

PRVI KOLOKVIJ IZ KONVEKSNIH FUNKCIJA

1. [20 bodova]
 - (a) Napišite definiciju konveksnog skupa.
 - (b) Neka je $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ norma, $a \in \mathbb{R}^n$ i $r > 0$. Dokažite da je skup $B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ konveksan.
2. [15 bodova] Neka je $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ afina funkcija $f(x) = Ax + b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ i S konveksan skup. Pokažite da je tada i $f(S) \subseteq \mathbb{R}^m$ također konveksan skup.
3. [15 bodova] Definirajte konveksnu ljusku (konveksni omotač) skupa S . Skicirajte skup S koji nije konveksan i njegovu konveksnu ljusku.
4. [15 bodova] Dokažite: Skup S je konveksni konus ako svaka pozitivna linearna kombinacija konačnog skupa točaka iz S pripada skupu S .
5. [20 bodova]
 - (a) Napišite definiciju konveksne funkcije.
 - (b) Pomoću definicije konveksne funkcije provjerite konveksnost funkcije $f(x) = \log_a x$, $0 < a < 1$.
6. [15 bodova] Pomoću Jensenove nejednakosti dokažite težinsku GH-nejednakost.

Napomena. Sve svoje tvrdnje obrazložite.