalni minimum na I. Nadalje za svaki $x \in IntI$ vrijedi $D^- f(x) \leq D^+ f(x)$.

4. Dokažite ili opovrgnite tvrdnju: Funkcija $f : R^+ \to R^+$ definirana s
$$f(x) = 2 \int_0^\infty \frac{s^{2x-1}}{e^{s^2}} ds$$
je log-konveksna.

5. Neka su $x_1, ...x_n$ pozitivni brojevi, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$, $v_1, ..., v_n$ realni brojevi takvi da vrijedi $v_1 > 0$, $v_i < 0$ za $i = 2, ..., n$ i $V_n = \sum_{i=1}^n v_i > 0$. Dokažite da vrijedi:
$$\frac{v_1 x_1 + ... + v_n x_n}{V_n} \leq (x_1^{v_1} \cdots x_n^{v_n})^{1/V_n}$$
.

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.